Arbeidsnotat

Trigonometri

Kyrre Johannesen

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Arbeidsnotat nr 215

Steinkjer 2007

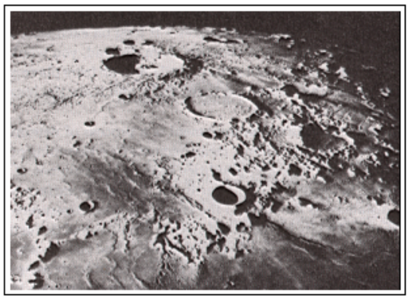
HØGSKOLEN I NORD-TRØNDELAG

Trigonometri

Kyrre Johannesen

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Arbeidsnotat nr 215
Avdeling for sykepleier-, ingeniør- og lærerutdanning
ISBN 82-7456-496-0
ISSN
Steinkjer 2007

0. Forord

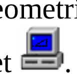


Hvor stor er månen og hvor langt borte er den ?

Dette heftet ble skrevet som et supplement til tilgjengelig litteratur for kurset Matematikk 2 i årsenheten i matematikk ved lærerutdanningen.
Heftet dekker et av innledningsemnene til funksjonslæra, nemlig trigonometri i planet og trigonometriske funksjoner.
To hovedaspekter av trigonometri er behandlet i denne framstillingen :

- Geometriske definisjoner og anvendelser av forholdstallene sinus, cosinus og tangens til en vinkel (kapitel 1, 2og 7) og
- definisjoner og anvendelser av de trigonometriske funksjonene. (kapitel 3, 4, 5, 6 og 7). Siden dette skal være en elementær innføring i emnet er kun funksjonene sinus, cosinus og tangens behandlet i dette heftet. De andre funksjonene berøres bare kortfattet i framstillingen.
- For helhetens skyld er det også tatt med en kortfattet behandling av den deriverte til de trigonometriske funksjonene. (kapitel 8) Dette emnet blir bredere behandlet i resten av funksjonslæredelen i matematikk 2.

Siden dette er et av de mer elementære innledningsemnene som i noen grad er kjent for noen av studentene, mens andre ikke kjenner stoffet, er heftets innhold forsøkt utformet slik at en skal kunne lese det på egen hånd uten å følge all undervisning i Matematikk 2. Dette betyr blant annet at framstillingen bevisst har en senere progresjon (og flere eksempler og oppgaver) enn hva som for eksempel er vanlig i universitetskurs der emnet inngår. Faglærerne vil likevel understreke at det normale studieforløp i stor grad betinger at en følger undervisningen på vanlig måte også for dette emnet.
I framstillingen er det tatt med mange eksempler og øvingsoppgaver og en fasit (til de fleste av oppgavene) finnes bakerst i heftet. I skrivende stund er fasit til oppgavesamlingen i kap.9 ikke klar og vil bli delt ut som kopi senere.

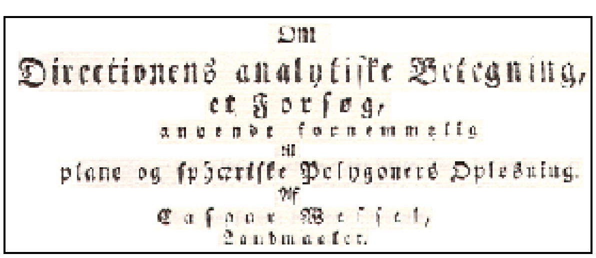
I framstillingen er det tatt med bruk av IKT i form av såkalt *dynamisk programvare*. Vi har vektlagt å bruke slik programvare i stedet for mer tradisjonell grafetegningsprogrammer fordi vi mener denne type programvare gir en bedre visuell og dynamisk læringsstøtte rettet mot begrepsforståelse innenfor emnet. Med heftet følger en CD med demonstrasjoner og arbeidsoppgaver framstilt ved hjelp av programmene ”Cabri geometri II” , ”Autograph” og ”Excel”. Referanser til disse i framstillingen er merket med ikonet . Oversikt finnes i kap.10.

Foreliggende hefte er en førsteutgave og forfatteren er derfor takknemlig for innspill fra leserne både når det gjelder forslag til endringer og nye vinklinger og mulige feil i framstillingen.

Levanger. September 2003.
Kyrre Johannesen.

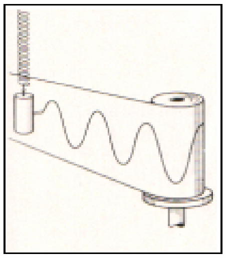
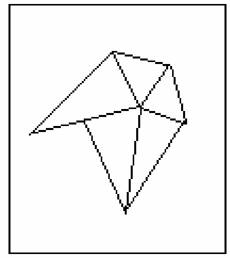
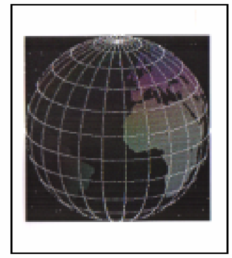
e-mail : kyrre.johannesen@hint.no

Innhold



Utdrag fra forsiden av Caspar Wessels avhandling
"Om Directionens analytiske Beregning" fra
1798. Artikkelen har senere blitt berømt blant annet
fordi Wessel som den første her gir en geometrisk representasjon
av komplekse tall.

1. Trigonometri

Ordet ”trigonometri” betyr triangel-måling.

På en rekke områder støter vi på fenomener som er *periodiske*, det vil si fenomener som gjentar seg selv regelmessig. I fysiologien kjenner vi for eksempel hjerteslag og åndedrett
og fra fysikken kjenner vi forskjellige svingefenomener og for eksempel månefasene.
Også i økonomi kjenner vi periodiske fenomener som for eksempel konjunktursvingninger.
Når vi skal beskrive denne typen fenomener matematisk, får vi bruk for de såkalte *trigonometriske funksjonene*.
La oss imidlertid først se nærmere på grunnlaget for definisjonen av denne typen funksjoner som er nær knyttet til geometriske betraktninger. Historisk har dette sitt utspring blant annet i kartlegging av jord-områder ved bruk av såkalt *triangulering* der en med utgangspunkt i en kjent basislengde bygger opp et nett av trekanter med kjente vinkler. De ukjente sidene kan så beregnes ved hjelp av trigonometriske metoder som vi beskriver i følgende avsnitt.

1.1 Trekantberegning

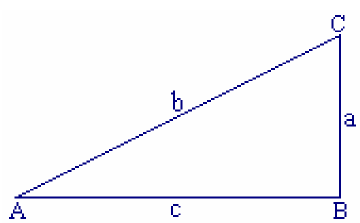


Fig.1.1.1

Betrakt den rettvinklede trekanten i fig. 1.1.1 til venstre.
I litteratur om emnet vil du møte følgende navn på sidekantene i slike rettvinklede trekanter :
Lengste siden i trekanten (som alltid er motsatt den rette vinkelen) kalles *hypotenusen* (b) og kortsidene (a og c), som alltid utgjør de to vinkelbeina til den rette vinkelen, kalles trekantens *kateter*.

Vinklene A (dvs. $\angle BAC$) og C (dvs. $\angle ACB$) i trekanten må begge være spisse, siden vinkel B er rett og siden vinkelsummen i trekanten er 180^o.
Tar vi utgangspunkt i vinkel A, blir BC være den *motstående kateten* til vinkelen, og AB vil være den *hosliggende kateten* til vinkelen. Tar vi derimot utgangspunkt i vinkel C, vil AB være den *motstående kateten* til vinkelen, mens BC vil være den *hosliggende kateten* til vinkelen.

$$\sin A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusen}} = \frac{BC}{AC}$$
$$\cos A = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenusen}} = \frac{AB}{AC}$$
$$\tan A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{BC}{AB}$$

Vi definerer nå tre viktige forholdstall, *sinus* til vinkelen, *cosinus* til vinkelen og *tangens* til vinkelen, for hver av vinklene i en trekant.
Tilsvarende kan du definere sinus, cosinus og tangens til vinkel C.
(og vinkel B.)

Def. 1.1.2
Til enhver spiss vinkel A i en rettvinklet trekant ABC, svarer det tre forholdstall, sin A, cos A og tan A, definert som vist ovenfor.

Den nøyaktige leser vil sikkert undre seg på om disse forholdstallene kun avhenger av vinkelen A, eller om de også avhenger av sidekantlengdene i den rettvinklede trekanten.
La oss gi et bevis for at forholdstallene kun er avhengig av $\angle A$ og ikke av sidekantlengdene AB, BC og AC : (*)

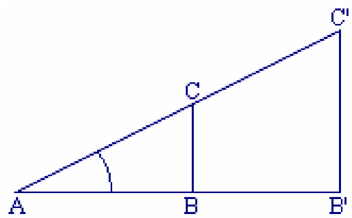


Fig.1.1.3

I fig.1.1.3 til venstre har vi tegnet to formlike trekanter ABC og A'B'C'. Trekantene har vinkel A felles. (A' = A.)
At trekantene er formlike betyr at det finnes et lineært forholdstall r slik at $AB' = r \cdot AB$, $B'C' = r \cdot BC$ og $AC' = r \cdot AC$.

Da blir : $\sin A' = \dfrac{B'C'}{AC'} = \dfrac{r \cdot BC}{r \cdot AC} = \dfrac{BC}{AC} = \sin A$

Dessuten blir $\cos A' = \dfrac{AB'}{AC'} = \dfrac{r \cdot AB}{r \cdot AC} = \dfrac{AB}{AC} = \sin A$ og $\tan A' = \dfrac{B'C'}{AB'} = \dfrac{r \cdot BC}{r \cdot AB} = \dfrac{BC}{AB} = \tan A$

Oppg.1.1.4 Hent inn Cabri-filen **Trekantdef.fig** fra CD-en "M2".
Varier sidekantlengdene (samtidig som vinkel A holdes konstant) ved å endre posisjonen til hjørnet B og studer forholdstallene sin, cos og tan. Hva ser du ? Diskuter og forklar med egne ord.

Oppg. 1.1.5 I trekant ABC er vinkel B rett, og AB = 6 cm og BC = 4 cm.

a. Finn lengden av hypotenusen AC. Hvilken setning bruker du ?
b. Finn forholdstallene sin A, cos A og tan A.
c. Finn forholdstallene sin C, cos C og tan C.
d. Sammenlikn sin A med cos C og cos A med sin C. Hva ser du ? Forklar.

Oppg.1.1.6 Hent inn igjen Cabri-filen **Trekantdef.fig** fra CD-en "M2".
Studer, ved å endre posisjonen til hjørnet C, forholdstallene sinA, cosA og tanA *for ulike vinkler A* i trekant ABC. Hva ser du ? Diskuter og forklar med egne ord.

1.2 sin, cos og tan for noen enkle vinkler

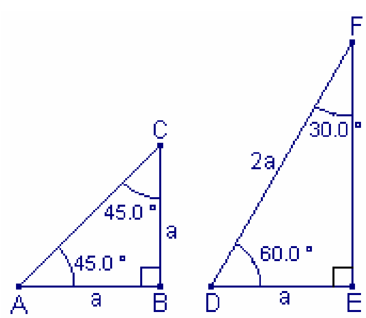


Fig.1.2.1

Vi kan bruke Pythagoras' setning til å finne sin, cos og tan for vinklene 30^o , 45^o og 60^o . Betrakt trekantene i fig.1.2.1.

Oppg.1.2.2

Finn ved å bruke Pythagoras' setning et uttrykk for hypotenusen i trekanten til venstre og et uttrykk for lengste katet i trekanten til høyre.

I den likebeinede trekanten til venstre, blir $\sin A = \sin 45^o = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ og $\cos A = \cos 45^o = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ og $\tan A = \tan 45^o = \dfrac{a}{a} = 1$. I trekanten til høyre er vinklene 30^o , 60^o og 90^o slik at hypotenusen er dobbelt så lang som korteste katet.

Dette gir oss at $\sin A = \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos A = \cos 60^\circ = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$,

$\tan A = \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$ og $\sin B = \sin 30^\circ = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$, $\cos B = \cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan B = \tan 30^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Vi kan sette resultatene inn i en oversiktig tabell :

Dersom du skal finne forholdstallene sin, cos og tan for andre vinkler, kan du selvfølgelig bruke kalkulatoren. Om du vil studere mer dynamisk hvordan forholdstallene endrer seg for ulike vinkler A, er et regneark bedre.

Oppgave 1.2.3 Hent inn regnearket Trigtabell.xls (fig. nedenfor) og studer forholdstallene sin, cos og tan for ulike vinkler i området –180 grader til 180 grader. Noter vinklene i de tilfeller du får heltalls eller brøksvar.

1. Utregning av forholdstallene sin, cos og tan for en valgt vinkel A

A. Velg vinkel	A =	60	grader	dvs.
		1,0471976	radianer	

B. Utregning		
sin A	=	0,8660
cos A	=	0,5000
tan A	=	1,7321

2. Utregning av vinkel A fra valgt forholdstal sin, cos eller tan

A. Velg sin, cos eller tan				B. Utregning					
sin A	=	-1,0000	===>	A =	-90	o	dvs.	-1,5708	radianer
cos A	=	0,6000	===>	A =	53,1301	o	dvs.	0,9273	radianer
tan A	=	0,5000	===>	A =	26,5651	o	dvs.	0,4636	radianer

Du kan også gå motsatt veg ved hjelp av dette regnearket.
Legger du inn en verdi mellom 1 og –1 for sinus til vinkel A, får du ut vinkelen som har denne sinus-verdien.
(se (*) ovenfor)

1.3 Noen anvendelser

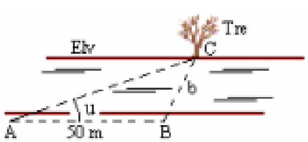


Fig.1.3.2

Eks.1.3.1 Anta at du ønsker å måle bredden på en elv uten å bli våt på føttene.
Her er en måte å gjøre det på. Velg ut et landemerke C (tre eller lignende) på den andre siden av elven.
Sett et merke B (med pinne eller sten eller lignende) på din side av elven rett ovenfor C. Sett ett annet landemerke A på din side av elven i en passende avstand fra B slik at AB er noenlunde vinkelrett på BC. Bruk en vinkelmåler og sikt fra A mot B og deretter mot C, og mål vinkelen mellom sikteretningene AB og AC (dvs. $\angle A$).

Da har du at : $\tan A = \dfrac{b}{AB} = \dfrac{b}{50} \Rightarrow b = 50 \cdot \tan A$.

For eksempel, dersom vinkel A ble målt til 29°, ville $b = 50 \cdot \tan 29 \approx 27{,}7$ meter.

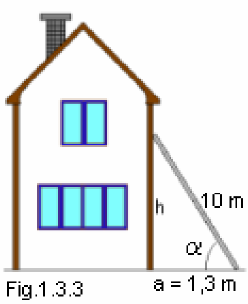


Fig.1.3.3

Eks.1.3.4 En stige på 10 m står opp langs en vegg. Den står a meter fra husveggen. Hvor høyt rekker stigen på veggen ? La h = høyden av stigen på veggen, og la α være vinkelen stigen danner med bakken. Da er $\cos\alpha = \dfrac{1{,}3}{10} = 0{,}13$. Her kjenner du altså forholdstallet $\cos\alpha$ og kan dermed finne vinkelen α . (se oppgave 1.3.5)

Oppg.1.3.5 Hent inn regnearket [Trigtabell.xls]() fra CD-en "M2" og legg inn 0,13 som cos A, og finn vinkelen α. Her får du $\alpha \approx 82{,}5^{o}$.

Nå kan du bruke $\tan\alpha$ for å finne høyden av stigen på veggen : $\tan A = \dfrac{h}{1{,}3} \Rightarrow h = 1{,}3 \cdot \tan 82{,}5^{o}$.

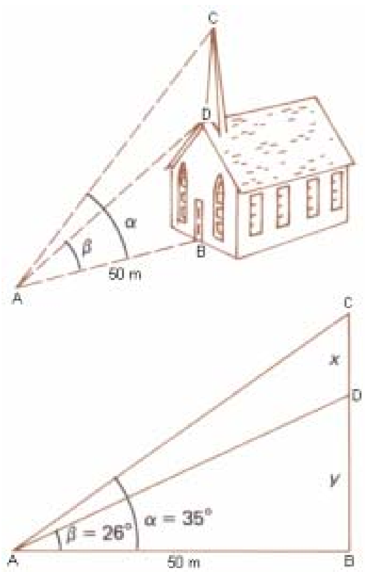


Fig.1.3.7.

Eks.1.3.6
Du skal finne ut hvor høyt et kirketårn rager over bakken mens du er på bakkenivå. (fig.1.3.7)
Du kan gå fram slik :
Sett en merkestein ved punkt B på bakken loddrett under tårnets toppunkt, C. Sett så en merkestein ved et punkt A i en kjent avstand fra B, for eksempel 50 m. Mål deretter siktevinklene mot tårnets toppunkt C og deretter punkt D, der tårnet møter taket. (Siktevinklene er vinklene mellom vannrett og siktelinjen mot det punktet du sikter på.)
Dette kan for eksempel gjøres ved hjelp av et *Klinometer*.
(se Cabrioppg.1.3.3 nedenfor)
Dette er all informasjon du trenger forutsatt at du kan din trigonometri. La x være høyden av tårnet fra taket og opp (dvs. DC på fig.) og la y være høyden fra bakken til der tårnet møter taket.(dvs. BD på fig.)
Bruker du tangens til de målte siktevinklene (trekantene ABC og ABD), får du :

[I] $\tan\alpha = \dfrac{x+y}{50} \Rightarrow x+y = 50\cdot\tan\alpha$ og [II] $\tan\beta = \dfrac{y}{50} \Rightarrow y = 50\cdot\tan\beta$

Setter du uttrykket for y i likning II inn i likning I, får du :

$$x + 50\cdot\tan\beta = 50\cdot\tan\alpha \Rightarrow x = 50\cdot\tan\alpha - 50\cdot\tan\beta = 50\cdot(\tan\alpha - \tan\beta).$$

Dette gir et uttrykk for tårnhøyden ved hjelp av tangens til de målte vinklene. Dersom du ved målingen for eksempel fikk $\alpha = 35^{o}$ og $\beta = 26^{o}$, vil

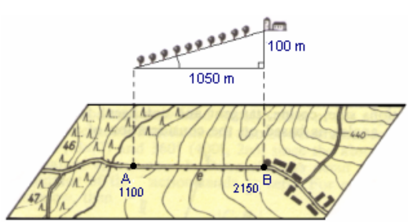
$x = 50\cdot(\tan\alpha - \tan\beta) = 50\cdot\left(\tan 35^{o} - \tan 26^{o}\right) \approx 10{,}6$ og $y = 50\cdot\tan\beta = 50\cdot\tan 26^{o} \approx 24{,}4$

Dette gir oss at tårnet rager 10,6 m + 24,4 m = 35 m over bakken.

Oppg.1.3.8 Last inn filen **[Klinometer.fig]()** fra CD-en "M2" og undersøk hvordan Klinometeret kan brukes til å bestemme elevasjonsvinkler (vertikale siktevinkler).

Oppg.1.3.9 Hent inn regnearket [Trigtabell2.xls]() fra CD-en "M2" og legg inn 0,13 som cos A, og finn vinkelen α. Her får du $\alpha \approx 82{,}5^{o}$. Nå kan du bruke tangens til α for å finne høyden av stigen på veggen (se eksempel 1.3.4) :

$\tan A = \dfrac{h}{1{,}3} \Rightarrow h = 1{,}3\cdot\tan 82{,}5^{o} \approx 9{,}9$. Kan du tenke deg en annen måte å finne denne høyden på ? Diskuter og forklar med egne ord.



Oppg.1.3.10

I sykkelrittet "Tour de France" er bakkene i de såkalte klatreetappene inndelt i kategorier (I , II, III eller IV) etter hvor bratte de er. Fig. til venstre viser et kart over en bakke i en av klatreetappene.

Arrangøren oppgir at den er en kategori I bakke, noe som betyr at den skal ha en stigning på mellom 9 % og 10 %.

a. Regn ut den %-vise stigningen bakken har.

b. Regn ut bakkens stigningsvinkel.

1.4 Bruk av kalkulator

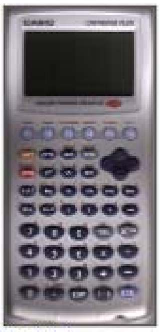


Fig.1.4.1.

Som tidligere nevnt kan du selvfølgelig bruke kalkulatoren din for å finne forsholdstallene sin, cos og tan for en valgt vinkel. I tillegg kan du også gå motsatt veg og finne den vinkel, A, som tilfredsstiller forholdstallet sin A lik et valgt tall mellom –1 og 1. (Se også kapitel 6)
Tilsvarende kan du også gå motsatt veg når det gjelder forholdstallene cos og tan.
I det følgende beskriver vi hvordan du kan bruke kalkulatoren CASIO (modell CFX-9850 GB eller tilsvarende). For andre kalkulatorer, som for eksempel TI må du selv finne ut framgangsmåtene fra manualen.

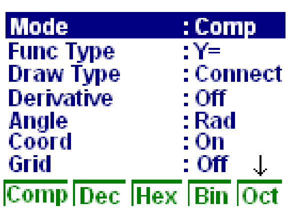
Eks.1.4.2 Du bruker tastene sin , cos og tan på tastaturet.

For å finne $\sin 32°$ taster du sin 3 2 Exe

For å finne $\cos 32°$ taster du cos 3 2 Exe

For å finne $\tan 32°$ taster du tan 3 2 Exe

Du må imidlertid passe på at kalkulatoren er satt opp slik at vinkler måles i grader. Vi kommer i avsnitt 2.2 tilbake til hvordan du kan regne med vinkler målt i radianer.
For å sette opp kalkulatoren med vinkler målt i grader, gjør du slik :



① Ta fram menyen ved å trykke på MENU-tasten og trykk EXE.

② Hold SHIFT-tasten nede mens du trykker MENU-tasten (dette tilsvarer SETUP)

③ Bla nedover i menyen som framkommer til linjen merket Angle. Til høyre for Angle står det valgte vinkelmålet som enten er Deg (for Degrees eller grader), Rad (for Radianer) eller Grad (for Grades).

④ Nederst i displayet, står en meny med disse tre valgene, Deg, Rad og Grad plassert rett over funksjonstastene F1, F2 og F3 henholdsvis. For å velge grader, trykker du F1.

⑤ Deretter kan du beregne etter å ha trykket EXIT-tasten.

Eks.1.4.3. For å finne den vinkel A som tilsvarer sin A = 0,5 går du fram slik :

① Hold SHIFT-tasten nede, mens du trykker sin-tasten. (Dette aktiverer funksjonen $\sin^{-1}$)

② Tast måltallet 0,5

③ Trykk EXE-tasten.

Vinkelmåltallet 30 vises i displayet. Kontroller deretter ved å taste SIN 30 og trykke EXE-tasten. Du kan gå fram på tilsvarende måte for forholdstallene cos og tan.

Oppg.1.4.4

a. Finn $\sin 32{,}3^{\circ}$ og $\cos 57{,}7^{\circ}$ ved hjelp av kalkulatoren.

b. Finn $\sin 12{,}9^{\circ}$ og $\cos 77{,}1^{\circ}$ ved hjelp av kalkulatoren. Hva ser du ?

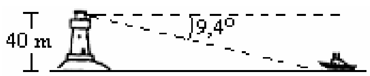
c. Prøv med flere vinkler og finn ut om din hypotese stemmer.

d. Finn en vinkel A som oppfyller tan A = 0,8.

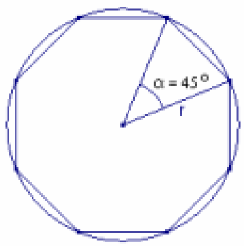
Oppg.1.4.5 Bruk regnearket Triggtabell2 eller kalkulatoren og finn

a. sin $41{,}3^o$, cos $59{,}2^o$ og tan $54{,}4^o$.

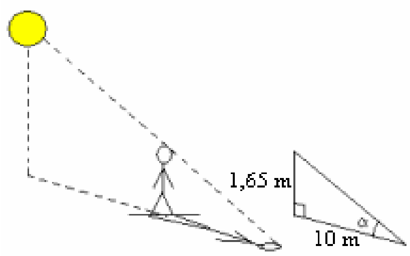
b. vinkel A når sin A = 0,2164 og når cos A = 0,9354 og når tan = 0,3096 og $0^o \le \angle A \le 180^o$



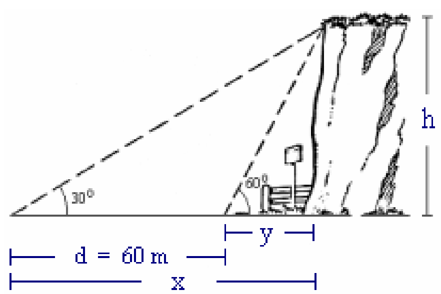
Oppg.1.4.6 Fra toppen av et 40 m høyt fyrtårn ses en båt i en vinkel på $9{,}4^o$ under horisontal retning. Hvor lang borte fra fyrtårnet er båten ?



Oppg.1.4.7 En regulær 8-kant er innskrevet i en sirkel med radius r. (Se fig.)
Finn omkretsen til 8-kanten uttrykt ved r.
Finn omkretsen av 8-kanten dersom r = 5 cm.



Oppg.1.4.8 I denne oppgaven skal vi regne med en vinkelstørrelse kalt *solhøyden*. (Se fig.) Dette er minste vinkelen mellom horisontal retning og siktelinja mot sola.
En person som er 1,65 m høy kaster ved et tidspunkt en skygge som er 10 m lang.
Finn solhøyda (vinkel α på fig.) ved dette tidspunktet.



Oppg.1.4.9 Noen speidere vil finne høyden, h, til en klippe ved havet. I en avstand x fra klippens fot, måles siktevinkelen mot toppen av klippen til 30^o.
Deretter går speiderne mot klippen og i avstand y fra klippen, måles siktevinkelen mot toppen igjen, denne gang til 60^o.
Speiderne målte distansen på bakken mellom de to målingspunktene til 60 m.

a. Vis at $\tan 30^o = \frac{h}{x}$ og $\tan 60^o = \frac{h}{y}$

b. Bruk tabellen på s.3 til å vise at dette betyr at $x = h\sqrt{3}$ og $y = \frac{h}{\sqrt{3}}$

c. Bruk at $d = x - y = 60$ m til å finne høyden h av klippen.

Eks.1.4.10 Finn alle ukjente sidekantlengder og vinkler i trekant ABC i fig.1.4.11 til venstre.

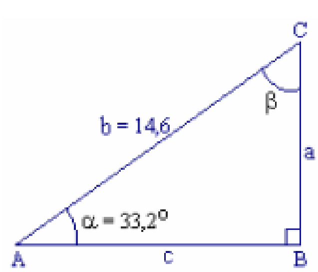


Fig.1.4.11

Vi skal altså finne a, c og $\angle\beta$.

$$\beta = 180^o - \left(90^o + 33{,}2^o\right) = 56{,}8^o$$

$$\sin 33{,}2^o = \frac{a}{14{,}6} \Rightarrow a = 14{,}6 \cdot \sin 33{,}2^o \approx 14{,}6 \cdot 0{,}5476 = 7{,}99$$

$$\cos 33{,}2^o = \frac{c}{14{,}6} \Rightarrow c = 14{,}6 \cdot \cos 33{,}2^o \approx 14{,}6 \cdot 0{,}8368 = 12{,}2$$

Eks.1.4.12 Finn alle ukjente sidekantlengder og vinkler i trekant ABC i fig.

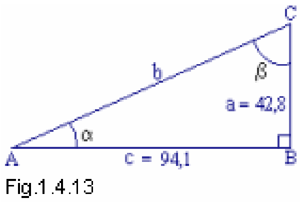


Fig.1.4.13

Vi skal her finne b, $\angle\alpha$ og $\angle\beta$.

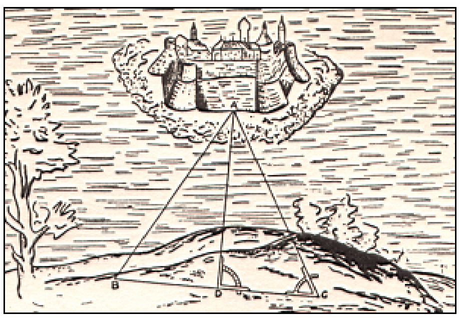
$$\tan\alpha = \frac{42{,}8}{94{,}1} \approx 0{,}4548 \Rightarrow \alpha = 24{,}5^{\circ}$$

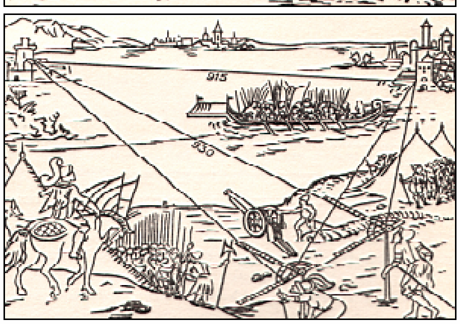
$$\beta = 180^{\circ} - \left(90^{\circ} + 24{,}5^{\circ}\right) = 65{,}5^{\circ}$$

$$\sin\alpha = \frac{42{,}8}{c} \Rightarrow c = \frac{42{,}8}{\sin\alpha} = \frac{42{,}8}{\sin 24{,}5^{\circ}} \approx \frac{42{,}8}{0{,}4147} = 103$$

Oppg.1.4.13 I en rettvinklet trekant ABC er a = AB = 19 m, AC = b = 25 m og $\angle ABC = 90^{\circ}$. Tegn hjelpefigur og sett på mål. Finn alle ukjente sidekantlengder og vinkler i trekant ABC.

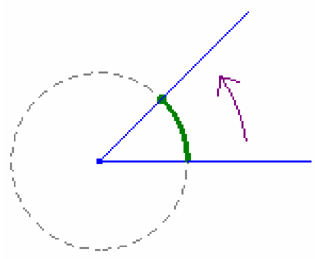
Oppg.1.4.14 Et vegskilt viser en stigning på 10 % Hva betyr dette ? Finn stigningsvinkelen.





Oppg.1.4.15 Figuren til venstre viser et par historiske eksempler på at trigonometriske resonnementer har hatt stor betydning, i dette tilfellet innen krigføring.
Ta for deg hvert av eksemplene etter tur.
Noter ukjente størrelser som skal bestemmes, kjente og målte størrelser og forsøk å sette opp matematiske modeller ved hjelp av forholdstallene sin, cos og tan for å bestemme de størrelser som en ønsker å finne.

2. Vinkler og vinkelbuer



I geometri tenker vi ofte på vinkler på en statisk måte.
En vinkel er ganske enkelt sammensetningen av
to stråler med felles startpunkt.
I trigonometri, tenker vi ofte på vinkler på en dynamisk måte.
En vinkel framkommer ved å rotere en stråle omkring sitt startpunkt
fra en startposisjon til en sluttposisjon.

For å regne ut ukjente sider og vinkler i en rettvinklet trekant trenger vi ofte bare å betrakte vinkler med gradtall mellom 0 og 90 grader. Men for en bredere utvikling av trigonometrien trenger vi et mer dynamisk syn på vinkelstørrelser. Ikke bare tillater vi vilkårlig store vinkler, men også negative vinkler. Hvis en vinkel genereres ved å rotere en stråle fra en utgangsposisjon *mot urviseren*, er vinkelen *positiv*, og dersom den genereres ved en rotasjon med urviseren er den *negativ*.

2.1 Vinkelmåltall i grader

Tar vi en sirkel og deler dens periferi (selve sirkellinja) inn i 360 like deler, vil vinkelen med topp-punkt i sirkelens sentrum og med vinkelåpning bestemt av en av disse delene, så vil vinkelen måle 1 grad (skrives 1^o). Denne måten å måle vinkler på stammer fra de gamle Babylonerne og er så familiær for de fleste i dag at vi i dette heftet har brukt den uten kommentarer. Babylonerne brukte også en finere inndeling av vinkelmåltall ved at de delte 1 grad inn i 60 (bue-)minutter (skrevet ’)og 1 minutt inn i 60 (bue-)sekunder (skrevet ’’). Disse enhetene er fremdeles i bruk når vi angir posisjonen til et sted på jordoverflaten, dvs. lengdegrad og breddegrad. I trigonometrien skal vi imidlertid bare bruke hele grader eller grader angitt som desimaltall. For eksempel vil vi skrive $34{,}5^o$ heller enn $34^o 30'$.

Det er viktig å bli familiær med både positive og negative vinkler for å få et godt læringsutbytte av denne delen av kurset.

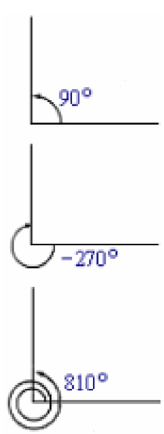


Fig.2.1.1

Eks.2.1.2 I figuren til venstre er tre vinkler tegnet: Alle tre har samme toppunkt, samme utgangsposisjon og samme slutt-posisjon, men har ulikt gradtall.

Oppg.2.1.3 Tegn et bilde som viser de oppgitte vinklene nedenfor :

a. 45^o

b. -315^o

c. 765^o

Oppg.2.1.4 Tegn en vinkel på -135^o og en på 225^o.
Sammenlikn vinklene og diskuter.

2.2 Vinkelmåltall i radianer

Vi har allerede nevnt at kalkulatoren gir mulighet for å måle vinkler på tre ulike måter, nemlig i *grader*, i *radianer* og i *grades*. Den siste enheten bygger på at vi deler inn sirkelen i 400 like deler i stedet for i 360 som for enheten grader. Denne enheten skal vi ikke bruke i denne framstillingen.

Eks.2.2.1 Betrakt fig. 2.2.2 nedenfor :

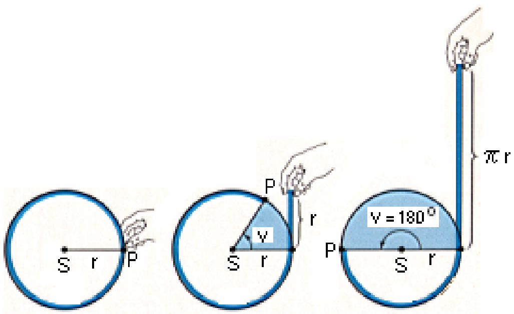


Fig.2.2.2

Bli med på følgende tankeeksperiment.
Rundt en trinse med radius r er et tau lagt. Tauet dras opp en lengde som tilsvarer radiens lengde r. OP vrir seg da en vinkel v.
Denne vinkelen sier vi måler 1 radian, v = 1 radian.
Merk at vinkelen v ikke er lik 60^o! (Se oppg.2.2.5)
Da har punktet P beskrevet en (vinkel-)bue, b, som har lengden $b = 1 \cdot r$.
Drar vi tauet opp en lengde $\pi \cdot r$, vil OP ha vridd seg en halv omdreining, dvs. 180^o. Siden halvparten av sirkelens omkrets er $\pi \cdot r$, får vi at
$v = 180^o = \pi$ radianer. Buen b er da $b = \pi \cdot r$.

Med bakgrunn i eksemplet definerer vi 1 radian slik :

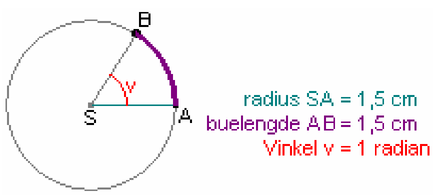


Fig.2.2.4

Def.2.2.3 Vinkelen med toppunkt i sentrum av en sirkel med en buelengde lik sirkelens radius sier vi måler en *radian*.

Oppg.2.2.5 Finn ut gradtallet for en vinkel som måler 1 radian.

Eks.2.2.6 Siden vi vet at sirkelperiferien er 2π ganget med radius-lengden, vil en vinkel på 360^o måle 2π radianer. Vi kan lage en tabell for å sammenlikne vinkelmålene grader og radianer :

Grader	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Radianer	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π		$\frac{5\pi}{4}$			$\frac{5\pi}{3}$			2π

Oppg.2.2.7 a. Fyll ut resten av tabellen ovenfor.
b. Regn om vinkelmåltallet -135^o til radianer.

Eks.2.2.8 Tenk deg at vi har målt en vinkel til 22^o. Hvor stor er vinkelen målt i radianer ?
Vi vet at $180^o = \pi$ radianer . Dividerer vi denne likningen med 180 på begge sider,
får vi likheten $1^o = \frac{\pi}{180}$ radianer.

Vi får da at $22^o = 22 \cdot \frac{\pi}{180}$ radianer $= \frac{22 \cdot \pi}{180}$ radianer $\approx 0{,}38397$ radianer.

Setn.2.2.9 $1^o = \frac{\pi}{180}$ radianer 1 radian $= \frac{180}{\pi}$ grader

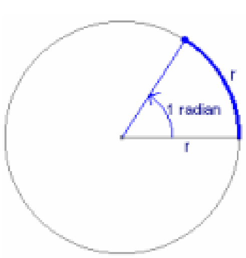


Fig.2.2.10

Eks.2.2.11 2,3 radianer $= 2{,}3 \cdot \frac{180^o}{\pi} \approx 131{,}78^o$

Radian-måler nyttige fordi det er et mer reelt mål enn grader. Inndelingen av sirkelen i 360 like deler var mer tilfeldig, mens det er naturlig å dele inn sirkelen etter hver mange radiuslengder det går på periferien. Radian-målet gir en enkel måte å beregne buelengder på.

Buelengder

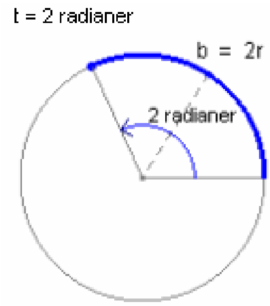


Fig.2.2.12

Eks.2.2.13 Anta t er radian-målet til en vinkel θ med toppunkt i sentrum i en sirkel med radius r. Vinkelen kutter en vinkelbue s av sirkelen som tilfredsstiller likningen

$$b = r \cdot t$$

Dette fordi en vinkel på 1 radian kutter en vinkelbue med buelengde r.

Oppg.2.2.14 Hent fram filen Vinkelmaal.fig fra CD-en ”M2”.
Varier vinkelen og studer sammenhengen mellom gradtallet og radiantallet for vinkelen. Kan du finne (tilnærmet) hvilket radiantall som tilsvarer en vinkel på 60^{o}, og hvilket gradtall en vinkel på 1 radian tilsvarer.

Enhetssirkelen

Enhetssirkelen, dvs. en sirkel med radius = 1, er et svært viktig redskap for å forstå forholdstallene sin t, cos t og tan t for en vinkel t og senere for å forstå funksjonene y = sin t , y = cos t og y = tan t for vilkårlige vinkler t. Vi nevner at dersom en sirkel har radius lik 1, blir buelengdeformelen i eks.2.2.11 spesielt enkel, nemlig $b = t$.

Setn.2.2.15 På enhetssirkelen er lengden av en vinkelbue det samme som radian-målet til vinkelen den bestemmer.

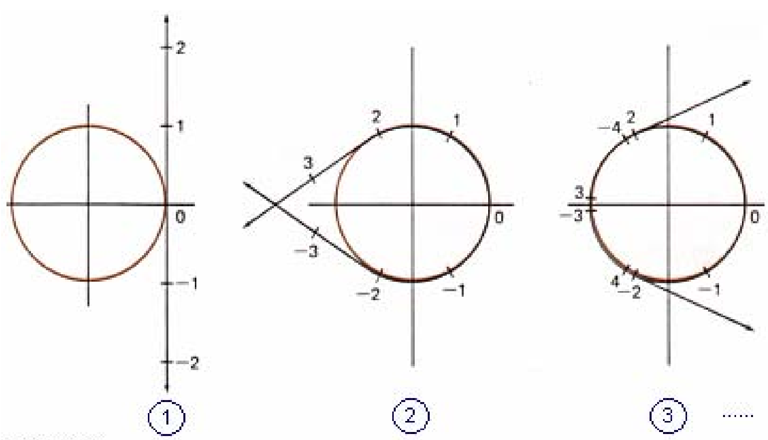


Fig.2.2.16

Hva nå hvis $t > 2\pi$ eller t er negativ ?
For å forstå dette, tenk deg et uendelig langt tau som representerer den reelle tallinjen.
Tenk deg at vi surrer tauet rundt enhetssirkelen slik som fig.2.2.14 viser.
Da vil lengden av tauet som tilsvarer en vinkel på 8π radianer være nettopp 8π. Den tau-biten rekker akkurat 4 ganger rundt enhetssirkelen mot urviseren. En taubit som tilsvarer en vinkel på -6π radianer ville surres med urviseren nøyaktig 3 ganger rundt enhetssirkelen, og lengden vil være nettopp -3π.

Oppg.2.2.17 Gjør om følgende vinkelstørrelser til radianer

a. 120^{o} b. 160^{o} c. -420^{o}

d. $\left(\frac{150}{\pi}\right)^{o}$ e. $\left(\frac{20}{\pi}\right)^{o}$

Oppg.2.2.18 Gjør om følgende vinkler til grader

a. $\frac{4\pi}{3}$ radianer b. $\frac{5\pi}{6}$ radianer c. $-\frac{2\pi}{3}$ radianer

d. $-\frac{7\pi}{3}$ radianer e. $\frac{1}{\pi}$ radianer f. $\frac{4}{3\pi}$ radianer

Oppg.2.2.19 Finn radian-målet for vinkelen med toppunkt i sentrum av en sirkel med radius 6 cm som kutter en vinkelbue på 12 cm.

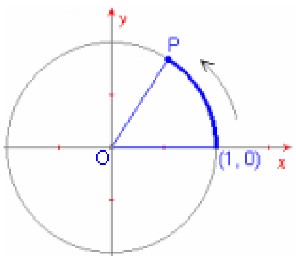
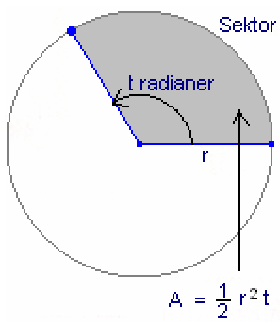


Fig.2.2. 21

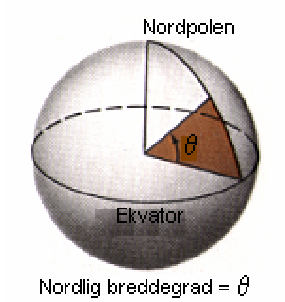
Eks.2.2.20 Tenk deg at punktet P beveger seg på enhetssirkelen mot urviseren fra punktet (1,0) på x-aksen. I hvilken kvadrant er P når det har beveget seg 4 enheter. Eller 40 enheter ?

Distansen P beveger seg er lik radianmålet som OP beveger seg fra utgangsstillingen. En avstand på 4 enheter fører til at P havner i 3. kvadrant siden $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, og siden $40 = 6 \cdot 6{,}28 + 2{,}32$ og $\frac{\pi}{2} < 2{,}32 < \pi$ så er P i 2. kvadrant etter å ha beveget seg 40 enheter langs enhetssirkelen.

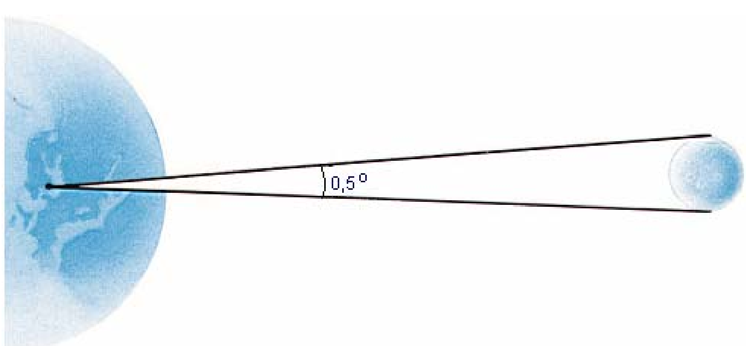


Oppg.2.2.22 Vis at arealet, A, av sirkelsektoren på fig. til venstre er gitt ved $A = \frac{1}{2}r^2t$

r er sirkelens radius, t er radian-målet til sekstorens sentralvinkel.
(HiNT : Finn ut hvor stor del av hele sirkelen sirkelsektoren utgjør.)

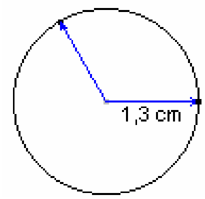


Oppg.2.2.23 I denne oppgaven antar vi at Jorda er en kule med radius r = 6370 km
Tenk deg at du bor et sted på 45^o nordlig bredde.
Regn ut hvor langt fra Nordpolen du bor.
Levanger ligger på $63{,}7^o$ nordlig bredde, mens Oslo ligger på ca. 60^o nordlig bredde.
Hvor mye lengre nord målt i km ligger Levanger enn Oslo.



Oppg.2.2.24

Fra Jorda ser vi månen under en vinkel på $0{,}5^o$. (Se fig. til venstre)
Finn avstanden mellom Jorda og månen målt km når måneradius er målt til 1675,5 km.



Oppg.2.2.25

Sekundviseren på en klokke er 1,3 cm lang. Hvor langt beveger viserspissen seg på 20 sekunder ?

2.3 Koordinater på enhetssirkelen

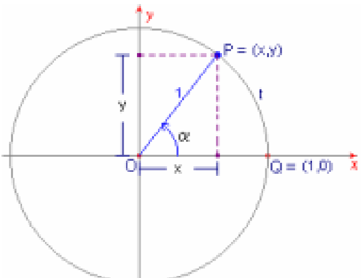


Fig.2.3.1

Vi har hittil definert $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ og $\tan\alpha$ for spisse vinkler, dvs. vinkler α slik at $0 < \alpha < 90^{o}$. I dette avsnittet skal vi gi en definisjon som er mer generell og som dermed kan brukes i en bredere skala.
Tenk deg at vi plasserer en vinkel α med toppunktet i origo i et rettvinklet koordinatsystem. (fig.2.3.1) og utgangspunktet Q = (0,1) på den positive x-aksen.
La (x,y) være skjæringspunktet, P, mellom venstre vinkelbein til vinkelen α og enhetssirkelen med sentrum i origo.

Da blir $\sin\alpha = \dfrac{y}{1} = y$ og $\cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$. Altså er $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Dette danner grunnlaget for en mer generell definisjon av $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ og $\tan\alpha$.

Def.2.3.2 La α være en vinkel med radianmål t og med toppunkt i origo og utgangsposisjon langs positiv x-akse. La P = (x,y) være skjæringspunktet mellom venstre vinkelbein til α og enhetssirkelen (plassert med sentrum i origo).
Da definerer vi $\sin\alpha = \sin t = y$ og $\cos\alpha = \cos t = x$
slik at $P = (\cos\alpha, \sin\alpha) = (\cos t, \sin t)$

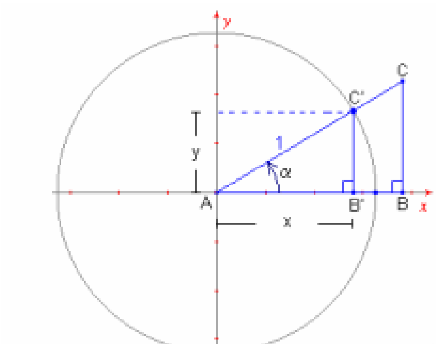


Fig.2.3.3

På bakgrunn av det setning 2.2.13 sier, kan vi i denne definisjonen la t være et hvilket som helst positivt eller negativt reelt tall, slik at $\sin\alpha$ og $\cos\alpha$ er definert for vinkler med alle mulige reelle radianmål t.

Merk deg også at på grunn av det vi viste i (*)
på side 5, er den nye definisjonen av $\sin\alpha$ og $\cos\alpha$ er konsistent med den gamle. Overbevis deg selv ved å betrakte fig.2.3.3 til venstre.

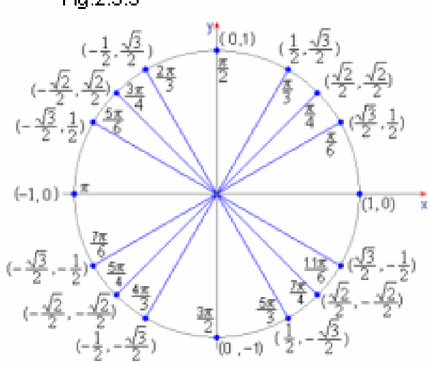


Fig.2.3.4

Vi kan nå regne ut koordinatene til punkter på enhetssirkelen svarende til vinkler med enkle radianmål. (fig.2.3.4)

Du kan tenke på denne figuren slik :
Når et punkt P = (x,y) starter på enhetssirkelen i (1,0) og vandrer mot urviseren vil koordinatene til P endre seg kontinuerlig etter som vinkelen α øker.
Det kan være en fordel om du lærer deg koordinatene til de fleste av de angitte vinkler i 1. kvadrant med tanke på arbeidet med de trigonometriske funksjonene.

Oppg.2.3.5 Se nøye på fig.2.3.4 på forrige side. Merk deg hvordan sammenhengen mellom koordinatene til for eksempel $t = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ osv. og $t = \frac{\pi}{3}$ er.
Bruk figuren til å finne andre slike sammenhenger.

Vi ser nå at så snart vi kjenner koordinatene til et punkt på enhetssirkelen, kan vi finne sinus og cosinus til den korresponderende vinkelen :

	1. kvadrant				2. kvadrant				3. kvadrant				4. kvadrant			
t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin t	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Oppg.2.3.6 Hent inn filen Enhtssirkelen.fig fra CD-en ”M2”.
Varier vinkel u og studer sammenhengen mellom P’s koordinater og sinus og cosinus til vinkelen. Diskuter og forklar med egne ord.

2.4 Dynamisk perspektiv på sin t og cos t

Vi skal nå forsøke å se *dynamisk* på hvordan sinus og cosinus til en vinkel endrer seg når vi beveger oss rundt på enhetssirkelen. Målet er altså å ende opp med en kontinuerlig funksjons-beskrivelse av både sinus til vinkelen og cosinus til vinkelen.

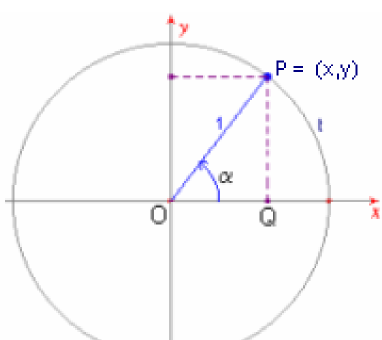


Fig.2.4.2.

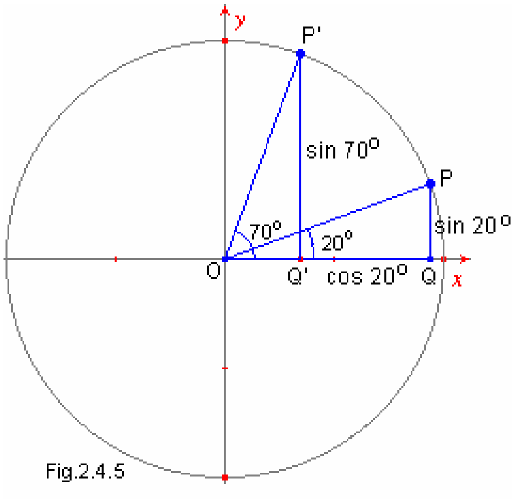
Eks.2.4.1
Når t øker fra 0, dvs. når punktet P beveger seg fra (0,1) langs periferien til enhetssirkelen mot urviseren, starter x på verdien 1 og avtar deretter kontinuerlig mot 0 (når $t = \frac{\pi}{2}$) og videre til sin laveste verdi –1 (når $t = \pi$) og øker deretter til 0 igjen (når $t = \frac{3\pi}{2}$) og videre mot 1 (når $t = 2\pi$).
Siden x = cos t, har vi derfor nettopp beskrevet hvordan cos t varierer når t varierer. På samme måte kan vi beskrive hvordan sin t varierer når t varierer.

Merk spesielt at x- og y-koordinatene hele tiden ligger mellom –1 og 1 (inklusive). Vi har altså følgende egenskaper :

Setn.2.4.3 a. $-1 \le \sin t \le 1$ og $-1 \le \cos t \le 1$.
b. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Bevis for b. : Siden P ligger på enhetssirkelen, er OP konstant lik 1. Bruker vi Pythagoras’ setning på trekant OQP, får vi at $x^2 + y^2 = 1$ eller siden $x = \cos t$ og $y = \sin t$, at $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Likheten i b. er en likhet som vil gjelde for alle reelle t.

Setn.2.4.4 $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ og $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$



Bevisantydning gjennom et eksempel :
Betrakt de to trekantene OQ'P' og OQP på fig.2.3.11. De er opplagt kongruente. Dermed er $\sin 70^o = \cos 20^o$ og $\cos 70^o = \sin 20^o$.
Eller :
$\angle u = \angle OP'Q' = 180^o - (90^o + 70^o) = 20^o$ og
$\sin u = \frac{OQ'}{OP'} = OQ'$ så $\sin u = \sin 20^o = OQ'$.
På den annen side er $\cos 70^o = \frac{OQ'}{OP'} = OQ'$.
Dermed blir $\cos 70^o = OQ' = \sin 20^o$.
Det er klart at hvert av disse to argumentene vil gjelde uansett størrelse på vinkelen QOP. For å se at argumentet vil gjelde for vilkårlige vinkelstørrelser (positive eller negative) er det nok å merke seg at $t,\ t \pm 2\pi,\ t \pm 4\pi, \ldots$ alle bestemmer samme punkt på enhetssirkelen og derfor har samme sinus og cosinus. Vi uttrykker dette ved å si at sin og cos er *periodiske funksjoner* med *periode* 2π.

Setn.2.4.6 sin og cos er periodiske funksjoner med periode 2π, dvs.
$\sin(t + 2\pi) = \sin t$ og $\cos(t + 2\pi) = \cos t$

Eks.2.4.7 Vi skal finne $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ og $\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right)$ ved hjelp av enhetssirkelen. Det punktet P på enhetsirkelen som tilsvarer vinkelen $\frac{11\pi}{6}$ har koordinater $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ slik at

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Siden $\frac{27\pi}{4} = 3 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ vil $\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \cos\left(3 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Koordinatene til punktet P på enhetssirkelen som tilsvarer vinkelen $\frac{3\pi}{4}$ er

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ slik at $\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

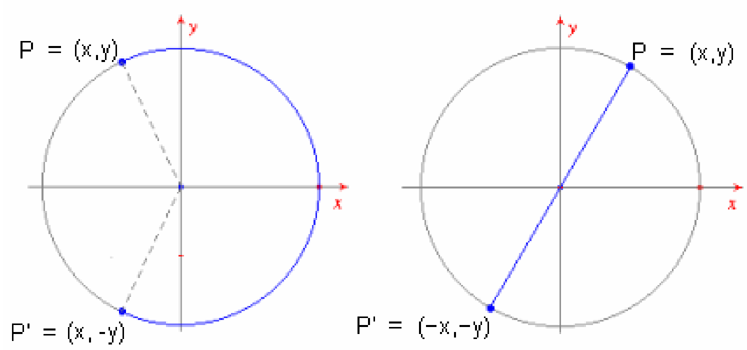
Oppg.2.4.8 Bruk enhetssirkelen og setn.2.3.12 til å finne

a. $\sin\frac{3\pi}{4}$ b. $\sin\frac{9\pi}{4}$ c. $\cos\frac{9\pi}{4}$ d. $\cos\frac{11\pi}{4}$

Oppg.2.4.9 Bruk at $\sin 1{,}87 = 0{,}95557$ og $\cos 1{,}87 = -0{,}29476$ til å finne sin(-1,87) og cos(-1,87).

Oppg.2.4.10 a. Bruk fig. til venstre på neste side til å vise at
$\sin(-t) = -\sin t$ og $\cos(-t) = \cos t$.

b. Bruk fig. til høyre på neste side til å vise at
$\sin(\pi + t) = -\sin t$ og $\cos(\pi + t) = -\cos t$ Merk deg at punktene som tilsvarer vinklene t og $\pi + t$ ligger symmetrisk om origo.

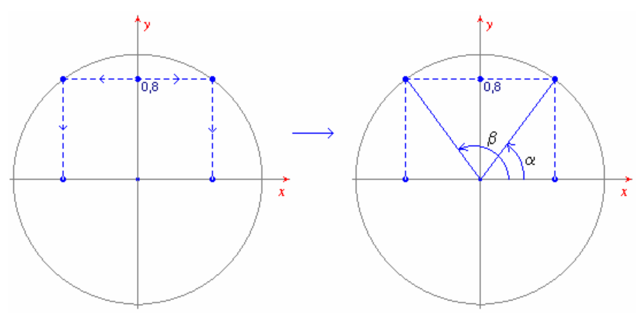


Oppg.2.4.11 Bruk enhetssirkelen til å finne tre vinkler θ (målt i grader) slik at
a. $\sin\theta = 0$ b. $\cos\theta = 0$

Oppg.2.4.12 Vis ved regning at punktet $P = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ ligger på enhetssirkelen.
La Q = (1,0) og la $\theta = \angle QOP$ (regnet i positiv omløpsretning).
Bestem $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$ og $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ og $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

Oppg.2.4.13 Bruk at punktene på enhetssirkelen som tilsvarer vinklene t og $\pi - t$ ligger symmetrisk om y-aksen (tegn) til å vise at
$\sin(\pi - t) = \sin t$ og $\cos(\pi - t) = -\cos t$.

Oppg.2.4.14 Tenk deg at du skal finne de vinkler t i 1. omløp (dvs. i $[0, 2\pi]$) som er slik at $\sin t = 0{,}8$. Da kan du gå fram slik :



Merk av A = (0.8,0) på 2.-aksen.
Trekk ei rett linje gjennom A parallell med 1.-aksen.
Der denne linja skjærer enhetssirkelen finner vi to punkter som hver bestemmer to vinkler α og β som begge har sinus lik 0,8.

Gå frem som vist ovenfor og finn de vinkler t i første omløp som oppfyller
1) $\sin t = 0{,}5$ 2) $\cos t = 0{,}5$

Oppg.2.4.15 Hent inn filen **Enhetssirkelen.fig** fra CD-en "M2".
Varier vinkelen t fra 0 radianer til 2π radianer. Studer hvordan sin t og cos t endrer seg når t øker. Hvor øker cos t og hvor minker cos t ? Hvor er cos t positiv og hvor er cos t negativ ?
Tilsvarende for sin t. Diskuter og beskriv.

2.5 Å finne verdier til de trigonometriske funksjonene

For å gjøre full bruk av de trigonometriske funksjonene, må vi kunne finne verdiene for andre vinkler enn de spesielle vi har sett på i de foregående avsnittene. Den enkleste måten å gjøre dette på er selvfølgelig å trykke på de rette tastene på kalkulatoren din slik som vi har skissert i eks. 2.4.1 og eks. 2.4.2. Det eneste du da må huske på er at kalkulatoren skal vise rett vinkelmodus, grader eller radianer avhengig av hva vi ønsker å regne med. Vi mener likevel at du, for å kunne ha en god forståelse av de trigonometriske funksjonene bør kunne noe mer enn dette. Redskapet for å forstå hvordan kalkulatoren regner ut er en god forståelse av bruk av enhetssirkelen til å finne verdier slik som vi antydet i oppgave 2.4.14 ovenfor.

Oppg.2.5.1 Hent inn filen **GrafeSinCosTan.fig** fra CD-en "M2".
Slå på alle knapper under 1 og 2 og bruk 5 til å endre vinkelen. Studer sinus-verdien etter som vinkelen endres.
Slå deretter av knappen Vis sinus-grafe under 2 og slå på Vis cosinus-grafe under punkt 3. Studer cosinus-verdien etter som vinkelen endres.

Grunnvinkler og grunnverdier

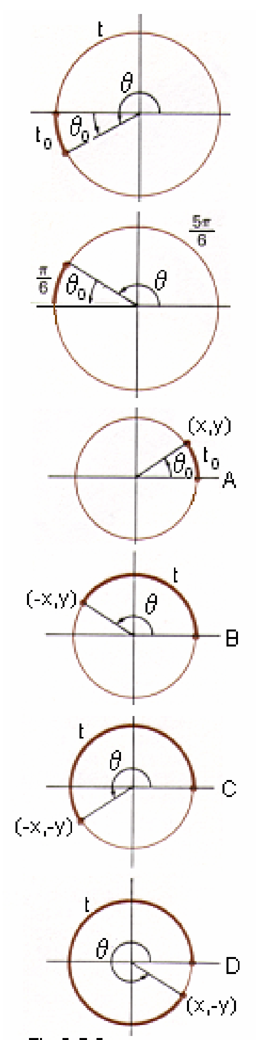


Fig.2.5.2

La θ være en vilkårlig vinkel og la t være radianmålet til θ. Til vinkelen θ hører alltid en *grunnvinkel* θ_0 som er den minste positive vinkelen mellom sluttposisjonen til θ og x-aksen. (fig.2.5.2 øverst). Radianmålet, t_0, til θ_0 kalles *grunnverdien*.

Eks.2.5.3 Grunnverdien til $t = \frac{5\pi}{6}$ er $t_0 = \frac{\pi}{6}$.
(Nest øverst i fig.2.5.2)

Når vi kjenner t_0, kan vi finne sin t, cos t osv. uansett hva t er.

Eks.2.5.4 Hver vinkel θ i figurene B, C og D har θ_0 som sin grunnvinkel og hver t har t_0 som grunnverdi.

Eks.2.5.5 Hvis vi ønsker å regne ut cos 2,16, må vi først finne grunnverdien for 2,16 :
$t_0 = \pi - 2{,}16 \approx 0{,}98$
Da er $\cos 2{,}16 = -\cos 0{,}98 = -0{,}55702$
(se oppg.2.4.14)

Eks.2.5.6 For å finne tan 24,95, observerer vi først at
$24{,}95 = 3 \cdot 6{,}28 + 6{,}11$
Grunnverdien for 6,11 er $t_0 = 6{,}28 - 6{,}11 = 0{,}17$
Derfor får vi at :
$\tan 24{,}95 = \tan 6{,}11 = -\tan 0{,}17 = -0{,}17166$
Fortegnet kommer her av at tan er negativ i 4. kvadrant.

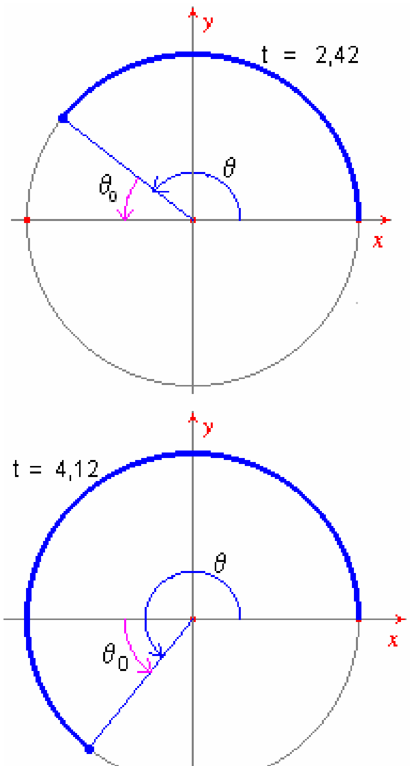


Fig.2.5.8

Eks.2.5.7

1) Vi skal finne sin 2,42 (med vinkelen målt i rad)
Grunnvinkelen blir $\theta_0 = \pi - 2{,}42 = 0{,}72159$.
Dessuten er $\sin\theta_0 = \sin\ 0{,}72159 \approx\ 0{,}6606$.
Da blir $\sin\ 2{,}42 = \sin\ 0{,}72159 \approx 0{,}6606$

2) Vi skal finne cos 4,12
Grunnvinkelen blir $\theta_0 = 4{,}12 - \pi = 0{,}9784$.
Dessuten er $\cos\theta_0 = \cos\ 0{,}97841 \approx\ 0{,}5583$.
Da blir $\cos\ 4{,}12 = -\cos\ 0{,}97841 \approx -0{,}5583$

Vi kan kontrollere resultatene i disse eksemplene ved å taste sin 2,42 og cos 4,12 direkte. Vi får :

$\sin 2{,}42 \approx 0{,}6606$
$\cos 4{,}12 \approx -0{,}5583$

Oppg.2.5.9

Finn sin 6,79 og cos – 2,00 (vinklene er målt i radianer)

Eks.2.5.10 Vi skal finne t (i første omløp) når
1) sin t = 0,90863
2) cos t = -0,95824
Løsning :
1) Taster vi SHIFT + SIN og deretter 0,90863 på kalkulatoren
(husk vinkelmodus RAD) , får vi t = 1,1400.
Dette gir oss den første vinkelen som oppfyller sin t = 0,90863.
Den andre vinkelen som oppfyller sin t = 0,90863, ligger i 2. kvadrant
siden sinus er positiv bare i 1. og 2. kvadrant.
Denne vinkelen blir $\pi - 1{,}1400 \approx 2{,}0016$
2) Taster vi SHIFT + COS og deretter -0,95824 på kalkulatoren
(husk vinkelmodus RAD) , får vi t = 2,8516.
Dette gir oss den første vinkelen som oppfyller cos t = -0,95824.
Den andre vinkelen som oppfyller sin t = 0,90863, ligger i 3. kvadrant
siden cosinus er negativ bare i 2. og 3. kvadrant.
Denne vinkelen blir $2\pi - 2{,}8516 \approx 3{,}4316$

Oppg.2.5.11 Bruk kalkulator og gå fram som i eks. 2.5.10 og finn én vinkel t når :

a. sin t = - 0,4731
b. cos t = 0,1112
c. sin t = 0,8989

Oppg.2.5.12 Finn alle løsninger i første omløp av de trigonometriske likningene nedenfor :

a.	$\sin\theta = 0{,}3633$	b.	$\cos\theta = 0{,}9907$	c.	$\cos\theta = -0{,}9085$
d.	$\sin\theta = 0{,}56464$	e.	$\sin\theta = 0{,}29628$	f.	$\cos\theta = 0{,}93233$

3. Grafer til de trigonometriske funksjonene

Når hjerteslag, hjemeaktivitet eller lyd fra et musikkinstrument overføres til visuelle bilder ved hjelp av et oscilloskop, får vi et gjentakende mønster som f.eks. i fig. Denne gjentakende egenskapen er typisk for trigonometriske funksjoner. Faktisk kan nesten alle gjentakende mønstre tilnærmes av passende kombinasjoner av trigonometriske funksjoner.

I dette avsnittet skal vi studere grafene til funksjonene sin t, cos t og tan t. Du bør bli såpass kjent med disse grafene at du kan deres sentrale karakteristika og kan skissere dem raskt når du trenger dem. Grafene vil hjelpe deg på to forskjellige måter. For det første vil du kunne gjenkjenne og huske viktige egenskaper til de trigonometriske funksjonene ved hjelp av grafene og for det andre vil de hjelpe deg til å tegne grafene til andre mer sammensatte trigonometriske funksjoner.

3.1 Grafen til y = sin t

Vi begynner med en tabell med funksjonsverdier for vinkler i intervallet $[0, 2\pi]$:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sin t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Plotter vi disse punktene i koordinatsystemet og trekker en sammenhengende kurve, får vi kurven som er vist til høyre i fig.3.1.1 nedenfor.

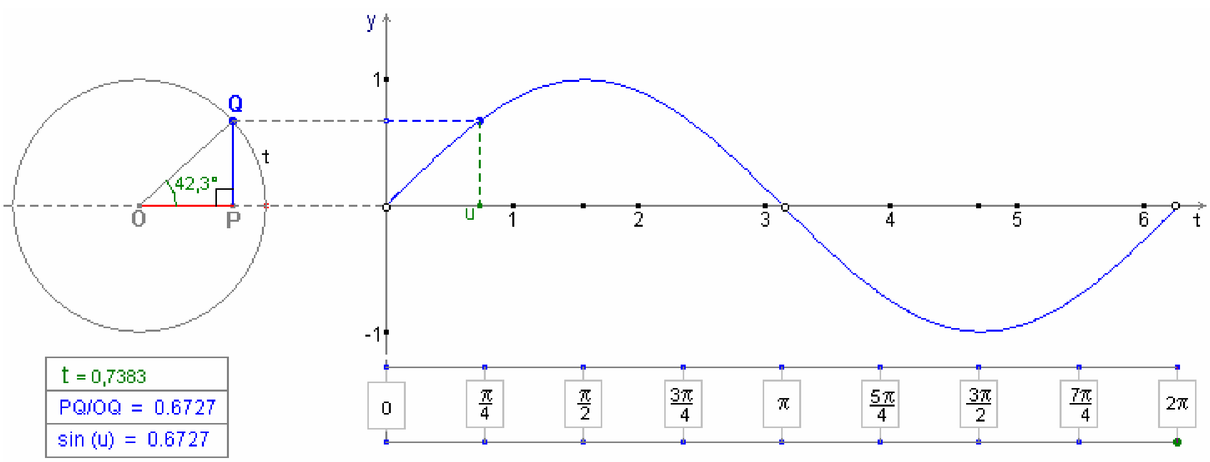


Fig.3.1.1

I fig.3.1.1 har vi også vist sammenhengen mellom t på enhetssirkelen og grafen til funksjonen y = sin t. I figuren er grafen tegnet bare i intervallet $[0, 2\pi]$, dvs. en periode. Fra denne kan vi fortsette grafen i det uendelige i begge retninger på en gjentakende måte på grunn av at $\sin(t + 2\pi) = \sin t$.

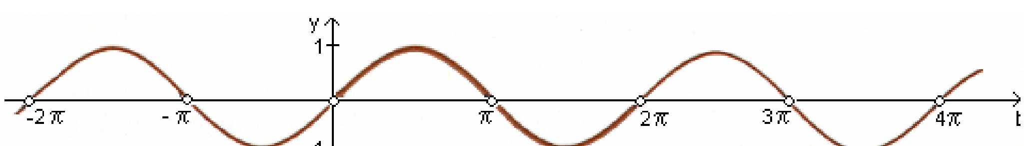


Fig.3.1.2.

Oppg.3.1.3 Bruk fig.3.1.1 og sammenlikn $\sin\frac{\pi}{4}$ med $\sin\frac{3\pi}{4}$ og $\sin\frac{5\pi}{4}$ med $\sin\frac{7\pi}{4}$ ved hjelp av grafen. Kommenter.

Oppg.3.1.4. Hent inn filen **GrafeSinCosTan.fig** fra CD-en "M2".
Slå på alle knapper under 1 og 2 og bruk 5 til å endre vinkelen. Studer sinusverdien etter som vinkelen endres. Når er sinus til vinkelen lik 0, når er den positiv og når er den negativ. Hvor har den sine topp- og bunn-punkter.

3.2 Grafen til y = cos t

Vi starter også her med en tabell :

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos t	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Sammenlikner vi med tabellen for sin t, finner vi de samme funksjonsverdiene, bare forskjøvet i t-verdi med $\frac{\pi}{2}$ mot venstre. Grafen i intervallet $[0, 2\pi]$ vil se ut slik :

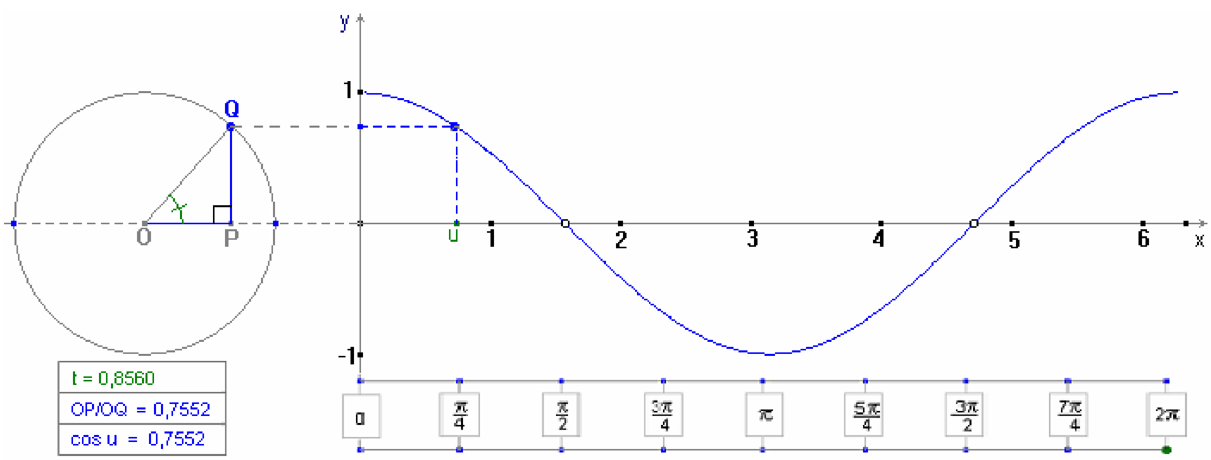


Fig.3.2.1

I figuren er igjen grafen tegnet bare i intervallet $[0, 2\pi]$, dvs. en periode. Fra denne kan vi fortsette grafen i det uendelige i begge retninger på en gjentakende måte på grunn av at $\cos(t + 2\pi) = \cos t$.

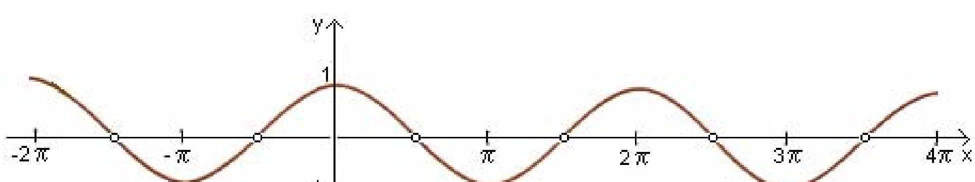


Fig.3.2.2

Grunnen til at cos t ligger forskjøvet i forhold til sin t med $\frac{\pi}{2}$ er fordi $\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

Setn.3.2.3 $\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

Bevis : $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(-t) = \cos t$. (Sjekk setn.2.4.5 og oppg.2.4.11)

Fra begge disse to grafene er det lett å se at :

Setn.3.2.4

1. Både sin t og cos t er periodiske funksjoner med periode 2π.
2. $-1 \le \sin t \le 1$ og $-1 \le \cos t \le 1$.
3. $\sin t = 0 \iff t = -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \iff t = n \cdot \pi$, $n \in Z$.

   $\cos t = 0 \iff t = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \iff t = n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in O$.
4. $\sin t > 0$ i 1. og 2. kvadrant.

   $\cos t > 0$ i 1. og 4. kvadrant.
5. $\sin(-t) = -\sin t$ og $\cos(-t) = \cos t$

   sin er symmetrisk om origo.
   cos er symmetrisk om y-aksen.

Vi skal til slutt i dette avsnittet se nærmere på grafen til y = tan t.

Oppg.3.2.5. Hent inn filen **GrafeSinCosTan.fig** fra CD-en ”M2”.
Slå på alle knapper under 1 og alle unntatt Vis sinus-grafe under 2 og slå på Vis cosinus-grafe under punkt 3.
Studer cosinus-verdien etter som vinkelen endres. Når er cosinus til vinkelen lik 0, når er den positiv og når er den negativ. Hvor har den sine topp- og bunn-punkter.

3.3 Grafen til y = tan t

Tabell og grafe for tan t vil se slik ut i intervallet $[0, 2\pi]$:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tan t	0	1	$\sqrt{3}$	udef.	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	udef.	-1	0

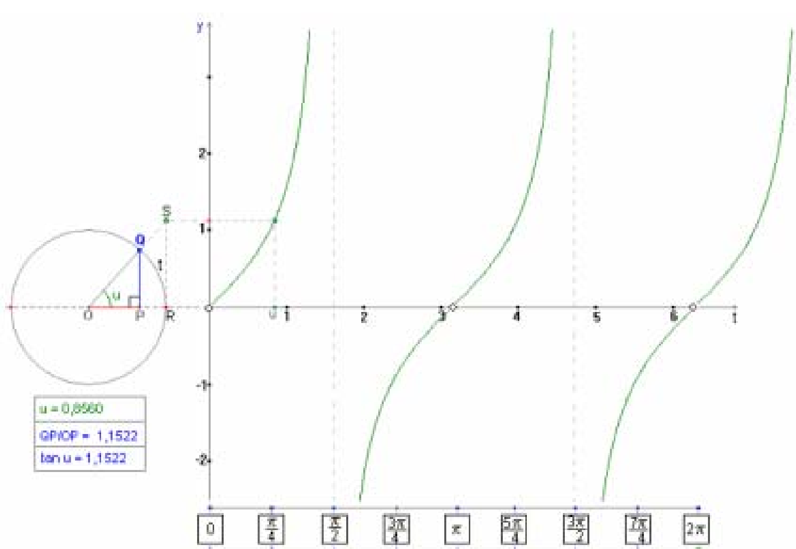


Fig.3.3.1

Først observerer vi at det finnes en viktig sammenheng mellom tan u og sin u og cos u for alle vinkler u :

Setn.3.3.2 $\tan u = \dfrac{\sin u}{\cos u}$

Bevis : Betrakt fig. 3.3.1 til venstre.

Vi ser at

$$\tan u = \frac{PQ}{OP} = \frac{\frac{PQ}{OQ}}{\frac{OP}{OQ}} = \frac{\sin u}{\cos u}.$$

Vi ser av dette at når $u = \frac{\pi}{2}$ blir cos u = 0, slik at tan u blir udefinert når $u = \frac{\pi}{2}$. Det samme skjer for alle odde multipla av $\frac{\pi}{2}$. Dette betyr at grafen har vertikale asymptoter for $t = -\frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{2}$, ... osv.

Betrakt igjen enhetssirkelen til venstre i fig.3.3.1. Det viser seg at tan u = RS for hver u !
For å vise dette, observerer vi at trekant ORS er formlik med trekant OPQ. Dette gir oss at :
$\frac{RS}{OR} = \frac{PQ}{OP}$. Dette gir oss at : $\tan u = \frac{PQ}{OP} = \frac{RS}{OR} = \frac{RS}{1} = RS$.

Vi ser også at når $u \to \frac{\pi}{2}$ vil $RS \to \infty$ .Det samme skjer når u nærmer seg $\frac{3\pi}{2}$ osv.

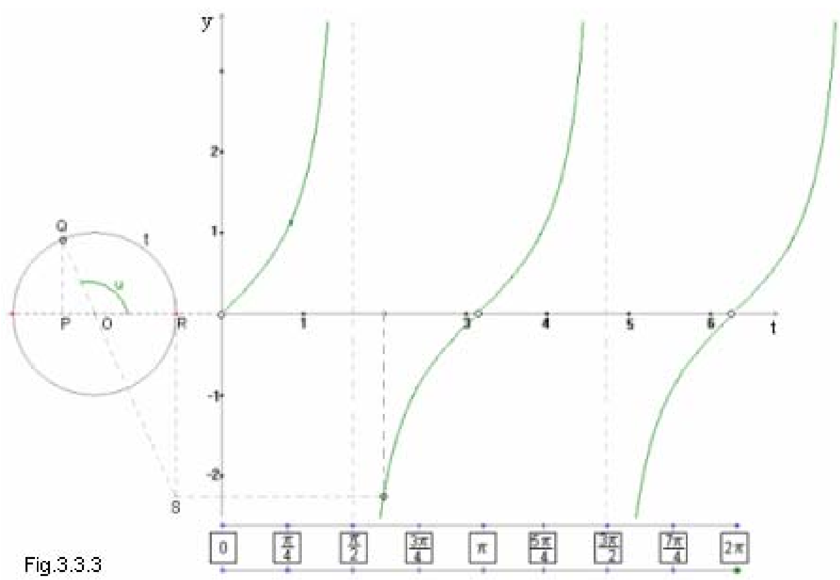


Fig.3.3.3

Vi ser også at dersom $u > \frac{\pi}{2}$ (fig.3.3.3) vil vi, siden trekant ORS er formlik med trekant OPQ, ha at $\tan u = \frac{PQ}{OP} = \frac{RS}{OR} = \frac{RS}{1} = RS$ som før, men her går RS motsatt veg slik at tan u bli negativ. Som vi ser stemmer dette med grafen til høyre. Bruk selv figuren til å finne ut hva som skjer når u passerer henholdsvis π, $\frac{3\pi}{2}$ og 2π og kontroller mot grafen til høyre.

Vi ser av grafen at tan t er periodisk med periode π. Dessuten ser vi at tan t i motsetning til sin t og cos t har en ubegrenset verdimengde $V_{tan} = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle = R$.

Oppg.3.3.4. Hent inn filen **GrafeSinCosTan.fig** fra CD-en "M2".
Slå på alle knapper under 1 og alle unntatt Vis sinus-grafe under 2 og alle unntatt Vis cosinus-grafe under punkt 3. Slå så på alle knapper under 4, og varier vinkelen. Studer verdien til y = tan t etter som vinkelen endres. Når er tangens til vinkelen lik 0, når er den positiv og når er den negativ. Har den topp- og bunn-punkter ?

3.4 Definisjonsmengder og verdimengder for sin t, cos t og tan t

Vi har allerede nevnt at vi kan velge hvilken som helst vinkelstørrelse t og både sin t og cos t vil finnes. For tan t stiller seg saken imidlertid noe annerledes i og med at tan t ikke er definert når t er et oddetalls multiplum av $\frac{\pi}{2}$. På bakgrunn av dette får vi at

$$D_{\sin} = R\,,\ D_{\cos} = R \text{ og } D_{\tan} = R \setminus \left\{\ldots,-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots\right\}$$

Når det gjelder verdimengdene, vet vi at både sin t og cos t vil ligge mellom eller være identisk lik 1 eller –1, mens tan t kan innta alle reelle verdier. Dermed får vi at $V_{\sin} = [-1,1]$, $V_{\cos} = [-1,1]$ og $V_{\tan} = R$. Vi oppsummerer :

Setn.3.4.1

$$\begin{array}{llll} D_{\sin} = R & \text{og} & V_{\sin} = [-1,1] \\ D_{\cos} = R & \text{og} & V_{\cos} = [-1,1] \\ D_{\tan} = R \setminus \left\{\ldots,-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots\right\} & \text{og} & V_{\tan} = R \end{array}$$

3.5 Sammensetninger av de trigonometriske funksjonene

Eks.3.5.1 Vi skal tegne grafene til følgende sinus-relaterte funksjoner i intervallet $[-2\pi, 4\pi]$ **:**

1) $y = 2\sin t$ 2) $y = \sin 2t$ 3) $y = 3\sin 4t$

1) Grafen til $y = 2\sin t$:

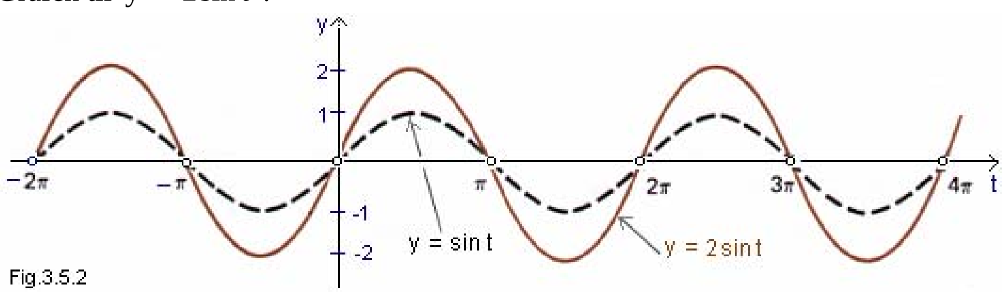


Fig.3.5.2

Vi ser at grafen til $y = 2\sin t$ svinger mellom –2 og 2, har de samme nullpunkter som y = sin t og har samme periode som y = sin t, nemlig 2π.

2) Grafen til $y = \sin 2t$:

t	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2t$	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2t$	0	1	0	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	−1	0

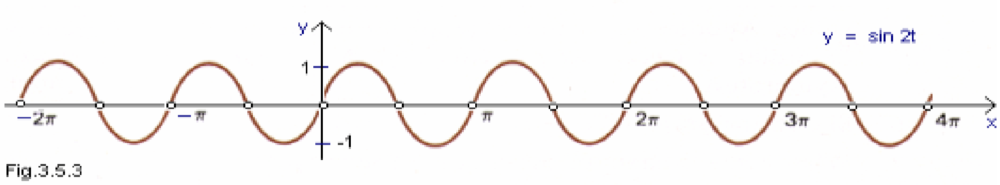


Fig.3.5.3

Vi ser at sin 2t har en periode på π som for sin t. Dette antyder at

Setn.3.5.4 Perioden til $y = \sin Bt$ er $\dfrac{2\pi}{B}$

3) Grafen til $y = 3 \cdot \sin 4t$:

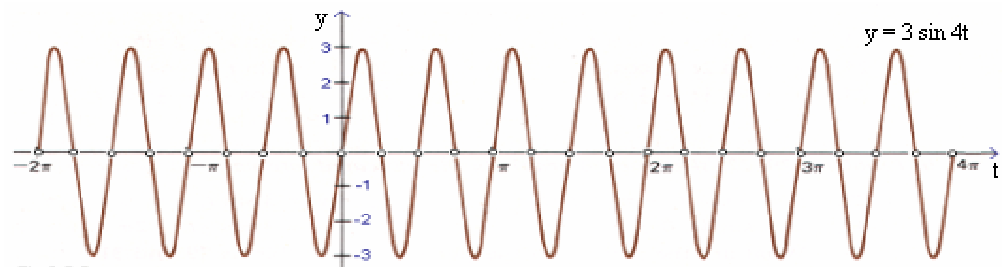


Fig.3.5.5

Her ser vi at utslaget på svingningene er 3, og perioden er $\dfrac{\pi}{2}$ (fordi $\dfrac{2\pi}{B} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$).

Oppg.3.5.6 Skisser grafene til funksjonene i de oppgitte intervallene :

a. $y = 3 \cdot \cos t$ når $-\pi \le t \le \pi$ b. $y = -\sin t$ når $-\pi \le t \le \pi$

c. $y = \cos 4t$ når $-\pi \le t \le \pi$ d. $y = 2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{2}t\right)$ når $-2\pi \le t \le 2\pi$

e. $y = 2 \cdot \cos 3t$ når $-\pi \le t \le \pi$

f. $y = \dfrac{1}{2} \cdot \cos t$ når $-\pi \le t \le \pi$ g. $y = 3\sin\dfrac{1}{3}t$ når $-3\pi \le t \le 3\pi$

3.6 Grafer til summer av trigonometriske funksjoner

Eks.3.6.1 Vi skal skissere grafen til funksjonen y = 2 sin t + cos 2t.+
For sammenlikningens skyld tegner vi grafen til y = 2 sin t og til y = cos 2t i samme koordinatsystem som for y = 2 sin t + cos 2t.

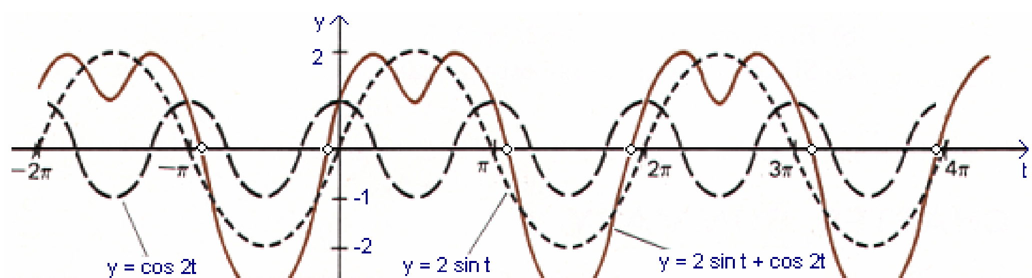


Fig.3.6.2

Her kan vi tenke slik når vi skal tegne grafen til y = 2 sin t + cos 2t :
For hver verdi av t regner vi ut funksjons-verdien til y = 2 sin t og til y = cos 2t og adderer dem for å få y-verdien til y = 2 sin t + cos 2t. Grafen til y = 2 sin t + cos 2t har periode på 2π.

Oppg.3.6.3 Velg et punkt på t-aksen på fig. (dvs. velg en verdi for vinkelen t). Kontroller ved å tegne en loddrette linje på t-aksen i punktet t og måle at "addisjonsprinsippet" stemmer på figuren.

Oppg.3.6.4 Hent inn filen **GrafeSumSinCos.fig** fra CD-en "M2". Slå på både grafen til y = sin t, til y = cos t og til y = sin t + cos t. Finn sammenheng mellom funksjonsverdiene til y = sin t og y = cos t i forhold til funksjonsverdien til y = sin t + cos t. Diskuter og forklar med egne ord.

Oppg.3.6.5 Skisser grafen til følgende funksjoner i intervallet $\left[-2\pi, 2\pi\right]$:

a. $y = 2 \cdot \sin t + \cos t$ b. $y = \sin 2t + \cos t$

c. $y = \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin t$ d. $y = \sin t + 2\cos t$

e. $y = \sin t + \cos 2t$ f. $y = \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}\cos t$

Oppg.3.6.6 Skisser grafen til hver av funksjonene i det angitte intervallet :

a. $y = -\cos t$ når $-\pi \le t \le \pi$ b. $y = 4 \cdot \sin t$ når $-\pi \le t \le \pi$

c. $y = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$ når $-2\pi \le t \le 2\pi$

Oppg.3.6.7 Finn periodene og maksimalutslagene for hver av funksjonene i oppgave 3.6.6.

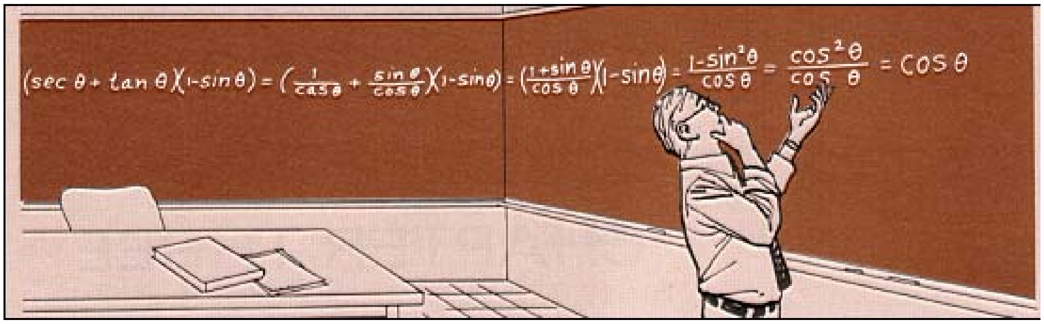
Oppg.3.6.8 Skisser grafen til funksjonen $y = \cos 3t + 2\sin t$ for $-\pi \le t \le \pi$. Bruk metoden med å addere funksjonsverdier for hver av delfunksjonene.

Oppg.3.6.9 Skisser grafen til funksjonen $y = t + \sin t$ for $-4\pi \le t \le 4\pi$. Bruk metoden med å addere funksjonsverdier for hver av delfunksjonene.

Oppg.3.6.10 Skisser grafen til funksjonen $y = t - \cos t$ for $0 \le t \le 6$. Regn ut funksjonsverdiene for t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, … , 6 og plott funksjonsgrafen.

Oppg.3.6.11 Finn tilnærmede løsninger av likningen $t = 3\sin t$ i intervallet $\left[0, 2\pi\right]$ ved å tegne grafene til y = t og y = 3 sin t i samme koordinatsystem.

4. Trigonometriske identiteter og likninger



4.1. Fundamentale trigonometriske identiteter

Vi lister opp noen fundamentale trigonometriske likheter. Vi nevner også at det er vanlig å definere tre andre trigonometriske funksjoner (7. – 9.) i tillegg til de tre vi har arbeidet med i dette heftet (vi skal ikke vektlegge studiet av disse i denne framstillingen) :

1. $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$
2. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$
5. $\sin(-t) = -\sin t$
6. $\cos(-t) = \cos t$
7. $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{1}{\tan t}$ (cotangens)
8. $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$
9. $\csc t = \dfrac{1}{\sin t}$

4.2. Flere trigonometriske identiteter

I dette avsnittet ber vi leseren være oppmerksom på at det forekommer en del utledninger som krever sikkerhet i algebraisk omforming av uttrykk. Dersom leseren føler seg usikker underveis bør man gå tilbake til den delen av kurset der grunnlagselementene i algebra ble behandlet.

Eks.4.2.1

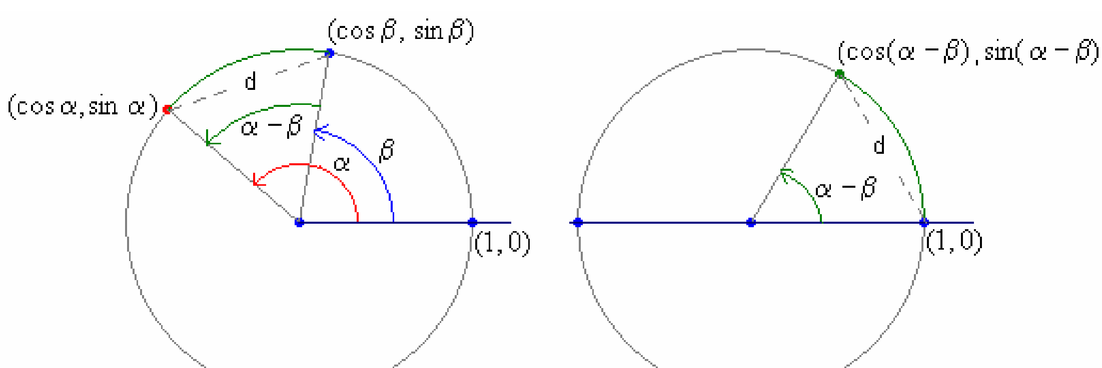


Fig.4.2.2

I fig.4.2.2 på forrige side er kordene i de to enhetssirklene like lange. Fra før kjenner du kanskje formelen for avstanden, d, mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i planet : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ eller $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Bruker vi denne formelen for å finne lengden, d, av korden mellom de to punktene på enhetssirkelen til høyre på fig. 4.2.2, får vi :

$$d^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta))^2 \qquad = \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta)$$
$$= \left[\cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)\right] - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 = 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

Bruker vi samme formel på enhetssirkelen til venstre på fig. 4.2.2, får vi :

$$d^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$
$$= \left[\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right] - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \left[\sin^2\alpha + \sin^2\beta\right] = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + 1$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

Siden kordelengdene er de samme, får vi :

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \quad \text{eller} \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Denne utledningen er basert på en figur der vinklene α og β begge er valgt å være positive vinkler. Små modifikasjoner i denne utledningen vil kunne gi oss samme resultat for vilkårlige vinkler og dermed for vilkårlige radian-mål s og t.

Setn.4.2.3 a. $\cos(s-t) = \cos s \cdot \cos t + \sin s \cdot \sin t$
b. $\cos(s+t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t$

Bevis for b. : Identiteten i b. følger fra identiteten i a. ved å erstatte t med –t og bruke fundamental identitetene $\cos(-t) = \cos t$ og $\sin(-t) = -\sin t$.
Gjør utledningen selv i oppgave 4.2.5.

Setn.4.2.4 a. $\sin(s+t) = \sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t$
b. $\sin(s-t) = \sin s \cdot \cos t - \cos s \cdot \sin t$

Bevis : a. Siden $\sin u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ får vi også at

$$\sin(s+t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s+t)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - t\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \cdot \cos t + \sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \cdot \sin t$$
$$= \left[\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos s + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin s\right] \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t$$
$$= (0 + \sin s) \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t$$
$$= \sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t$$

b. Erstatter vi t med –t i a., får vi resultatet i b. Vis dette selv i oppg.4.2.5.

Oppg.4.2.5 a. Skriv utledningen i beviset for resultatet i setning 4.2.3.b.
b. Skriv utledningen i beviset for resultatet i setning 4.2.4.b.

Det finnes en del andre nyttige identiteter for trigonometriske funksjoner :

Setn.4.2.6 a. $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ og $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ og
$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$
b. $\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$

Bevis : a. Fra setn.4.2.3.b får vi :
$\cos(t+t) = \cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t$
De to andre identitetene i a. fås enkelt ved å bruke at $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
Vis dette selv i oppgave 4.2.7.
b. Fra setn.4.2.4.a får vi :
$\sin(t+t) = \sin t \cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t = 2\sin t \cdot \cos t$.

Oppg.4.2.7 Vis utledningen av de to resterende identitetene i setning 4.2.6.a.

Vi avslutter denne delen med en identitet for tangens til en sum av to vinkler :

Setn.4.2.8 $\tan(s+t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \cdot \tan t}$

Bevis :

$$\tan(s+t) = \frac{\sin(s+t)}{\cos(s+t)} = \frac{\sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t}{\cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t} = \frac{\dfrac{\sin s \cdot \cos t}{\cos s \cdot \cos t} + \dfrac{\cos s \cdot \sin t}{\cos s \cdot \cos t}}{\dfrac{\cos s \cdot \cos t}{\cos s \cdot \cos t} - \dfrac{\sin s \cdot \sin t}{\cos s \cdot \cos t}}$$
$$= \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \cdot \tan t}$$

Oppg.4.2.9 a. Bruk setning 4.2.4.a og setning 4.2.6.b til å vise at $\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$.
b. Bruk setning 4.2.3.b og setning 4.2.6.a til å vise at $\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$.

Oppg.4.2.10 Finn en eksakt verdi av hvert av uttrykkene :

a. 1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)$ 2) $\sin\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{6}$

b. 1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)$ 2) $\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{6}$

c. 1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$ 2) $\sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{6}$

d. 1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$ 2) $\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{6}$

Oppg.4.2.11 Skriv hvert av uttrykkene nedenfor som et enkelt sinus-uttrykk eller cosinus-uttrykk :

a. $\cos\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{3}{2} - \sin\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{3}{2}$

b. $\cos 2\cos 3 - \sin 2\sin 3$

c. $\sin\dfrac{7\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8} + \cos\dfrac{7\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$

d. $\cos 33^o \cos 27^o - \sin 33^o \sin 27^o$

Oppg.4.2.12 Bruk identitetene vi har vist i dette avsnittet til å vise at flg. identiteter også gjelder :

a. $\sin(t+\pi) = -\sin t$ b. $\cos(t+\pi) = -\cos t$

c. $\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$ d. $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = \sin t$

Oppg.4.2.13 La i denne oppgaven α og β være vinkler i 1. kvadrant og anta at $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ og $\cos\beta = \frac{5}{13}$. Regn ut hvert av uttrykkene :

a. $\cos\alpha$ b. $\sin\beta$

c. $\sin(\alpha+\beta)$ d. $\cos(\alpha+\beta)$

e. $\sin(\alpha-\beta)$ f. $\cos(\alpha-\beta)$

g. $\tan(\alpha+\beta)$ h. $\tan(\alpha-\beta)$

Oppg.4.2.14 Bruk identiteter etablert i dette avsnittet til å skrive hvert av uttrykkene som ett enkelt uttrykk :

a. $2\sin 32^{o}\cos 32^{o}$ b. $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

c. $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$ d. $1-2\sin^2 41^{o}$

Oppg.4.2.15 Regn ut følgende uttrykk når $\sin t = \frac{3}{5}$ og $\frac{\pi}{2} < t < \pi$:

a. $\cos t$ b. $\sin 2t$

c. $\cos 2t$ d. $\tan 2t$

Oppg.4.2.16 Bruk setning 4.2.8 til å vise følgende identiteter :

a. $\tan(s-t) = \dfrac{\tan s - \tan t}{1+\tan s\cdot\tan t}$ b. $\tan(s+\pi) = \tan s$

c. Diskuter og forklar med egne ord hva likheten i b. uttrykker. Tegn gjerne figur til å illustrere tankegangen din eller bruk fig.3.3.1.

Oppg.4.2.17 Bruk addisjons- og subtraksjonsformlene som ble vist i setning 4.2.3 og i setning 4.2.4 til å regne ut flg. uten bruk av kalkulator :

a. $\cos 75^{o}$ (HiNT : $75^{o} = 45^{o} + 30^{o}$) b. $\sin 105^{o}$

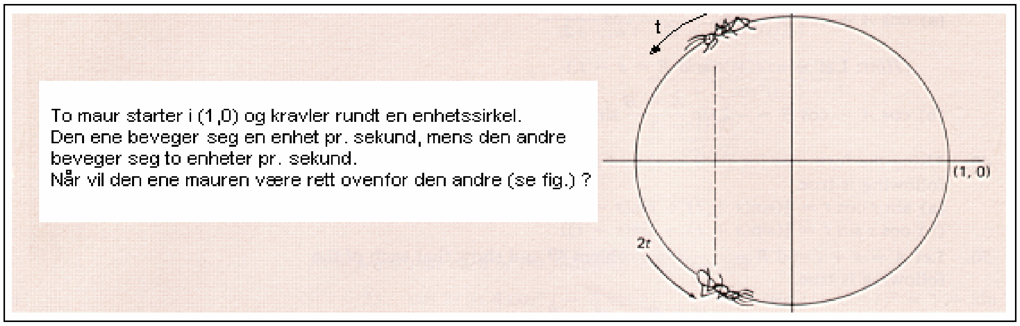
c. $\sin 15^{o}$ (HiNT : $15^{o} = 45^{o} - 30^{o}$)

Oppg.4.2.18 I denne oppgaven skal vi behandle et uttrykk vi får bruk for når vi skal finne den deriverte til sin t og cos t. Uttrykk hvert av uttrykkene nedenfor som en sum av to produkter :

a. $\sin(x+h)-\sin x$

b. $\cos(x+h)-\cos x$

5. Trigonometriske likninger



Hva har maurproblemet med trigonometriske likninger å gjøre ? Vel, leseren er sikkert enig i at etter t sekunder er den seine mauren som da har beveget seg t enheter langs enhetssirkelen, i punktet $(\cos t, \sin t)$. Den raske muren er derimot i punktet $(\cos 2t, \sin 2t)$. Videre vil den ene mauren være rett ovenfor den andre dersom deres 1. koordinater er identiske, dvs. dersom $\cos 2t = \cos t$. Vi må altså finne den første verdi $t > 0$ slik at likningen $\cos 2t = \cos t$ holder. Vi skal løse denne likningen senere i dette avsnittet, men starter med å løse noen enklere trigonometriske likninger.

5.1 Trigonometriske grunnlikninger

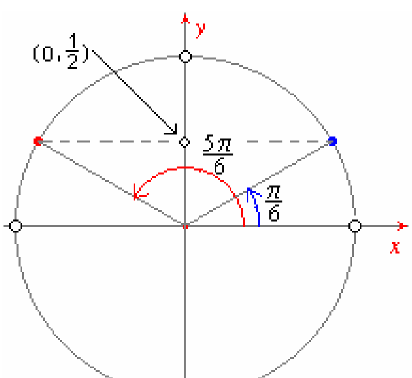


Fig.5.1.2

Eks.5.1.1 Vi skal løse likningen $\sin t = \dfrac{1}{2}$.

Vi har tidligere vist at $t = \dfrac{\pi}{6}$ er en løsning av likningen, og på grunn av resultatet i oppgave 2.4.14 er $t = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ også en løsning av denne likningen i første omløp, men det er ikke de eneste.

Vi ser at $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6} + 4\pi = \dfrac{25\pi}{6}$, ... og

$\dfrac{\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{11\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6} - 4\pi = -\dfrac{23\pi}{6}$, ... og

$\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{17\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6} + 4\pi = \dfrac{29\pi}{6}$, ... og $\dfrac{5\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6} - 4\pi = -\dfrac{19\pi}{6}$, ... alle er løsninger i tillegg til de to løsningene i første omløp. For å finne alle løsningene, har vi brukt at sinusfunksjonen er periodisk med periode 2π. Vi kan samle dette i én skrivemåte :

$\sin t = \dfrac{1}{2}$ har løsningene $t = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$ og $t = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$

der skrivemåten $k \in Z$ betyr at k kan anta alle positive og negative heltallsverdier.

Generelt har vi at løsningen til grunnlikningen $\sin t = a$ når $0 \le t \le 2\pi$ kan finnes ved å :

1. Tegne linja y = a og merke av skjæringspunktene P og P' med enhetssirkelen.
2. Punktene P og P' bestemmer to vinkler α og $\pi - \alpha$ som er løsninger av likningen i første omløp.
3. De andre løsningene finnes ved å legge til eller subtrahere et vilkårlig positivt eller negativt heltallsmultiplum av 2π til disse to vinklene.

Oppg.5.1.3 Hent inn filen **Grunnliknsin.fig** fra CD-en ”M2”. Velg sinus-verdi og vis og studer løsningene i første omløp.Vis også grafen til y = sint t og finn ut hvordan løsningene endrer seg når du endrer sinus-verdi. Diskuter og forklar med egne ord det du finner ut**.**

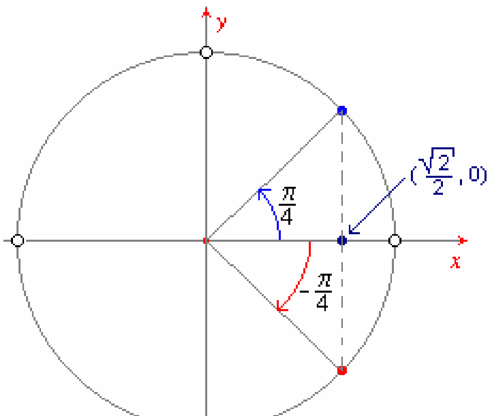


Fig.5.1.5

Eks.5.1.4 Vi skal løse likningen $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vi har tidligere vist at $t = \frac{\pi}{4}$ er en løsning av denne likningen. Betrakt så fig.5.1.4. Her ser vi at vinkelen $-\frac{\pi}{4}$ også vil være en løsning av likningen. Krever vi at begge disse utgangsløsningene skal ligge i første positive omløp, vil vinkelen $-\frac{\pi}{4}$ tilsvare vinkelen $-\frac{\pi}{4}+2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Siden cosinusfunksjonen er periodisk med periode 2π, vil alle tillegg av heltallsmultipla av 2π til disse løsningene være løsninger av likningen $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi kan samle dette i én skrivemåte :

$\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ har løsningene $t = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$ og $t = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$

der skrivemåten $k \in Z$ betyr at k kan anta alle positive og negative heltallsverdier.

Generelt har vi at løsningen til grunnlikningen $\cos t = b$ når $0 \le t \le 2\pi$ kan finnes ved å :

1. Tegne linja x = b og merke av skjæringspunktene P og P’ med enhetssirkelen.
2. Punktene P og P’ bestemmer to vinkler α og $2\pi - \alpha$ som er løsninger av likningen i første omløp.
3. De andre løsningene finnes ved å legge til eller subtrahere et vilkårlig positivt eller negativt heltallsmultiplum av 2π til disse to vinklene.

Oppg.5.1.6 Hent inn filen **Grunnlikncos.fig** fra CD-en ”M2”. Velg cosinus-verdi og vis og studer løsningene i første omløp.Vis også grafen til y = cost t og finn ut hvordan løsningene endrer seg når du endrer cosinus-verdi. Diskuter og forklar med egne ord det du finner ut.

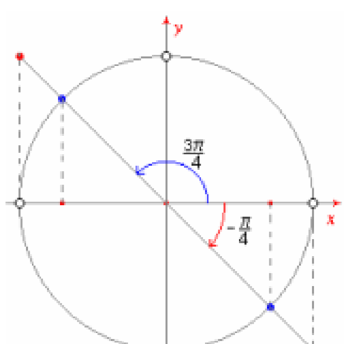


Fig.5.1.8.

Eks.5.1.7 Vi skal løse likningen $\tan t = -1$.

Vi ser av fig.5.1.8 at $t = \frac{3\pi}{4}$ er en løsning i første positive omløp. Dessuten er $t = -\frac{\pi}{4}$ i 4. kvadrant en løsning. Krever vi at begge disse løsningene skal ligge i første positive omløp, vil den siste løsningen tilsvare $t = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

Nå husker vi fra avsnitt 3.3 at tangensfunksjonen er periodisk med periode π. Dermed blir alle heltallstillegg av π til disse to løsningene også løsninger av likningen $\tan t = -1$.
Vi kan samle dette i én skrivemåte :
$\tan t = -1$ har løsningene $t = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$ og $t = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$ der skrivemåten $k \in Z$ betyr at k kan anta alle positive og negative heltallsverdier.

Oppg.5.1.9 Løs likningene nedenfor når $0 \le t \le 2\pi$. Du kan bruke kalkulator i c. og f. (Se eks.1.4.2)

a. $\sin t = \frac{1}{2}$ b. $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c. $\sin t = 0{,}8$

d. $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e. $\cos t = \frac{1}{2}$ f. $\cos t = 0{,}2$

Oppg.5.1.10 Finn den generelle løsningen til likningene nedenfor. Du kan bruke kalkulator i c.

a. $\tan t = 1$ b. $\tan t = -\sqrt{3}$ c. $\tan t = 0{,}5$

5.2 Flere trigonometriske likninger

Eks.5.2.1 Vi skal løse likningen $\cos t \cdot \tan t = -\cos t$.
Først observerer vi at likningen kan skrives som et produkt :
$\cos t \cdot \tan t = -\cos t \iff \cos t \cdot \tan t - \cos t = 0 \iff \cos t \cdot (\tan t - 1) = 0$
Dernest observerer vi at $A \cdot B = 0 \iff A = 0$ eller $B = 0$ eller begge $= 0$.
Dette gir oss at : $\cos t \cdot (\tan t - 1) = 0 \iff \cos t = 0$ eller $\tan t - 1 = 0$.
Med en omforming av tangenslikningen ender vi derfor opp med en grunnlikning i cosinus og en grunnlikning i tangens :
$\cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$ eller $t = \frac{3\pi}{2} + m \cdot 2\pi$, $m \in Z$

$\tan t - 1 = 0 \iff \tan t = 1 \iff t = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, $n \in Z$ eller $t = \frac{3\pi}{2} + t \cdot 2\pi$, $t \in Z$

Holder vi oss f.eks. til løsningene i første positive omløp, får vi :
$\cos t \cdot \tan t = -\cos t \iff t = \frac{\pi}{2}$ eller $t = \frac{3\pi}{2}$ eller $t = \frac{3\pi}{4}$ eller $t = \frac{7\pi}{4}$.

Eks.5.2.2 Hvordan kan vi løse den kvadratiske likningen $\cos^2 t = \frac{3}{4}$?
Vi løser den akkurat som en vanlig kvadratisk likning. For å se dette kan vi substituere $y = \cos t$. Da har vi $\cos^2 t = \frac{3}{4} \iff y^2 = \frac{3}{4}$ og $y = \cos t$ og

$$\cos^2 t = \frac{3}{4} \iff y^2 = \frac{3}{4} \text{ og } y = \cos t \iff y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ og } y = \cos t$$

$$\iff \cos t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ eller } \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff t = \frac{\pi}{6} \text{ el. } t = \frac{11\pi}{6} \text{ eller } t = \frac{5\pi}{6} \text{ el. } t = \frac{7\pi}{6}$$

dersom vi holder oss til løsningene i første positive omløp.

Eks.5.2.3. La oss så løse den kvadratiske likningen $2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0$.
Vi substituerer $y = \sin t$ og får :

$$2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \text{ og } y = \sin t$$
$$\Leftrightarrow \left(y = -\frac{1}{2} \text{ el. } y = 1 \right) \text{ og } y = \sin t$$
$$\Leftrightarrow \sin t = -\frac{1}{2} \text{ eller } \sin t = 1$$

Holder vi oss til løsningene i første positive omløp, får vi :

$$\sin t = -\frac{1}{2} \text{ eller } \sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{6} \text{ el. } t = \frac{11\pi}{6} \text{ eller } t = \frac{\pi}{2}.$$

Eks.5.2.4 Vi skal så løse maurproblemet som vi startet avsnitt 5. med.
Problemet resulterte i likningen $\cos 2t = \cos t$.
Her kan vi bruke den siste identiteten fra setning 4.2.6.a. til å gjøre likningen om til en kvadratisk likning i cos t :

$$\cos 2t = \cos t \Leftrightarrow 2\cos^2 t - 1 = \cos t \Leftrightarrow 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \text{ og } y = \cos t$$
$$\Leftrightarrow \left(y = -\frac{1}{2} \text{ el. } y = 1 \right) \text{ og } y = \cos t$$
$$\Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \text{ eller } \cos t = 1$$

Dersom vi holder oss til første positive omløp, blir løsningene

$$t = \frac{2\pi}{3} \text{ el. } t = \frac{4\pi}{3} \text{ eller } t = 0$$

Den minste positive løsningen er dermed $t = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$.

Etter litt over 2 sekunder vil dermed den seine mauren være loddrett ovenfor den raske.
Finn selv ut hvor langt hver av maurene har beveget seg i løpet av dette tidsrommet.

Eks. 5.2.5 Vi skal nå løse en trigonometrisk likning ved å kvadrere begge sidene i likningen.

$$1 - \cos t = \sqrt{3} \cdot \sin t \Rightarrow (1 - \cos t)^2 = \left(\sqrt{3} \cdot \sin t\right)^2 \text{ i første omløp.}$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos t + \cos^2 t = 3\sin^2 t = 3 \cdot \left(1 - \cos^2 t\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos t + \cos^2 t = 3 - 3\cos^2 t$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2 t - 2\cos t - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 2y - 2 = 0 \text{ og } y = \cos t$$
$$\Leftrightarrow \left(y = -\frac{1}{2} \text{ el. } y = 1 \right) \text{ og } y = \cos t \Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \text{ eller } \cos t = 1$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3} \text{ eller } t = \frac{4\pi}{3} \text{ eller } t = 0$$

Siden vi ved å kvadrere kan ha fått med falske løsninger, er det nå viktig å sjekke alle tre løsningene for å se om de passer i likningen. Da vil vi se at $t = \frac{4\pi}{3}$ ikke passer, slik at løsningene av likningen $1 - \cos = \sqrt{3} \cdot \sin t$ er $t = \frac{2\pi}{3}$ eller $t = 0$.

Eks.5.2.6 Til slutt i dette avsnittet skal vi finne alle løsninger til likningen $\cos 4t = \frac{1}{2}$.

Her kan vi bruke substitusjonen y = 4t for å få en gjenkjennelig likning å løse. Merk hvordan vi substituerer tilbake til en likning med t som ukjent først etter at vi har funnet y-løsningene.

$$\cos 4t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{2} \text{ og } y = 4t$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \text{ , } k\in Z \text{ eller } y = \frac{5\pi}{3} + n\cdot 2\pi \text{ , } n\in Z \text{ og } y = 4t$$

$$\Leftrightarrow 4t = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi, \ k\in Z \text{ eller } 4t = \frac{5\pi}{3} + n\cdot 2\pi \text{ , } n\in Z$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{2}, \ k\in Z \text{ eller } t = \frac{5\pi}{12} + n\cdot\frac{\pi}{2} \text{ , } n\in Z$$

Holder vi oss til første positive omløp derimot, får vi løsningene

$$t = \frac{\pi}{12}, \ t = \frac{5\pi}{12}, t = \frac{7\pi}{12}, t = \frac{11\pi}{12}, t = \frac{13\pi}{12}, t = \frac{17\pi}{12}, t = \frac{19\pi}{12}, t = \frac{23\pi}{12}$$

Når vinkelargumentet er $4\cdot t$ får vi altså 8 løsninger i første omløp, mens vi får to løsninger når argumentet er t. Funksjonen y = cos 4t går altså gjennom 4 hele perioder på intervallet $0 \le t \le 2\pi$.

Oppg.5.2.7 Finn *alle* løsninger til likningene nedenfor :

a. $\sin^2 t = \frac{1}{4}$ b. $\cos^2 t = 1$ c. $\tan t = 0$

d. $\sin 2t = 0$ e. $\cos 2t = 0$ f. $\sin 4t = 1$

g. $\cos 4t = 1$ h. $\tan 2t = -1$ i. $\tan 3t = 0$

Oppg.5.2.8 Finn alle løsninger i intervallet $[0, 2\pi]$ til likningene nedenfor :

a. $\cos t - 2\cdot\cos t \sin t = 0$ b. $\sin 2t = \sin t$

c. $\sin^2 t + 2\sin t - 2 = 0$ d. $2\cos^2 t - 1 = 0$

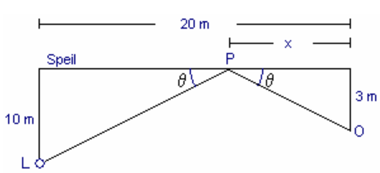
e. $2\cdot\sin t\cos t + \sqrt{3}\cdot\sin t = 0$ f. $\cos^2 t + 3\cos t - 1 = 0$

Oppg.5.2.9 Finn *alle* løsninger til likningene nedenfor :

a. $(1+\sin t)\cdot(1-\tan t) = 0$ b. $\cos 2t = 0{,}5$

Oppg.5.2.10 Bruk en kalkulator og finn alle løsningene til likningene :

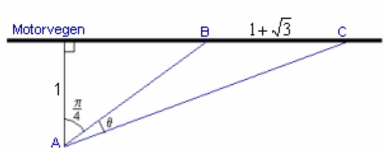
a. sin t = 0,89121 b. cos 3t = 0,87274



Oppg.5.2.11 En lysstråle fra laserlampen L (se fig.) blir reflektert i M i et speil til punktet O på ei plate.

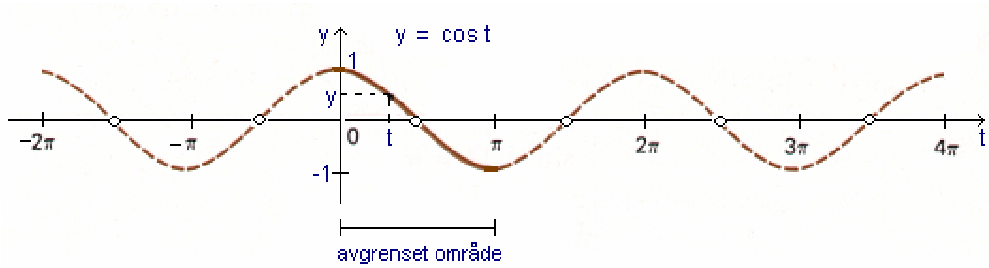
a Sett opp ei likning som gjør at du kan finne vinkelen θ.

b Løs likningen og bestem vinkelen θ.



Oppg.5.2.12 Tom og Jon har gått seg vill i skogen og er ved punktet A 1 mil fra motorvegen. Tom og Jon legger ut i hver sin retning mot motorvegen og Tom når motorvegen i punkt B og Jon i C, $1+\sqrt{3}$ mil lenger nedover vegen. Sett opp ei likning for å bestemme vinkel θ og løs den.

6. Inverse trigonometriske funksjoner



I eks.1.4.2 viste vi hvordan du ved hjelp av kalkulatoren kan finne vinkelen når du har gitt sinus-verdien, cosinusverdien eller tangensverdien til vinkelen. Dette gjorde vi ved hjelp av innebygde funksjoner på kalkulatoren, kalt $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$. Disse funksjonene er i en viss forstand *omvendte* eller *inverse* funksjoner til funksjonene sin, cos og tan.

6.1 Inverse funksjoner

Def.6.1.1 a. En funksjon f er *en-til-en* dersom $t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; f(t_1) \neq f(t_2)$

b. funksjon g er en *invers* funksjon til f (i et område) dersom g(f(t)) = t (for alle t i området).

Når g er en invers funksjon til f, skriver vi ofte g som f^{-1}.

Vi har altså at $f^{-1}(f(t)) = t$ for alle t i området.

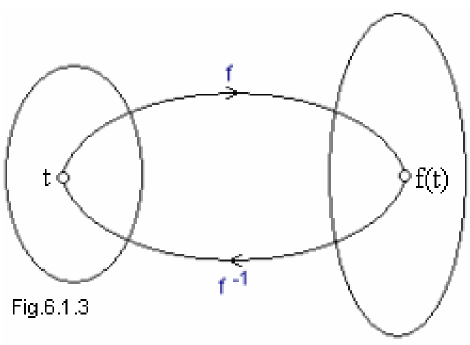


Fig.6.1.3

Setn.6.1.2 Dersom funksjonen f er en-til-en (i et område) har f en invers funksjon f^{-1} (i området).

Hver gang en funksjon f er en-til-en, vil det for hver x-verdi finnes en og bare en f(t)-verdi.
Dermed kan vi finne en funksjon som går motsatt veg, dvs. som avbilder f(t) på t :
$f^{-1}(f(t))$.

6.2 Funksjonene $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$

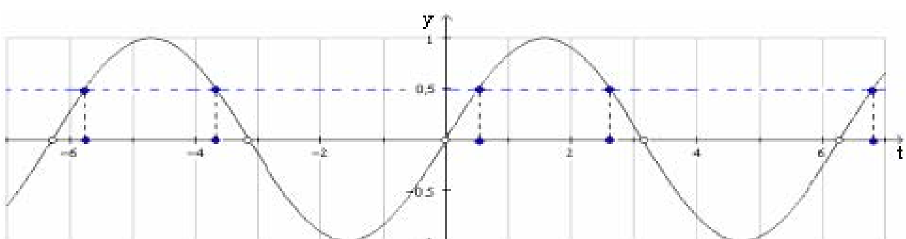


Fig.6.2.1.

Hva så med sinus-funksjonen, har den en invers-funksjon, $\sin^{-1}$?

Vel, for det første er *ikke* sinus-funksjonen en-til-en overalt i sitt definisjonsområde. Se fig. 6.2.1. Dermed må vi begrense definisjonsmengden, dersom sin skal ha en invers. Som vi ser av figuren er det mange mulige valg av intervall som gjør sin en-til-en. Det er vanlig å velge intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. I dette intervallet er sinus-funksjonen en-til-en og dermed finnes det en invers funksjon $\sin^{-1}$ på dette intervallet.

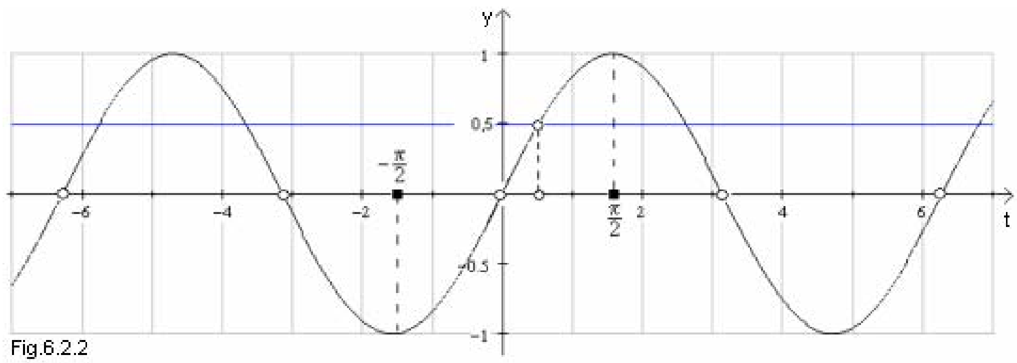


Fig.6.2.2

Her ser vi at i dette intervallet vil det til enhver y-verdi svare en og bare en t-verdi, som vi kaller $\sin^{-1} y$.

Eks.6.2.3 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$, $\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

I noen læreverk skriver en arcsin i stedet for $\sin^{-1}$.

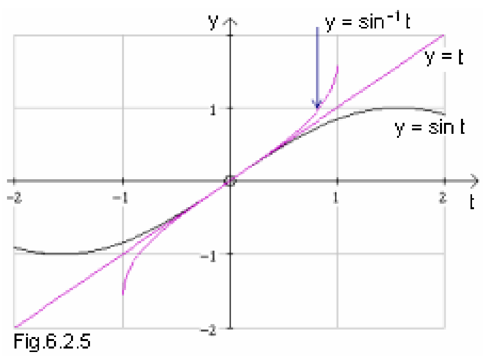


Fig.6.2.5

Def.6.2.4

$$t = \sin^{-1}(y) \Leftrightarrow y = \sin t \text{ og } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\sin^{-1}(y)\right) = y \quad \text{når} \quad -1 \le y \le 1$$

$$\sin^{-1}\left(\sin(t)\right) = t \quad \text{når} \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

Her er de to siste likhetene en direkte følge av den første.

Def.6.2.6 a. $t = \cos^{-1}(y) \Leftrightarrow y = \cos t \text{ og } 0 \le t \le \pi$

b. $t = \tan^{-1}(y) \Leftrightarrow y = \tan t \text{ og } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

Oppg.6.2.7. Hent inn filen **GrafeInvSin.fig** fra CD-en "M2". Vis grafen til y = sin t i området $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ og deretter grafen til $y = \sin^{-1} t$ i samme område.
Sammenlikn grafene og forsøk å forklare at de er symmetriske om linja y = t. Diskuter og forklar med egne ord det du finner ut.

Oppg.6.2.8 Tegn grafer og overbevis deg selv på samme måte som for sinus-funksjonene om at definisjonene i 6.2.6 er meningsfulle.

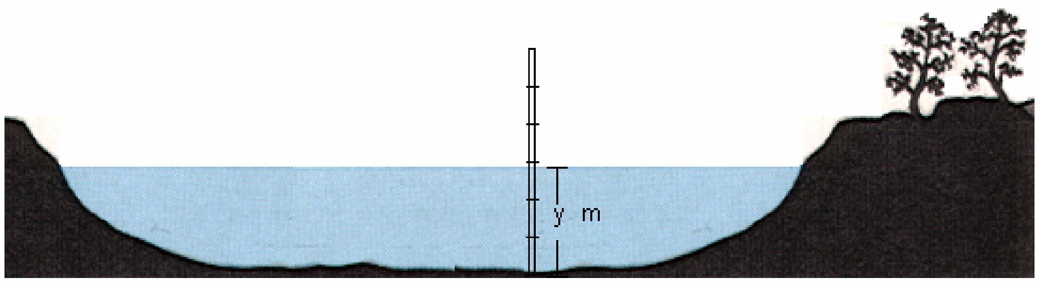
Oppg.6.2.9 Finn en eksakte verdi til hver av følgende uttrykk (uten å bruke kalkulator) :

a. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ c. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

d. $\tan^{-1}(0)$ e. $\tan^{-1}(1)$ f. $\tan^{-1}(\sqrt{3})$

Oppg.6.2.10 Bruk kalkulatoren og finn verdiene i oppgave 6.

7. Anvendelser av trigonometri



I avsnitt 3 startet vi med å fortelle at nesten alle gjentakende mønstre kan tilnærmes ved hjelp av passende kombinasjoner av trigonometriske funksjoner. Se på figuren ovenfor. Den forestiller måling av vanndybden på et fast sted på en strand. Hva er her det gjentakende mønster ?
Vi skjønner fort at vannstanden svinger mellom den laveste (ved fjære sjø) og den høyeste (ved flo sjø) og at dette gjentar seg med faste tidsintervall. Her er altså vanndybden y en funksjon av tiden som kan tilnærmes med en passende kombinasjon av trigonometriske funksjoner. I dette avsnittet skal vi se på mange sammenhenger av denne karakter og lage matematiske modeller av dem ved hjelp av trigonometriske funksjoner.
Vi skal imidlertid starte dette avsnittet med noen viktige trekantanvendelser som er nyttige for målinger av avstander og areal.

7.1 Sinus-setningen

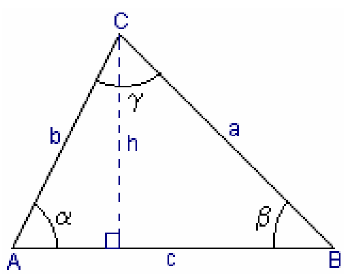


Fig.7.1.1.

I avsnitt 1.viste vi hvordan vi kan regne ut ukjente sider og vinkler i en rettvinklet trekant ved hjelp av trigonometri. Men, kan vi finne ukjente sider og vinkler i en trekant som ikke er rettvinklet ?
Et verdifullt redskap er **sinussetningen** som gjelder for alle mulige trekanter, både rettvinklede og ikke rettvinklede.

Setn.7.1.2 Sinussetningen

Betrakt en trekant ABC med alle vinklene spisse. Da gjelder at

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \text{eller ekvivalent uttrykt} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Bevis : Vi ser av figuren at : $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ eller $h = b\cdot\sin\alpha$.

På samme måte får vi at : $\sin\beta = \frac{h}{a}$ eller $h = a\cdot\sin\beta$

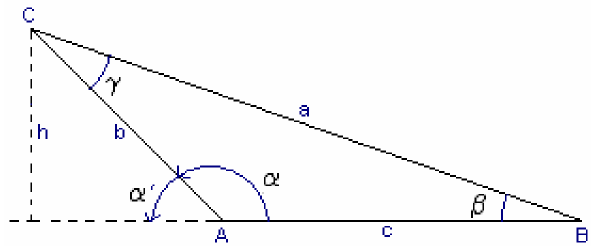
Dette gir oss at : $b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$

Dividerer vi med ab på begge sider : $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$

Trekker vi høyden fra A ned på BC og gjør det samme resonnementet på vinklene β og γ . Altså : $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

Dette etablerer setningen for spisse trekanter.

Oppg.7.1.3 Bruk figuren nedenfor og vis sinussetningen for stumpe trekanter :



HiNT :

$$\sin\alpha = \sin\alpha' = \frac{h}{b}$$

Eks.7.1.4 Anta at vi kjenner to av vinklene og en av sidene i trekanten. For eksempel i trekant ABC i fig. nedenfor, $\alpha = 103{,}5^o$, $\beta = 27{,}5^o$ og $c = 45{,}3$. Vi må finne γ, a og b.

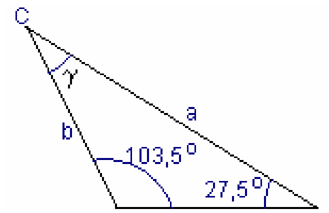


Fig.7.1.5

Siden $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ er $\gamma = 180^o - \left(103{,}5^o + 27{,}5^o\right) = 49^o$

Bruker vi sinussetningen, får vi :

$$\frac{a}{\sin 103{,}5^o} = \frac{45{,}3}{\sin 49^o} \Rightarrow a = \frac{45{,}3}{\sin 49^o} \cdot \sin 103{,}5^o \approx 58{,}4$$

Vi kan bruke sinussetningen en gang til :

$$\frac{b}{\sin 27{,}5^o} = \frac{45{,}3^o}{\sin 49^o} \Rightarrow b = \frac{45{,}3}{\sin 49^o} \cdot \sin 27{,}5^o \approx 27{,}7$$

Eks.7.1.6 Anta så at vi kjenner to sider i trekanten og dem motstående vinkelen til en av dem. Her kan vi få flere mulige vinkler. (Se fig. 7.1.7)

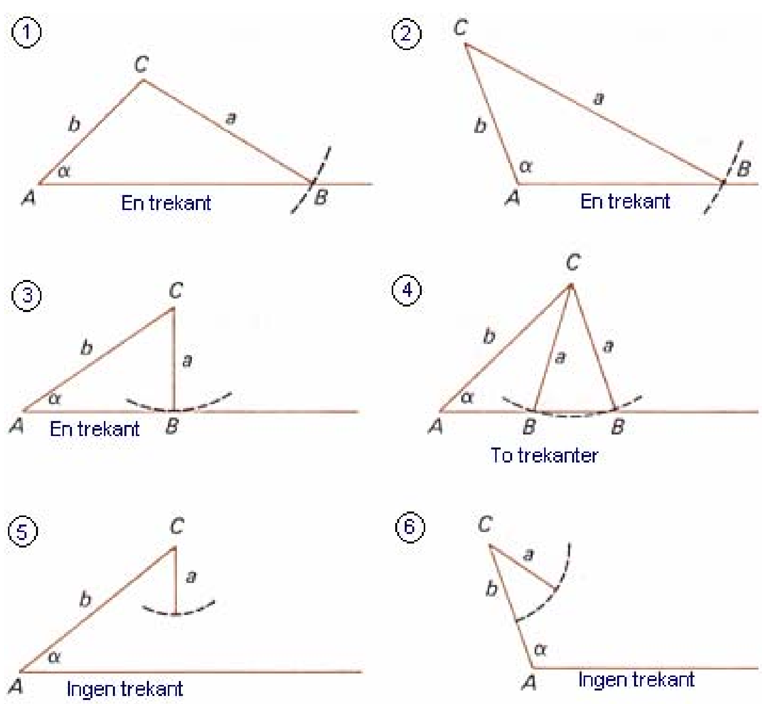


Fig.7.1.7

Hvis for eksempel α, a og b er gitt, kan vi prøve å konstruere en trekant som passer til de oppgitte størrelsene ved først å tegne vinkelen α, deretter avsette b på en av vinkelbeina for å bestemme hjørnet C. Til slutt prøver vi å finne hjørnet B ved å slå en sirkel med radius a med sentrum i C. Fig.7.1.7 til venstre viser hvilke situasjoner som da kan oppstå :

- Hvis $a \geq b$ kan dette alltid gjøres på en entydig måte (fig. 1 og 2)
- Hvis $a < b$ er der flere muligheter (fig. 3, 4, 5 og 6)

Her kommer imidlertid sinussetningen oss til hjelp.

Først merker vi oss at hvis $a \geq b$ finnes en trekant som passer til de oppgitte data. I dette tilfellet blir β en spiss vinkel og vi kan entydig bestemme β.
Hvis $a < b$ kan vi prøve å bruke sinussetningen. Hvis den gir $\sin\beta = 1$ har vi en entydig rett vinkel. Hvis den gir $\sin\beta < 1$ har vi to trekanter som korresponderer til løsningsvinklene β_1 og β_2 (den ene spiss og den andre stump).
Hvis den gir $\sin\beta > 1$ har vi en motsigelse i dataene ; ingen trekant passer til de oppgitte størrelser.
Som et eksempel kan vi anta at $\alpha = 36^o$, a = 9,4 og b = 13,1. Vi må finne β, γ og c. Siden $a < b$ kan resultatet bli en trekant, to trekanter eller ingen.
V regner ut $\sin\beta$:

$$\frac{\sin\beta}{13{,}1} = \frac{\sin 36^o}{9{,}4} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin 36^o}{9{,}4}\cdot 13{,}1 \approx 0{,}8192$$

$$\Rightarrow \beta_1 \approx 55{,}0^0 \text{ eller } \beta_2 \approx 180^o - 55{,}0^0 = 125^o$$

Dette gir oss 2 mulige størrelser for vinkel γ :

$$\gamma_1 = 180^o - \left(36^o + 55^o\right) = 89^o \quad \text{eller} \quad \gamma_1 = 180^o - \left(36^o + 125^o\right) = 19^o .$$

Og dette igjen gir 2 forskjellige størrelser for c :

$$\frac{c_1}{\sin 89^o} = \frac{9{,}4}{\sin 36^o} \Rightarrow c_1 = \frac{9{,}4}{\sin 36^o}\cdot\sin 89^o \approx 16{,}0 \quad \text{eller}$$

$$\frac{c_2}{\sin 19^o} = \frac{9{,}4}{\sin 36^o} \Rightarrow c_1 = \frac{9{,}4}{\sin 36^o}\cdot\sin 19^o \approx 5{,}2$$

Oppg.7.1.8 Finn ukjente sider og vinkler i trekantene med de oppgitte størrelsene :

a. $\alpha = 42{,}6^o$, $\beta = 81{,}9^o$ og $a = 14{,}3$

b. $\beta = 123^o$, $\gamma = 14{,}2^o$ og $a = 295$

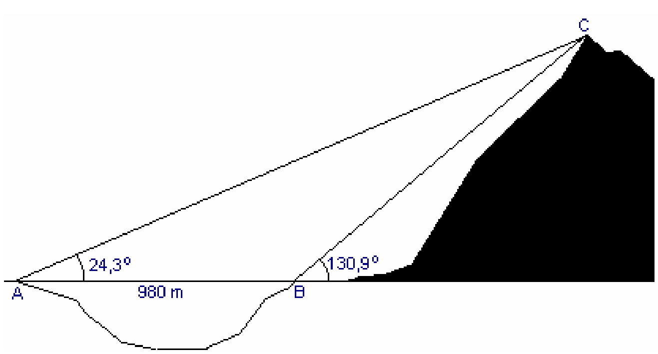
c. $\alpha = \gamma = 62^o$ og $b = 50$

d. $\alpha = 115^o$, a = 46 og b = 34

e. $\beta = 60^o$, a = 11 og b = 12

f. $\beta = 60^o$, a = 12 og b = 11

Oppg.7.1.9 To skogvoktere 25 km fra hverandre ved A og B observerer en brann ved punkt C. Skogvokteren ved A måler vinkelen CAB til $43{,}6^o$ og skogvokteren ved B måler vinkel CBA til $79{,}3^o$. Hvor langt fra hver av skogvokterne er brannen ?
Hvor langt er brannen fra en rett veg som går fra A til B ?



Oppg.7.1.10 To speidere ved A og ved B på hver sin side av et 980 m bredt vann måler siktevinkelen mot en fjelltopp C. Speideren ved A måler vinkelen $24{,}3^o$ i forhold til retning mot B mens speideren ved B måler vinkelen $130{,}9^o$ i forhold til retning mot B.
Hvor langt er det i luftlinje fra A til fjell-toppen C ?

7.2 Cosinus-setningen

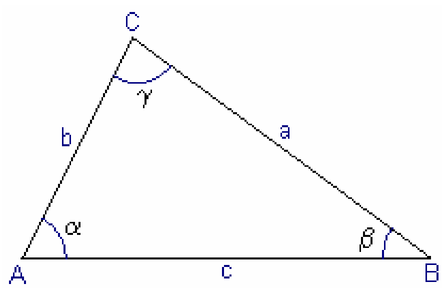


Fig.7.2.1

Setn.7.2.2

Cosinussetningen finnes i tre "utgaver" en for hver sidekant i en trekant :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Sagt med ord sier denne setningen at :

Kvadratet på en av sidene i trekanten er lik summen av kvadratene på de to andre minus 2 ganget med produktet av disse sidene og cosinus til vinkelen mellom dem.

Før vi beviser setningen, merker vi oss at når vinkelen er 90^o (dvs. trekanten er rettvinklet), så får vi at cosinus til vinkelen = 0, noe som gir oss at :

$a^2 = b^2 + c^2$ dersom $\alpha = 90^o$,

$b^2 = a^2 + c^2$ dersom $\beta = 90^o$,

$a^2 = b^2 + c^2$ dersom $\gamma = 90^o$.

Dermed kan vi se på Pythagoras' setning som et spesialtilfelle av cosinus-setningen.

Bevis for cosinussetningen :

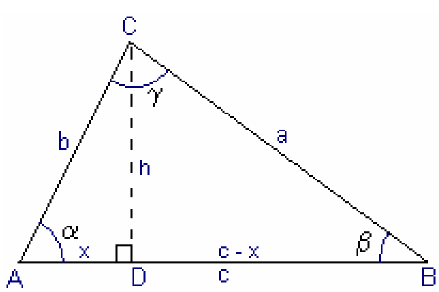


Fig.7.2.3 AD = x

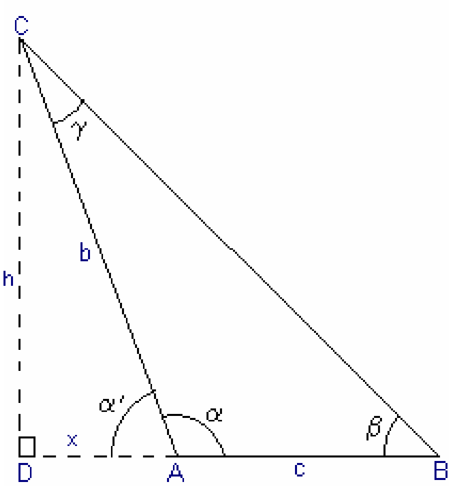


Fig.7.2.4

1) Anta først at vinkelen α er spiss. Da kan vi finne to uttrykk for høyden, h , fra C til AB : (fig.7.2.3)

$h^2 = b^2 - x^2$ og $h^2 = a^2 - (c - x)^2$

Dette gir oss at :

$a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2$ eller

$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$ eller

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

Nå er jo $\cos\alpha = \dfrac{x}{b}$ så $x = b \cdot \cos\alpha$, så vi får

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos\alpha$.

2) Anta så at vinkelen α er stump. (fig. 7.2.4)

Da er : $h^2 = b^2 - x^2$ og $h^2 = a^2 - (c + x)^2$

Dette gir oss (på samme måte som ovenfor) at

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ (*)

Nå er $\cos\alpha = -\cos\alpha'$ siden α' er grunnvinkelen til α.

Nå blir $\cos\alpha' = \dfrac{x}{b}$ så $x = b \cdot \cos\alpha' = -b \cdot \cos\alpha$

Innsatt i (*) gir dette oss at :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos\alpha$.

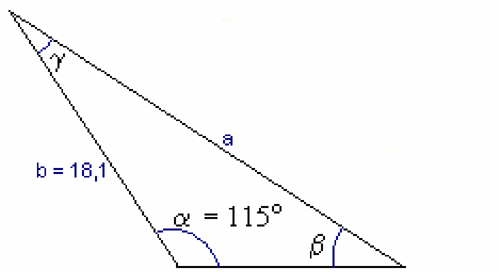


Fig.7.2.6

Eks.7.2.5 I trekant ABC, la b = 18,1 , c = 12,3 og $\alpha = 115^o$. Vi ønsker å finne a, β og γ ved regning. (Fig.7.2.6)

Ved cosinussetningen, får vi :

$$a^2 = 18{,}1^2 + 12{,}3^2 - 2 \cdot 18{,}1 \cdot 12{,}3 \cdot \cos 115^o \approx 667{,}30$$

$$\Rightarrow \quad a \approx 25{,}8$$

Deretter kan vi bruke sinussetningen :

$$\frac{\sin\beta}{18{,}1} = \frac{\sin 115^o}{25{,}8} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin 115^o}{25{,}8} \cdot 18{,}1 = 0{,}6358$$

$$\Rightarrow \quad \beta \approx 39{,}5^o$$

Til slutt får vi $\gamma \approx 180^o - \left(115^o + 39{,}5^o\right) = 25{,}5^o$.

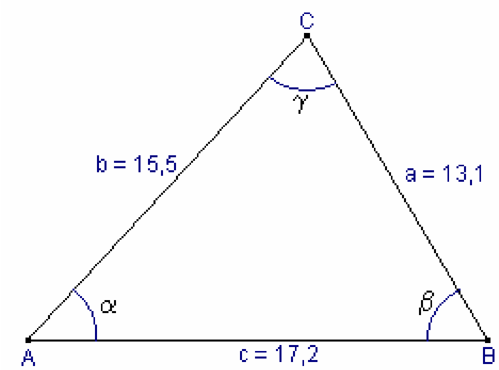


Fig.7.2.8

Eks.7.2.7 I trekant ABC, la a = 13,1 , b = 15,5 og c = 17,2. Vi ønsker å finne α, β og γ ved regning. (Fig.7.2.8)

Ved hjelp av cosinussetningen, får vi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{15{,}5^2 + 17{,}2^2 - 13{,}1^2}{2 \cdot 15{,}5 \cdot 17{,}2} \approx 0{,}6836$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 46{,}9^o$$

Ved hjelp av sinussetningen, får vi så :

$$\frac{\sin\beta}{15{,}5} = \frac{\sin 46{,}9^o}{13{,}1} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin 46{,}9^o}{13{,}1} \cdot 15{,}5 \approx 0{,}8640 \Rightarrow \beta \approx 59{,}8^o$$

Til slutt får vi $\gamma \; 180^o - \left(46{,}9^o + 59{,}8^o\right) = 73{,}3^o$.

7.3 Arealsetningen

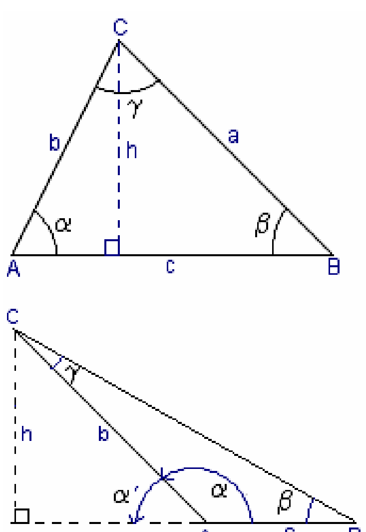


Fig.7.3.1

7.3.2 Arealsetningen

Arealet av trekant ABC er :

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

Bevis for arealsetningen :

1) Anta først at $\alpha < 90^o$. (Fig.7.3.1 øverst) . Vi har da at

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin\alpha$$

Da blir arealet $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

2) Anta så at $\alpha \geq 90^o$. (Fig.7.3.1 nederst) Da er $\sin\alpha' = \frac{h}{b}$. Nå er også $\sin\alpha = \sin\alpha'$ slik at $A = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot \sin\alpha' = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot \sin\alpha$

Merk at når $\alpha = 90^o$ blir $\sin\alpha = 1$ og arealformelen blir $A = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b$ som er den klassiske arealformelen for trekanter (med høuden h = c).

Oppg.7.3.3 Finn alle ukjente sider og vinkler i trekant ABC med de oppgitte størrelsene :

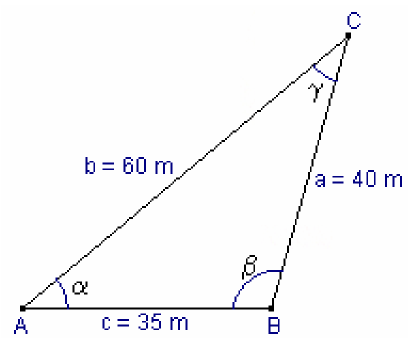
a. $\alpha = 60^o$, b = 14 og c = 10.

b. $\beta = 60^o$, a = c = 8

c. $\alpha = 150^o$, b = 35 og c = 40.

d. a = 12,2 , b = 19,1 og c = 23,8.

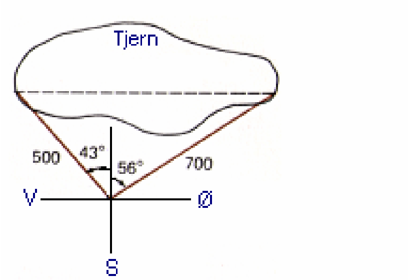
Oppg.7.3.4 To orienteringsløpere starter fra samme punkt kl. 12.00 middag. En av dem løper rett nordover med 10 km/t og den andre løper i retning 68^o øst for retning nord med 12 km/t. Hva er avstanden mellom o-løperne kl 15.00 på ettermiddagen ?



Oppg.7.3.5 En hyttetomt har form som en trekant ABC der AB = 35 meter, BC = 40 meter og AC = 60 meter.

a. Finn den største vinkelen i trekanten.

b. Finn arealet av tomta.



Oppg.7.3.6 En mann står på et punkt 500 m fra den ene enden av et tjern og 700 m fra den andre enden. Han måler vinkelen mot første tjernendepunkt til 43^o vest for nordlig retning og vinkelen mot andre tjernendepunkt til 56^o øst for nordlig retning. Finn lengden av tjernet.

Oppg.7.3.7 Finn arealet av en trekant ABC med de oppgitte størrelsene :

a. a = 20, b = 40 og $\gamma = 32^o$.

b. c = 4,5 cm , b = 2,8 cm og $\alpha = 119{,}2^o$

c. c = 135 cm , a = 108 cm og $\alpha = 45{,}9^o$ og $\gamma = 116{,}1^o$

7.4 Harmoniske svingninger

Eks.7.4.1 Et innledende eksempel

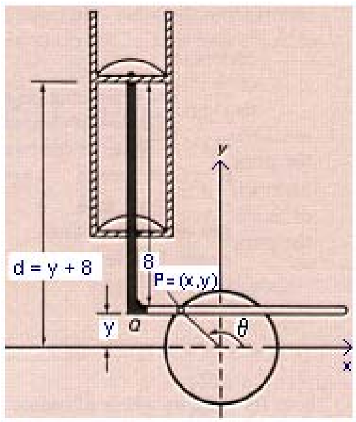


Fig.7.4.2

Enden av en 8 dm lang sylinder er festet til et stempel som beveger seg opp og ned. Stemplet er festet til et drivhjul i bolten P ved hjelp av en arm (fig.7.4.2). Drivhjulet har radius på 2 dm.

Hjulet roterer fra en startposisjon på $\theta = \frac{\pi}{4}$ med en hastighet på 3 radianer pr. sekund.
Finn en formel for den vertikale avstanden, d, fra stempelbunnen til senteret i drivhjulet etter t sekunder.
Stemplets opp og ned bevegelse er et eksempel på det vi kaller en *harmonisk svingning*.
Merk at bevegelsen til stemplet er essensielt den samme som for punktet Q. Dette betyr at vi ønsker å finne y, som jo er 2. koordinaten til bolten P. Her kommer altså trigonometrien inn siden ligger på drivhjulet som jo er sirkelformet. Det ville være fint om dette var en enhetssirkel, men det er det ikke siden radius = 2 cm og ikke 1 cm.
La oss derfor se på problemet ved først å se på eksempler med enklere tall.

Tilfelle 1. Anta drivhjulet har radius 1 og at det roterer med 1 radian pr. sekund og at det startet i posisjon $\theta = 0$. Ved tidspunkt t, er θ lik t radianer og P har y-koordinaten y = sint. (Fig.7.4.3 øverst)
Husk at denne likningen beskriver opp og ned bevegelsen til Q.

Tilfelle 2 La alt være som i første tilfelle, men anta nå at drivhjulet roterer med 3 radianer pr sekund. Dette betyr at ved tidspunkt t, vil θ være 3t radianer og både P og Q vil ha y-koordinat y = sin 3t. (Fig.7.4.3 nest øverst)

Tilfelle 3 Deretter øker vi radius i drivhjulet til 2 cm men lar resten av størrelsen være som i tilfelle 2.
Nå er koordinatene til P (2cos 3t,2sin 3t) og
y = 2sin 3t . (Fig.7.4.3 nest nederst)

Tilfelle 4 Til slutt kar vi hjulet starte i posisjon $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Ved hjelp av fig.7.4.3 nederst ser vi at

koordinatene til P nå blir $\left(2\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right),\ 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

slik at nå blir $y = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Gå gjennom dette argumentet steg for steg mens du bruker fig.7.4.3 til støtte.

Tilfelle 4 beskriver hjulbevegelsen vi startet med i fig.7.4.2.

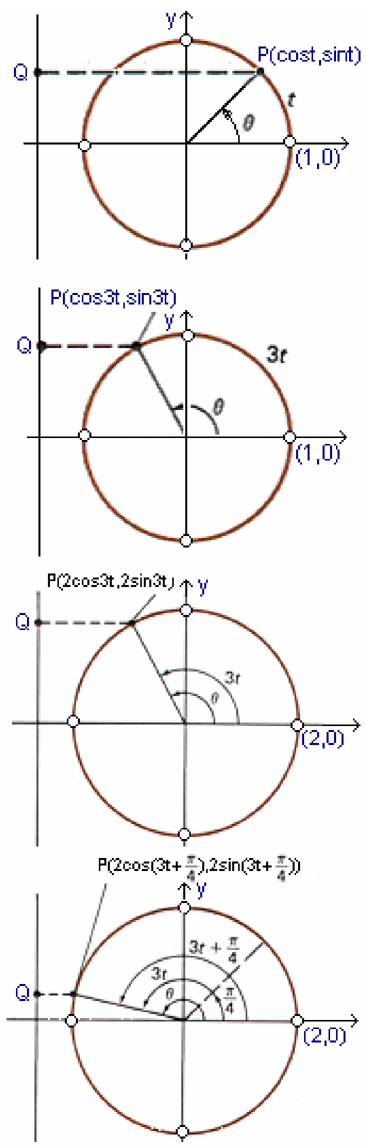


Fig.7.4.3

Tallet y måler avstanden mellom Q og x-aksen og d = y + 8 er avstanden fra stempelbunnen til x-aksen. Dermed får vi at $d = 8 + 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$. Dette er et eksempel på det vi kaller en enkel *harmonisk svingning*. Harmoniske svingninger er på formen $y = y_0 + A \cdot \sin(B \cdot t + C)$ og opptrer ofte i fysikken.

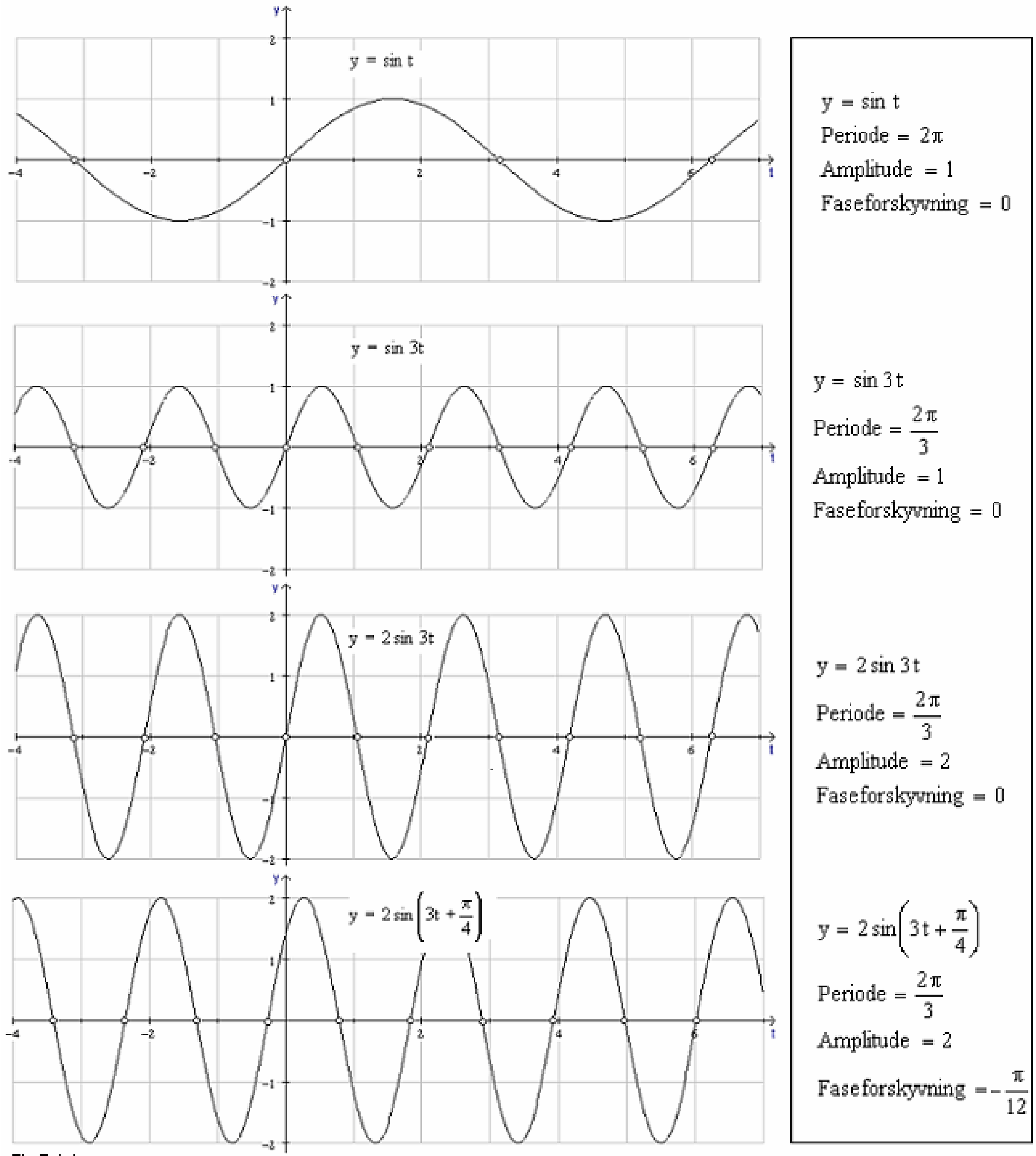


Fig.7.4.4

Vi skal studere denne typen svingninger nærmere, men først ser vi nærmere på grafene til de fire tilfellene i eksemplet. I tilfelle 4 har vi sløyfet verdien 8 for bedre å kunne sammenlikne grafene. Sammenlikn grafen til venstre med karakteristika for hver funksjon gitt til høyre.

- *Perioden* er som vi tidligere har vært inne på lengden av det korteste intervallet som funksjons-grafen gjentar seg på.

- *Likevektslinjen* er den (vanligvis horisontale) linjen grafen svinger om. I alle grafene ovenfor er likevektslinjen y = 0 (altså x-aksen), mens grafen til $d = 8 + 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ har likevektslinje y = 8.
- *Amplituden* er maksimalutslaget i forhold til likevektslinjen og
- *Faseforskyvningen* måler den horisontale forskyvningen av grafen i forhold til normalposisjonen. Merk i tilfelle 4 at $y = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin 3\left(t + \frac{\pi}{12}\right)$ slik at faseforskyvningen C = $-\frac{\pi}{12}$.

  Merk også at i dette tilfellet er y = 0 når $t = -\frac{\pi}{12}$ og ikke når t = 0.

La oss til slutt tegne grafen til funksjonen $y = 8 + 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$:

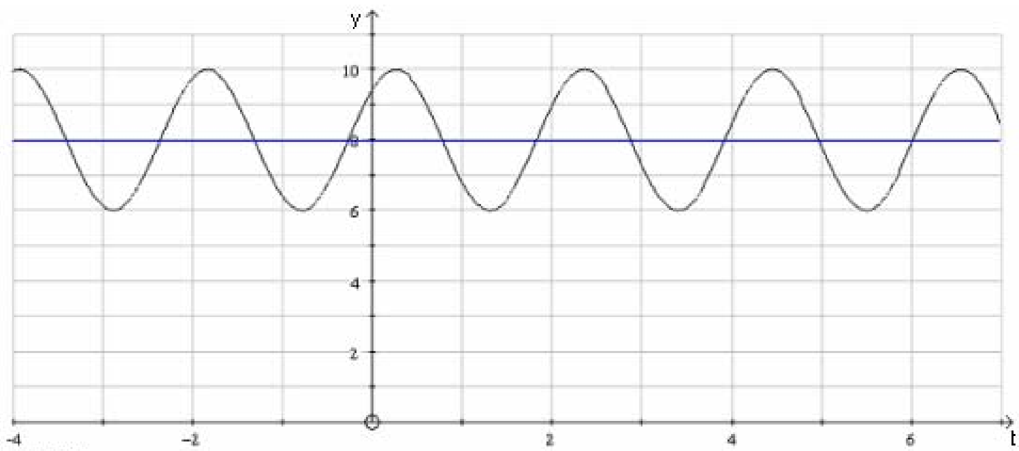


Fig.7.4.5

Vi ser at i forhold til grafen til funksjonen $y = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin 3\left(t + \frac{\pi}{12}\right)$ er grafen forskjøvet vertikalt med 8 enheter. Likevektslinjen som grafen svinger om, er da $y_0 = 8$. (Fig.7.4.5.)

Setn.7.4.6 Funksjonen $y = y_0 + A \cdot \sin(B \cdot t + C)$ er en harmonisk svingning med

Likevekstslinje	:	$y = y_0$
Periode	:	$T = \frac{2\pi}{B}$
Amplitude	:	$\lvert A \rvert$
Faseforskyvning	:	$-\frac{C}{B}$

Tilsvarende gjelder for funksjonen $y = y_0 + A \cdot \cos(B \cdot t + C)$

Vi ber leseren merke seg disse 4 karakteristika for harmoniske svingninger og øve på å gjenkjenne dem når funksjonsuttrykket blir oppgitt eller finne dem ut fra grafen til funksjonen.
Omvendt kan vi også si at når vi kjenner disse 4 karakteristika for funksjonen har vi et viktig hjelpemiddel når grafen skal tegnes.

Eks.7.4.7 Anta vi skal tegne grafen til funksjonen $y = 3\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$. Da tenker vi ut fra grafen til y = cos t og modifiserer grafen ut fra flg. karakteristika :

Funksjon	:	$y = 3\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$
Periode	:	$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
Amplitude	:	$\lvert A \rvert = \lvert 3 \rvert = 3$
Faseforskyvning	:	$-\frac{C}{B} = -\frac{\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{4} = \frac{\pi}{16}$

Grafen blir da som vist i fig.7.4.8 nedenfor :

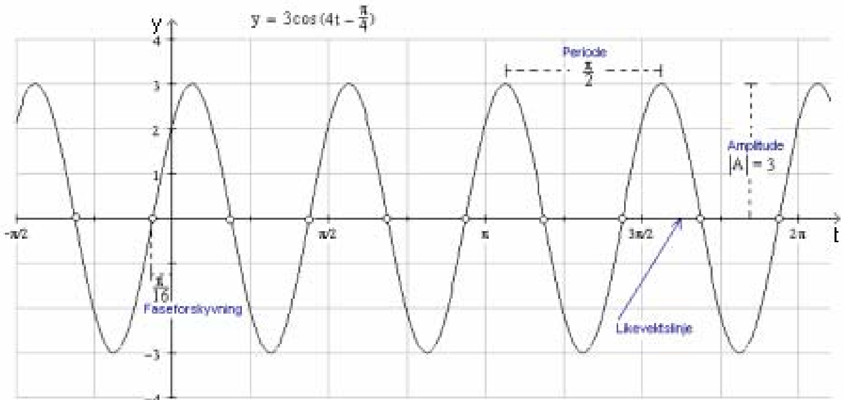


Fig.7.4.8

Oppg.7.4.9 Hent inn filen Harmsvingn.fig fra CD-en "M2". Velg drivhjulradius og lengde på stempelhus (1 og 2) og lengde på stempelstav (5) og velg startposisjon (3) og slå på funksjonen Vis radianmål (6).
Roter deretter punktet P på svinghjulet enten ved å dra i P (4) eller ved å animere P.
Studer deretter bevegelsen og grafen som framkommer. Endre deretter de ulike parametrene etter tur og studer hvordan grafen endres. Se spesielt på hvordan startposisjonen til punktet P (3) influerer på faseforskyvningen av grafen. Diskuter og forklar med egne ord det du finner ut.

Oppg.7.4.10 Tegn grafen til følgende funksjoner i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$:

a.	$y = \cos t$	b.	$y = \cos 2t$	c.	$y = 4\cos 2t$
d.	$y = 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$	e.	$y = \sin t$	f.	$y = \sin\frac{1}{2}t$
g.	$y = 3\sin\frac{1}{2}t$	h.	$y = 3\sin\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$	i.	$y = 2\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$

Oppg.7.4.11 Finn likevektslinje, periode, amplitude og faseforskyvning for følgende funksjoner :

a.	$y = 4\sin 2t$	b.	$y = 3\cos\left(t + \frac{\pi}{8}\right)$	c.	$y = \sin\left(4t + \frac{\pi}{8}\right)$
d.	$y = 3\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$	e.	$y = 3\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$	f.	$y = 2\sin\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{8}\right)$

g. Tegn grafene til hver av funksjonene og kontroller og avmerk karakteristika.

Eks.7.4.12 Når A er negativ : Vi skal tegne grafen til funksjonen $y = -3\cos 2t$.
Vi begynner med å sammenlikne med grafen til $y = 3\cos 2t$. Det er klart at hver y-verdi har motsatt fortegn, slik at grafen egentlig speiles om t-aksen. Vi har :

Likevektslinje	:	$y = 0$	Periode :	$\frac{2\pi}{2} = \pi$
Amplitude	:	$\lvert A \rvert = \lvert -3 \rvert = 3$		
Faseforskyvning	:	$-\frac{C}{B} = -\frac{0}{2} = 0$	Dette gir grafen :	

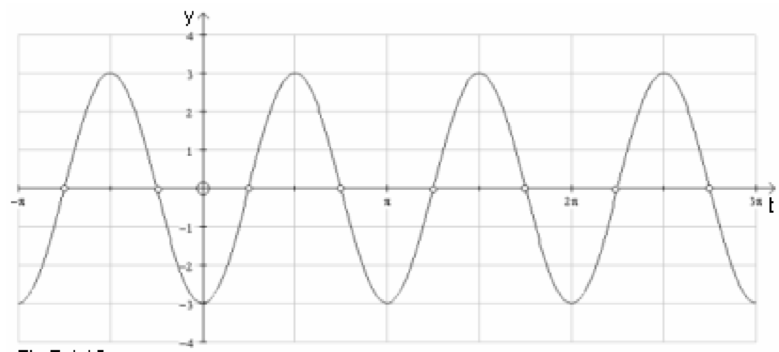


Fig.7.4.13

Oppg.7.4.14 Hent inn filen **Harmsvingn2.fig** fra CD-en "M2". Varier de ulike parametrene og studer hvordan grafene endrer seg. Diskuter og formuler med egne ord.

7.5 Kombinasjoner av sinus- og cosinussvingninger

Vi har sett at sin Bt og cos Bt har periode lik $\frac{2\pi}{B}$. Ved å velge verdier for B kan vi få svingninger som gjentar seg etter for eksempel 12 timer, 24 timer , 365 dager osv. Dette kan brukes til å tilpasse svingninger etter fenomener i naturen. For å beskrive periodiske fenomener i naturen må vi som regel kombinere sin Bt og cos Bt i samme funksjonsuttrykket.

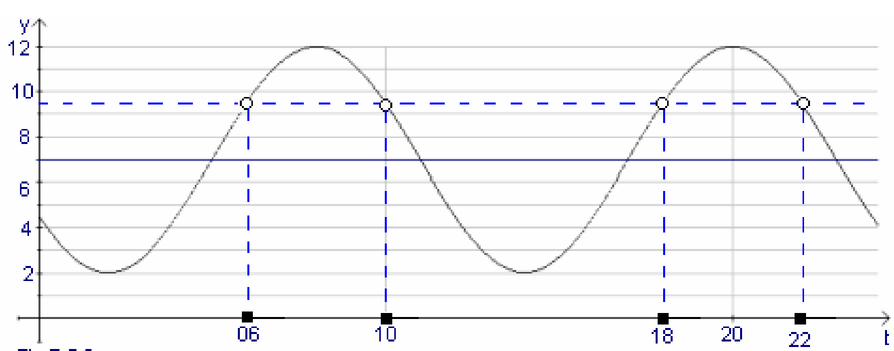


Fig.7.5.2

Eks.7.5.1

En tilnærmet modell for hvordan vanndybden i Bristol varierer i løpet av et døgn, er gitt ved funksjonen

$$y = 7{,}0 - 2{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4{,}3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad , \quad t \in [0,24]$$

Både for $\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ og for $\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ er perioden lik $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Dermed blir perioden for den sammensatte funksjonen $y = 7{,}0 - 2{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4{,}3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ også 12.

Vi ser for eksempel at det er lavvann i Bristol kl. 02 og kl. 14. Da er vanndybden 2,0 m og at det er høyvann kl. 08 og kl. 20 med vanndybde12,0 m.
Likevektslinjen er 7,0 m og amplituden er 12,0 m – 7,0 m = 5,0 m.
Vi kan spørre oss når vanndybden for eksempel er 9,5 m.

Dette vil tilsvare $y = 7{,}0 - 2{,}5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4{,}3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 9{,}5$

Løser vi likningen enten grafisk eller ved å løse likningen, får vi at dette vil skje 4 ganger i løpet av døgnet, kl. 06, kl. 10, kl. 18 og kl. 22.

I eks.7.5.1 ser vi altså at en kombinasjon av en cosinussvingning og en sinussvingning gir en ny periodisk svingning med ny amplitude og med maksimalpunktet forskjøvet i forhold til maksimalpunktet for en ren cosinussvingning. La oss nå se på hvorfor det må bli slik :

Setn.7.5.3 La a, b og ω være reelle tall $\neq 0$. ($\omega > 0$).
Funksjonen $y = a\cdot\cos\omega t + b\cdot\sin\omega t$ kan da skrives på formen
$y = A\cdot\cos[\omega(t - t_0)]$
der $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ og $\tan\omega t_0 = \frac{b}{a}$ og der vinkelen ωt_0 ligger i intervallet $[0, 2\pi\rangle$
og hører til samme kvadrant som punktet (a,b).

Bevis : Vi bruker setn.4.2.3 og får at :

$$a\cdot\cos(\omega t) + b\cdot\sin\omega t = A\cdot\cos[\omega(t - t_0)] \Leftrightarrow$$
$$a\cdot\cos(\omega t) + b\cdot\sin\omega t = A\cdot[\cos\omega t\cdot\cos\omega t_0 + \sin\omega t\cdot\sin\omega t_0] \Leftrightarrow$$
$$a\cdot\cos(\omega t) + b\cdot\sin\omega t = A\cdot\cos\omega t\cdot\cos\omega t_0 + A\cdot\sin\omega t\cdot\sin\omega t_0 \Leftrightarrow$$
$$a = A\cdot\cos\omega t_0 \text{ og } b = A\cdot\sin\omega t_0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{A\cdot\sin\omega t_0}{A\cdot\cos\omega t_0} = \frac{b}{a} \text{ og } a^2 + b^2 = A^2\cdot\cos^2\omega t_0 + A^2\cdot\sin^2\omega t_0 \Leftrightarrow$$
$$\tan\omega t_0 = \frac{b}{a} \text{ og } a^2 + b^2 = A^2\cdot\left(\cos^2\omega t_0 + \sin^2\omega t_0\right) = A^2\cdot 1 \Leftrightarrow$$
$$\tan\omega t_0 = \frac{b}{a} \text{ og } a^2 + b^2 = A^2$$

Eks.7.5.4 I eks.7.5.1 studerte vi vanndybden i Bristol ved hjelp av funksjonen

$$y = 7{,}0 - 2{,}5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4{,}3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad , \quad t \in [0,24].$$

Ved hjelp av setning 7.5.3 kan vi nå skrive denne sammensatte funksjonen som en cosinussvingning.Her er a = 2,5 og b = - 4,3 og $\omega = \frac{\pi}{6}$ som gir :

$$A = \sqrt{2{,}5^2 + (-4{,}3)^2} \approx 5{,}0 \text{ og } \tan\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -\frac{4{,}3}{2{,}5}$$

Nå er :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}t_0\right) = \frac{-4{,}3}{-2{,}5} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6}t_0\right) = 1{,}72 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t_0 \approx 1{,}0442 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$$
$$\Leftrightarrow t_0 \approx 1{,}9942 + 12k \ , \ k \in Z$$

Siden $(a, b) = (-2.5, -4.3)$ ligger i 3. kvadrant, må også $\frac{\pi}{6}t_0$ ligge i 3. kvadrant,slik at

$\frac{\pi}{6}t_0 = 1{,}0422 + \pi \approx 4{,}1838$. Dermed får vi at :

$y = 7{,}0 - 2{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4{,}3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 7{,}0 + 5{,}0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right)$

Vi ser at likevektslinjen er y = 7,0, perioden $= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$, amplituden = 5,0 og

faseforskyvningen = $-\frac{-4{,}1838}{\frac{\pi}{6}} \approx 8{,}0$. Kontroller dette med fig.7.5.2.

Vi regner til slutt ut når ekstremalverdiene inntreffer. Vi ser da at

$y = 7{,}0 + 5{,}0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right)$ er størst når $\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right) = 1$. Da er y = 7,0 + 5,0 = 12,0.

Vi har nå at :

$\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right) = 1$

$\Leftrightarrow \cos y = 1$ og $y = \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838 \Leftrightarrow y = 0 + k \cdot 2\pi$ og $y = \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838$, $k \in Z$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838 = k \cdot 2\pi$, $k \in Z \quad \Leftrightarrow t = k \cdot 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} + 4{,}1838 \cdot \frac{6}{\pi}$, $k \in Z$

$\Leftrightarrow t = 12 \cdot k + 8$, $k \in Z$

For å holde oss innenfor intervallet $[0, 24]$ kan vi velge k = 0 el. 1, altså $t = 8$ eller $t = 20$.

$y = 7{,}0 + 5{,}0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right)$ er minst når $\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right) = -1$. Da er verdien 7,0 - 5,0 = 2,0 og :

$\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right) = -1$

$\Leftrightarrow \cos y = -1$ og $y = \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838 \Leftrightarrow y = \pi + k \cdot 2\pi$ og $y = \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838$, $k \in Z$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838 = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in Z \quad \Leftrightarrow t = \pi \cdot \frac{6}{\pi} + k \cdot 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} + 4{,}1838 \cdot \frac{6}{\pi}$, $k \in Z$

$\Leftrightarrow t = 6 + 12 \cdot k + 8$, $k \in Z \quad \Leftrightarrow t = 14 + 12 \cdot k$, $k \in Z$

For å holde oss innenfor intervallet $[0, 24]$ kan vi velge k = -1 eller k = 0, altså

$t = 2$ eller $t = 14$. Til slutt finner vi ved regning når vanndybden er 9,5 meter :

$$7{,}0 + 5{,}0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right) = 9{,}5 \Leftrightarrow 5{,}0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right) = 2{,}5$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838\right) = 0{,}5 \qquad \Leftrightarrow \cos y = 0{,}5 \text{ og } y = \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838$$

$$\Leftrightarrow \left(y = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ el. } y = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) \text{og } y = \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838 \text{ , } k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad \frac{\pi}{6} \cdot t - 4{,}1838 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ , } k \in Z$$

$$\Leftrightarrow t = 2 + 12k + 8 \quad \text{eller} \quad t = -2 + 12k + 8 \text{ , } k \in Z$$

$$\Leftrightarrow t = 10 + 12k \text{ eller } t = 6 + 12k \text{ , } k \in Z$$

For å holde oss i intervallet $[0, 24]$, kan vi velge k = 0 eller k = 1 i første likning, og vi kan velge k = 0 eller k = 1 i andre likning.
Dette gir løsningene : $t = 10$, $t = 22$, $t = 6$ eller $t = 18$.
Kontroller ved hjelp av grafen i fig.7.5.2.

Oppg.7.5.5 Antall timer, g(t), som sola er oppe på dag nr. t et sted i Norge er gitt ved :

$$g(t) = 12{,}5 - 6 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{365} t\right) \quad , \quad t \in \langle 0, 365]\,.$$

a. Skriv om g(t) som en cosinusfunksjon.
b. Angi likevektslinje, amplitude, periode og faseforskyvning for g(t).
c. Finn ved regning når dagen er lengst og når dagen er kortest på dette stedet. Hvor lang er dagen ved disse to tidspunktene ?
d. Bruk resultatet i b. og tegn grafen til g(t).
e. Finn grafisk og ved regning når på året dagens lengde er 15 timer.

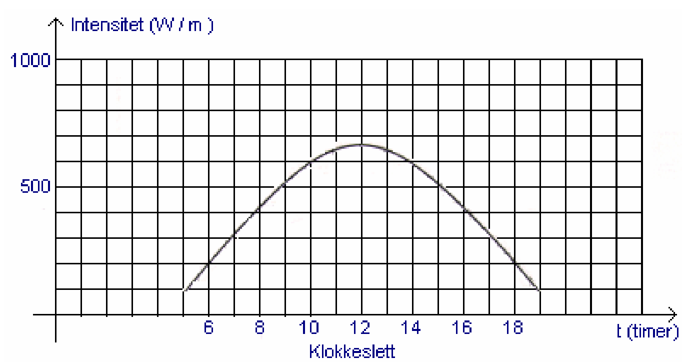
Oppg.7.5.6 Produksjonen ved et lite kraftverk på Vestlandet varierer med årstiden. En modell basert på målinger over flere år, for denne variasjonen er
$P(t) = 12 - 2{,}3 \cdot \cos(0{,}52t) + 5{,}0 \sin(0{,}52t)$ der P(t) er ant.1000 kW og t er månedsnr.

a. Skriv om P(t) som en cosinusfunksjon og finn likevektslinje, amplitude, periode og faseforskyvning for P(t).
b. I hvilken måned i året er produksjonen størst ?
c. Finn ved regning når produksjonen er på 15000 kW.

Oppg.7.5.7 En student ved HiNT finner på Internett ut at hennes såkalte ”intellektuelle biorytme” denne måneden er gitt ved $B(t) = 2{,}7 \cdot \cos(0{,}19t) - 9{,}6 \cdot \sin(0{,}19t)$ hvor t er datoen i måneden.

a. Skriv B(t) på formen $B(t) = A \cdot \cos[0{,}19(t - t_0)]$
b. Hvor lang tid går det mellom hver gang hennes biorytme er på topp ?
c. Hun får det rådet at hun bør forsøke å få prøver lagt til perioden der hennes biorytme er over halvparten av maksimalverdien.
Regn ut i hvilken periode det er, og tegn grafen til B(t) og kontroller.
dato hennes intellektuelle biorytme skulle være på topp denne måneden ?

Oppg.7.5.8 Solstrålingens intensitet varierer med årstid, klokkeslett, breddegrad og værforhold. Intensiteten kan vi måle i W/m^2 (Watt pr. m^2) .
Kurven nedenfor viser hvordan intensiteten varierer med klokkeslettet en klar dag i midten av April på Levangers breddegrad (ca. $63{,}7^{o}$ N.br.)



Kurven viser solstråling mot en horisontal flate.

Kilde : Energi, miljø og samfunn. Norges naturvernforbund. 1974.

Anta at kurven beskriver en tilnærmet harmonisk svingning med periode 24 timer.
Finn en formel som gir solstrålingens intensitet som funksjon av klokkeslettet.

8. Den deriverte til de trigonometriske funksjonene

I byen Bristol i England
er det stor forskjell på flo og fjære.
På et sted i havna utenfor Bristol
er vanndybden f(t) et døgn tilnærmet gitt ved

$$f(t) = 7{,}0 - 2{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4{,}3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Hvor raskt endrer vanndybden seg kl. 17 ?

Med til en fullstendig analyse av en funksjon hører selvfølgelig den deriverte til funksjonen. I dette kapitlet skal vi derfor se nærmer på den deriverte til de trigonometriske funksjonene. La oss imidlertid først se nærmere på noen nyttige grenseverdibetraktninger.

8.1 Den deriverte til en funksjon

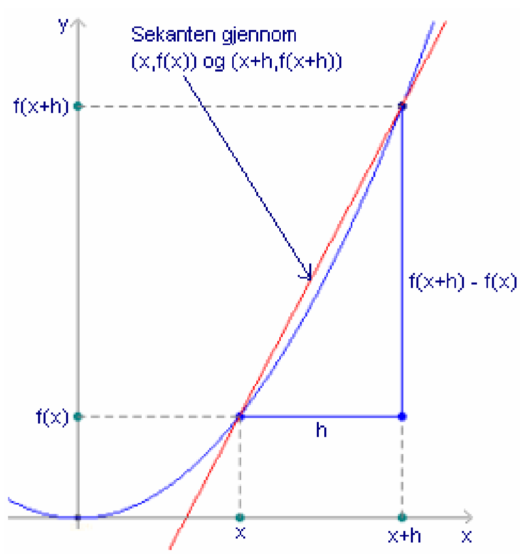


Fig.8.1.1

Vi minner om definisjonen av den deriverte til en funksjon :

Def.8.1.2 Den deriverte til en funksjon f i et intervall :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Av fig.8.1.1 ser vi at brøken vi her beregner grenseverdien til nettopp er stigningstallet for sekanten gjennom punktene (x , x + h) og (x + h, f(x + h)).
Når h går mot 0, ser vi at dette stigningstallet går mot stigningstallet for *tangenten* til grafen i punktet (x,f(x)).

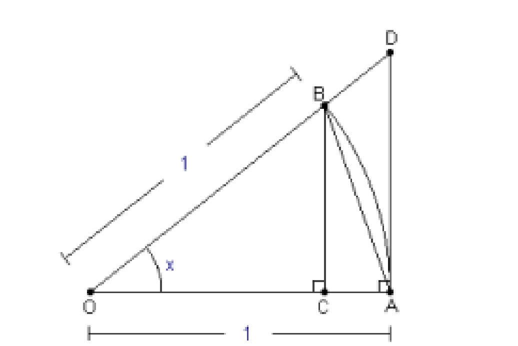


Fig.8.2.2

8.2 En viktig grenseverdi

Setn.8.2.1 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Et geometrisk bevis :

Betrakt fig.8.2.2. Der er buen AB en del av enhetssirkelen med sentrum i origo, O. Vi antar at x > 0. Beviset når x < 0 blir tilsvarende.

Av figuren ser vi at :

$$\sin x = \frac{BC}{1}, \quad x = \frac{\text{buen AB}}{1} \quad \text{og} \quad \tan x = \frac{AD}{1},$$ altså BC = sin x, buen AB = x og tan x = AD.

Vi minner også om at arealet av en sirkelsektor over en bue b, er $\frac{1}{2}\cdot b \cdot r$.

Vi vil sammenlikne arealene av trekant OCB, sirkelsektor OAB og trekant OAD. Vi ser at dette gir at $\text{Ar}(\Delta\,OCB) < \text{Areal(sirkelsektor OAB)} < \text{Areal(trekant OAD)}$ dvs.

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

I venstre ulikhet $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x$ multipliserer vi med $\frac{2}{x}$ (husk $x > 0$) og får $\frac{\sin x}{x} < 1$.

I høyre ulikhet $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$ utnytter vi at $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Vi multipliserer deretter med $\frac{2\cos x}{x}$ og får $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.

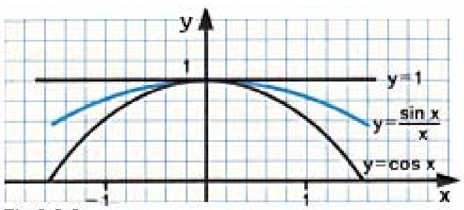


Fig.8.2.3

Vi har dermed vist at $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. (fig.8.2.3)

Når vi så lar x gå mot 0, ser vi at uttrykket $\frac{\sin x}{x}$ klemmes mellom 1 og noe som går mot 1.
(cos x går mot 1 når x går mot 0).

Dermed må vi ha at : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Oppg.8.2.4 Vis at $\lim_{v \to 0} \frac{1 - \cos v}{v} = 0$. (HiNT : Multipliser med (1+cos v) og utnytt at $\lim_{v \to 0} \frac{\sin v}{v} = 1$.)

Nå er vi klar til å finne den deriverte til sinus-funksjonen.

8.3 Den deriverte til sin t, cos t og tan t

Setn.8.3.1 $(\sin t)' = \cos t$ når t er målt i radianer.

Bevis : Vi bruker definisjonen (se def.8.2.1) av den deriverte og bruker formelen for sinus til en sum av to vinkler (se setn.4.2.4.a.) :

$$
\begin{aligned}
\sin'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin t \cdot \cos h + \cos t \cdot \sin h - \sin t}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin t \cdot \cos h + \cos t \cdot \sin h - \sin t}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin t \cdot \cos h - \sin t}{h} + \frac{\sin h \cdot \cos t}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin t \cdot \cos h - \sin t}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \cdot \cos t}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} - \frac{(1 - \cos h)}{h} \cdot \sin t + \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \cos t \\
&= -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sin t + 1 \cdot \cos t \\
&= \cos t
\end{aligned}
$$

Setn.8.3.2 a. $(\cos t)' = -\sin t$

b. $(\tan t)' = \frac{1}{\cos^2 t}$

Bevis :

a. La $u = \frac{\pi}{2} - t$. Da er : $u' = \left(\frac{\pi}{2} - t\right)' = -1$.

Nå er $y = \cos(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin u$. Bruker vi nå kjernregelen for derivasjon, får vi :

$$y' = (\cos t)' = (\sin u)' = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot (-1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot (-1) = -\sin t$$

b. Når det gjelder beviset for b., bruker vi formelen for den deriverte til en brøk(-funksjon) og får :

$$(\tan t)' = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)' = \frac{\cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot (-\sin t)}{(\cos t)^2} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

Oppg.8.3.3 I avsnitt 8.1 viste vi til at den deriverte til en funksjon f i et punkt (x,f(x)) kan tolkes som stigningstallet går mot stigningstallet for *tangenten* til grafen i punktet (x,f(x)).

a. Tegn grafene til sin t og cos t i samme koordinatsystem.

b. I setn.8.3.2 viste vi at $(\sin t)' = \cos t$. Dette betyr at for å finne den deriverte til y = sin t kan vi bruke grafen til cos t slik at funksjonsverdiene til cos t gir oss nettopp stigningstallet for grafen til sin t i hvert punkt.
Bruk grafene til å kontrollere at dette virkelig er tilfelle. Start med punktene der cos t = 0. I følge setn.8.3.2 skal da stigningstallet for tangenten til grafen til sin t være lik 0 i disse punktene, noe som betyr at sin t skal ha ekstremalpunkter der cos t = 0. Kontroller at dette stemmer og fortsett med andre punkter.

Oppg.8.3.4 Som i oppg.8.3.3, men nå bruker kontrollerer du resultatet $(\cos x)' = -\sin x$.

Oppg.8.3.5 Deriver funksjonene :

a. $f(t) = 5 \cdot \sin t + 3\cos t$ b. $f(t) = 4 \cdot \sin t \cdot \cos t$

c. $f(t) = 5 \cdot \sin 2t$ d. $f(t) = 3\cos^2 t$

Oppg.8.3.6 a. Finn 1. koordinatene til ekstremalpunktene til funksjonen i oppg.8.3.5.a ved å løse likningen $f'(t) = 0$.

b. Det samme som a. men nå for funksjonen i oppg.8.3.5.c.

c. For funksjonen i oppg.8.3.5.c. lag fortegnsskjema og drøft fortegnet til $f'(t)$ og bestem hvor funksjonen har maksimalpunkter i første omløp og hvor den har minimalpunkter og skriv opp koordinatene til disse.

Eks.8.3.7 Vi måler tiden t timer fra midnatt. På grunn av gravitasjonspåvirkningen fra månen og sola vil vannet i havet stige og synke slik at vi får flo og fjære.
I byen Bristol i England er det stor forskjell på flo og fjære. På et sted i havna utenfor Bristol er vanndybden (målt i meter) f(t) tilnærmet gitt ved

$$f(t) = 7{,}0 - 2{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4{,}3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right), \; t \in [0,24].$$

a. Finn ved regning hvor raskt vanndybden endrer seg kl. 17.

b. Finn ved regning når vi har flo. (dvs. høyeste verdi for f(t)).

Løsning :

a. Vi har at :

$$f'(t) = 2{,}5 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4{,}3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \approx 1{,}3090 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2{,}2515 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Da blir $f'(17) \approx 1{,}3090 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 17\right) + 2{,}2515 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 17\right) \approx 2{,}6$

som betyr at vannet er i ferd med å stige 2,6 meter pr. time kl. 17.

b. Vi setter $f'(t) = 0$ og får :

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1{,}3090 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2{,}2515 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1{,}3090 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -2{,}2515 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)} = \frac{-2{,}2515}{1{,}3090} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6}t\right) \approx 1{,}7200$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t \approx 1{,}044 + k \cdot \pi \quad , k \in Z$$

$$\Leftrightarrow t \approx 1{,}044 \cdot \frac{6}{\pi} + k \cdot \pi \cdot \frac{6}{\pi} \quad , \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow t \approx 2{,}0 + 6k \ , \ k \in Z$$

I intervallet $[0{,}24]$ kan vi velge $k = 0, 1, 2$ eller 3, som gir $t = 2$, $t = 8$, $t = 14$ og $t = 20$. Dette gir (1. koordinatene til) alle ekstremalpunktene til f. Lager vi fortegnslinje og drøfter fortegnet til den deriverte til f , finner vi at f har maksimalpunkter i $t = 8$ og $t = 20$.

Oppg.8.3.8 Vi måler temperaturen gjennom et novemberdøgn på et sted i Norge. Når t er antall timer siden midnatt, er temperaturen T(t) (målt i ^{o}C) tilnærmet gitt ved funksjonen $T(t) = 1{,}0 - 2{,}0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - 3{,}5\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \quad , \quad t \in [0{,}24]$.

a. Finn ved regning hvor raskt temperaturen forandrer seg kl. 22.

b. Finn når temperaturen er høyest og lavest hva er den da.

Oppg.8.3.9 Til havs kan et jordskjelv forårsake en bølge med stor amplitude. Vanndybden f(t) i meter, i en havn som nås av en slik bølge er gitt ved

$f(t) = 11 - 12 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{15}t\right) \quad , \quad 0 \le t \le T$, der t er tiden og T er perioden til f(t).

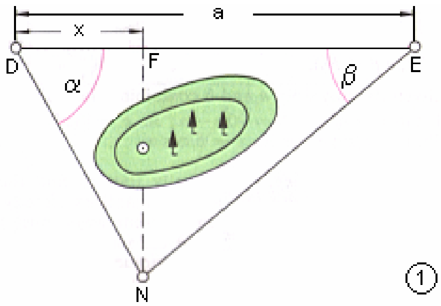
a. Finn bølgens periode.

b. Mellom hvilke tidspunkter er havnen tørrlagt ?

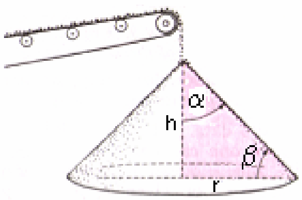
c. Når er vanndybden i ferd med å stige raskest ? Hvor mye stiger den da ?

Oppg. 8.3.10 Hent inn filen Solensgang.fig fra CD-en ”M2”. Gjør oppgave 1 og oppgave 2. Se på kurven sola beveger seg på over himmelen. Kan du beskrive den som en harmonisk svingning ? Forklar.

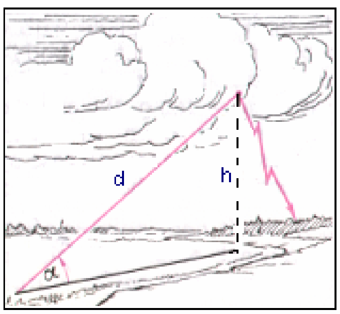
9. Øvingsoppgaver



1



2



3

9.1 En vannledning går i rett linje fra byen D til byen E (fig.1.) En sideledning (stiplet, FN) til byen N skal konstrueres og et vanntårn skal bygges på høyden midt mellom byene.
Byen N kan ikke ses fra F, men derimot fra byene D og E. Avstanden $a = DE$ og vinkelen $\alpha = \angle NDE$ blir målt. Avstanden DF = x.

a. Vis at $FN = x \cdot \tan\alpha$ og at
$FN = (a - x) \cdot \tan\beta$ og dermed at
$x \cdot \tan\alpha = (a - x) \cdot \tan\beta$.

b. Bruk resultatet i a. til å vise at
$$x = a \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

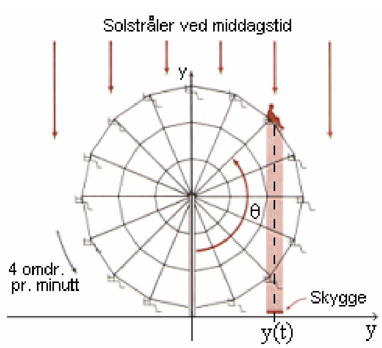
c. Måleresultatene viser at $a = 49$ km,
mens $\alpha = 72{,}4^o$ og $\beta = 41{,}9^o$.
Finn avstandene $x = |DF|$ og $|FN|$.

9.2 Dersom sand transporteres på et transportbånd så vil det dannes en kjegleformet haug (fig.2.) når sanden faller ned mot bakken.
Da kan volumet av haugen beregnes dersom en måler diameteren i haugens grunnflate og vinkelen α. (Vinkelen β kan for eksempel måles med et klinometer og $\alpha = 180^o - (90^o + \beta)$.)

a. Vis at $h = \dfrac{r}{\tan\alpha}$.

b. Forklar at volumet av haugen er gitt ved $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ og dermed at $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot r}{3 \cdot \tan\alpha}$.

c. I et grustak måles diameteren på en slik tipphaug til 32 m. Vinkelen β måles til 23^o.
Finn volumet av tipphaugen.



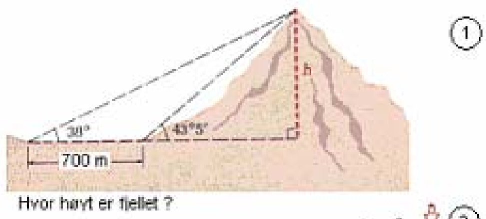
9.3. Et Pariserhjul roterer med urviseren med hastigheten 4 omdreininger pr. minutt.
Hjulet starter i posisjon $\theta = 0$ ved tidspunkt t = 0.

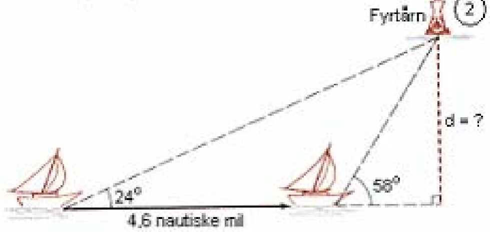
a. Hva uttrykker størrelsen $4 \cdot 2\pi$?

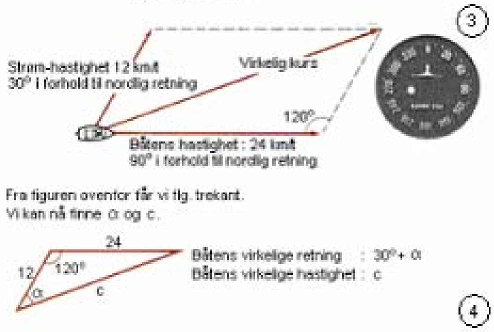
b. Vis at etter t minutter er $\theta = 8\pi \cdot t$.

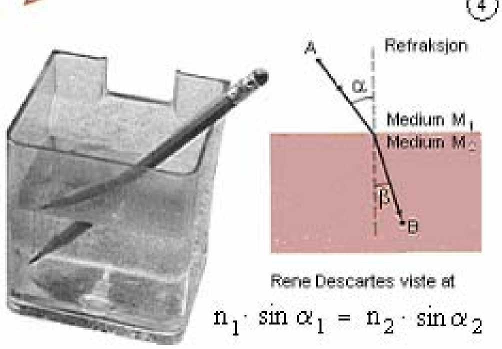
c. La skyggens posisjon (se fig.) ved tiden t være y(t).
Vis at $y(t) = 20 \cdot \sin(8\pi \cdot t)$

c. Tegn grafen til y(t) i intervallet $0 \le t \le 1$.









9.4. Finn fjellets høyde. (Se fig.1.)

9.5. En seilbåt måler retningen mot et fyrtårn ved to forskjellige tidspunkter først til 24^o og senere til 58^o i forhold til båtens kurs. (fig.2.)
Avstanden båten tilbakela mellom måletidspunktene ble målt til 4,6 nautiske mil. (1 n .mil = 1852 m)
Finn minste avstand, d, seilbåten kommer til å passere fyrtårnet med.

9.6. En båt seiler rett østover med en hastighet på 24 km/t. (fig.3.)
Strømmens hastighet er 12 km/t og retningen er 30^o øst for rett nordlig retning. Figuren viser båtens virkelige kurs på grunn av strømmen.

a. Finn vinkelen α.

b. Vis at $\dfrac{\sin\alpha}{24} = \dfrac{\sin(60^o - \alpha)}{12}$

c. Finn vinkel α.

d. Finn båtens virkelige hastighet og retning.

9.7. Den franske filosofen og matematikeren Rene Descartes (1596-1650) viste refraksjonsloven som forteller hvordan lysstråler brytes i overgangen fra et medium til et annet. (fig.4.) Størrelsene n_1 og n_2 kalles brytnings-indeksene for hvert av stoffene lyset går gjennom. Brytningsindeksen for luft, n_1, er lik 1 , mens brytningsindeksen for vann n_2 , er lik 1,33. Finn brytningsvinkelen β i vann når du lyser mot vannflata med en vinkel $\alpha = 30^o$.

9.8. Finn likevektslinje, amplitude og periode for disse funksjonene

a. $f(x) = 3 + 5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ b. $g(x) = 2 - 8\sin(0{,}6x)$

c. $h(x) = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right) - 4$ d. $k(x) = -3 - 4\cos(0{,}2x)$

9.9. Løs de trigonometriske likningene nedenfor når x er en vilkårlig vinkel målt i radianer :
a. 3 = 5cosx b. 2cosx + 3,5 = 3 c. 4-3cosx = 5cosx-2

9.10. Løs de trigonometriske likningene nedenfor når x er en vilkårlig vinkel målt i radianer :
a. 3tanx = 5 + tanx b. 4,5tanx = 2 – tanx c. 5tanx + 5 = 7tanx – 12

9.11. Løs likningene nedenfor ved regning og kontroller deretter løsningene i 1. omløp grafisk :

a. $8\sin^2 u + 2\sin u - 1 = 0$ b. $12\cos^2 u + 16\cos u + 5 = 0$

c. $\tan^2 u - 3\tan u - 7 = 0$

9.12. Løs likningene nedenfor ved å faktorisere først :

a. 3sinxcosx - 2sinx = 0 b. 5sin2x = 3cosx

9.13. Funksjonen $f(x) = 3 - 2\cos x - 4\sin x$ der $x \in [0, 2\pi\rangle$ er gitt.

a. Finn perioden.
b. Tegn grafen på kalkulatoren.
c. Les av største og minste verdi av funksjonen.
d. Finn likevektslinjen og amplituden ved avlesning.

9.14. Skriv disse funksjonene på formen $f(x) = A\cdot\cos(x - \varphi)$

a. $f(x) = 2\cos x + \sin x$
b. $f(x) = -4\cos x + 3\sin x$
c. $f(x) = -5\sin x + 3\cos x$

9.15. Gitt funksjonen $f(x) = 3 - 5\sin x + \cos x$, der $x \in [0, 2\pi\rangle$

a. Skriv funksjonsuttrykket på formen $f(x) = y_0 + A\cdot\cos(x - \varphi)$.
b. Finn likevektslinjen, perioden og amplituden.
c. Regn ut største og minste funksjonsverdi uten å derivere.

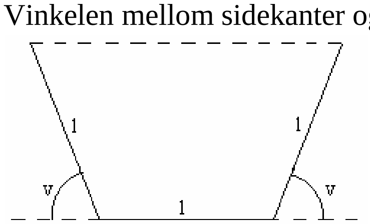
9.16. a. Vis ved å regne ut høyresiden at $\cos u = \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right)$.

b. Bruk resultatet i a. til å skrive funksjonen $f(x) = 3\sin(0{,}8x) + 4\cos(0{,}8x)$ på formen $f(x) = A\cdot\sin(0{,}8x + \varphi)$.

9.17. I trekant ABC er $\angle A = x$, $\angle B = 2x$ og $AB = 4$.

a. Forklar hvorfor $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$.
b. Vis at $\sin(\pi - 3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
c. Finn AC uttrykt ved trigonometriske funksjoner av vinkelen x.
d. Vis at arealet av trekanten kan skrives $A(x) = \dfrac{8\sin 2x}{3 - 4\sin^2 x}$
e. Undersøk hva som skjer med arealet når $x \to \frac{\pi}{3}$

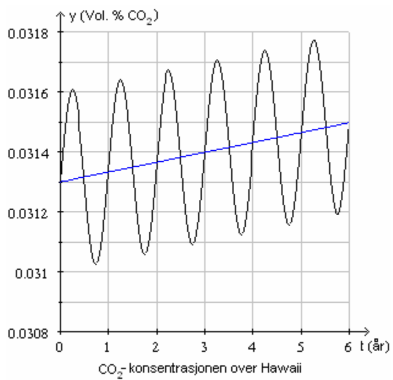
9.18. Et vanntrau har tverrsnitt som et trapes hvor grunnlinjen og de to sidekantene er 1,0 m. Vinkelen mellom sidekanter og grunnlinjen er v.



a. Vis at arealet av tverrsnittet blir $A(v) = (1 + \cos v)\sin v$.
b. Deriver A(v) og finn ut hvor stor vinkelen v må være for at arealet skal være størst mulig.

9.19. a. Tegn grafen til funksjonen $y = \frac{2}{3}x + 3 + 2\sin\left(2\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ ved å addere funksjonsverdier.

b. Kurven på figuren nedenfor viser variasjonene i CO_2-konsentrasjonen over Hawaii i tidsrommet 01.01.59 – 31.12.64. Svingningene kan tenkes å skyldes bl.a. sesongvariasjoner i planteproduksjonen, mens den "jevnt stigende tendens" kan skyldes utslipp ved forbrenning av fossilt brennstoff (kull, oljeprodukter).



Kurven kan med god tilnærmelse beskrives som grafen til funksjonen

$y = at + b + \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right]$ der a,b,c,T og t_0 er positive konstanter.

Bestem disse konstantene ut fra den gitt kurven.

9.20. En bedrift finner at salget av en vare er sesongbetont. I måned nr. t selger bedriften S(t) stk. av varen. Dette salget er vist med god tilnærming å følge funksjonen

$$S(t) = 800 + 400\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

a. Finn ved regning i hvilke måneder bedriften i løpet av et år selger 1000 stk av varen.

b. Finn når på året salget er størst og når det er minst og hvor stort salget er ved disse tidspunktene.

9.21. a. Tegn grafen til funksjonen $f(x) = e^{0,1x}$ når $x \in [-5,10]$.

b. Tegn grafen til funksjonen $g(x) = \cos x$ når $x \in [-5,10]$.

c. Tegn så grafen til produktfunksjonen $h(x) = f(x) \cdot g(x) = e^{0,1x} \cdot \cos x$ når $x \in [-5,10]$. Hva ser du ? Diskuter og forklar.

d. Undersøk det du fant i c. ved å studere $\lim\limits_{x \to \infty} h(x)$

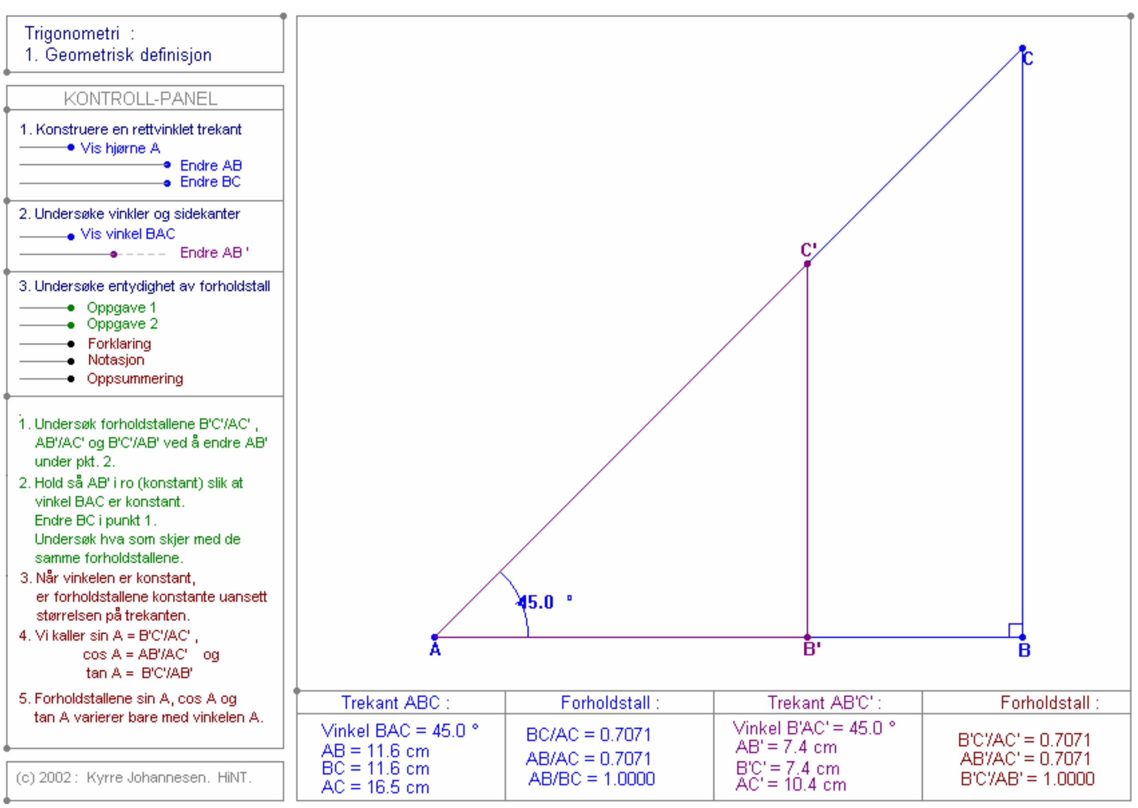
10. Dynamiske IKT-applikasjoner

10.1 Filoversikt

Filnavn	Vertsprogram	Oppgavenr.	Side i komp.
Intro.doc	Microsoft Word™		
Trekantdef.fig	Cabri geometri II™	1.1.14, 1.1.16	s.5
Trigtabell.xls	Microsoft Excel™	1.2.3, 1.3.5, 1.3.9	s.6,7
Klinometer.fig	Cabri geometri II™	1.3.8	s.7
Vinkelmaal.fig	Cabri geometri II™	2.2.14	s.13
Enhetssirkelen.fig	Cabri geometri II™	2.3.6, 2.4.15	s.16,18
GrafeSinCosTan.fig	Cabri geometri II™	2.5.1, 3.1.4, 3.2.5, 3.3.4	s.19,22,23, 24
GrafesumSinCos.fig	Cabri geometri II™	3.6.4	s.27
Grunnliknsin.fig	Cabri geometri II™	5.1.3	s.33
Grunnlikncos.fig	Cabri geometri II™	5.1.6	s.33
Grafinvsin.fig	Cabri geometri II™	6.2.7	s.38
Harmsvingn.fig	Cabri geometri II™	7.4.9	s.48
Harmsvingn2.fig	Cabri geometri II™	7.4.14	s.49
Solensgang.fig	Cabri geometri II™	8.3.10	s.56

10.2 Skjermklipp

Trekantdefinisjonen av sinus, cosinus og tangens : Trekantdef.fig



Trigonometrisk tabellberegning ved hjelp av Excel regneark : Trigtabell.xls

TRIGONOMETRISK BEREGNING

Legg inn valgt vinkel i celle F11 eller forholdstall i cellene D25, D26 el. D27. (Lyse-gule celler)

1. Utregning av forholdstallene sin, cos og tan for en valgt vinkel A

A. Velg vinkel	A =	180	grader	dvs.		B. Utregning
		3,14159265	radianer			

sin	180	=	0,0000
cos	180	=	-1,0000
tan	180	=	0,0000

2. Utregning av vinkel A fra valgt forholdstal sin, cos eller tan

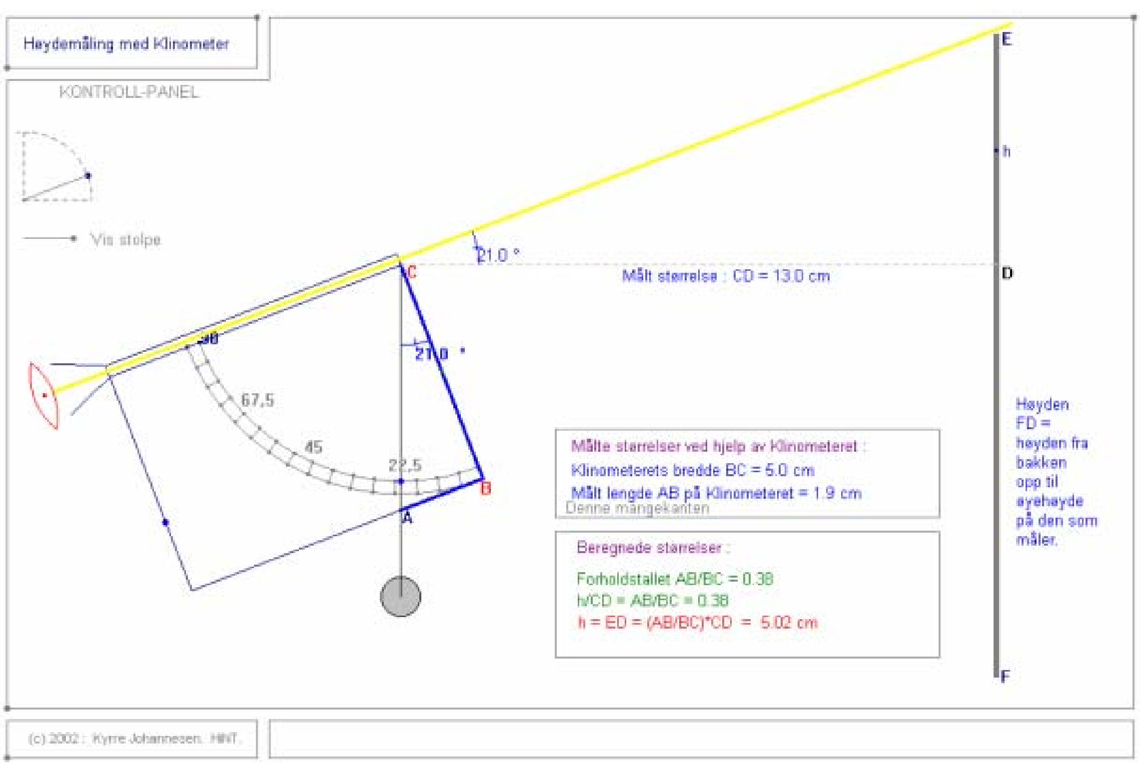
A. Velg sin, cos eller tan — B. Utregning

sin A		=	-1,0000	===>	A =	-90,0	grader	dvs.	-1,5708	radianer
cos A		=	0,6000	===>	A =	53,1	grader	dvs.	0,9273	radianer
tan A		=	0,5000	===>	A =	26,6	grader	dvs.	0,4636	radianer

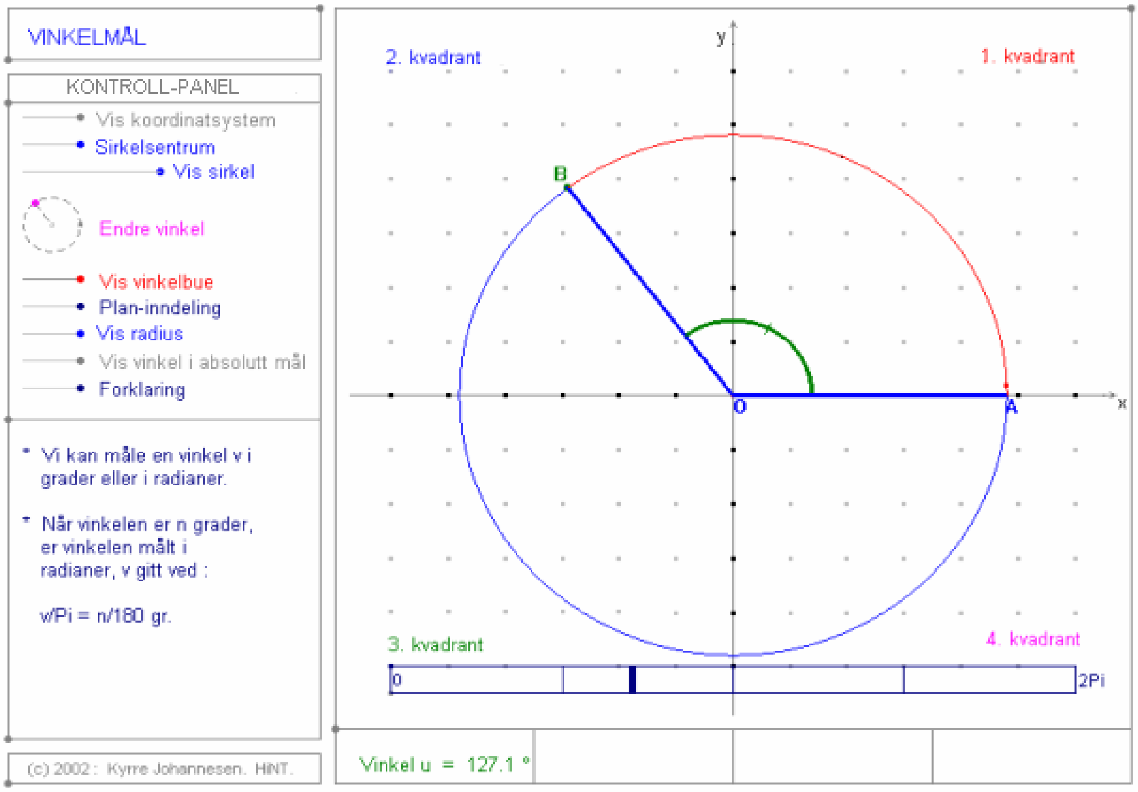
Konstant- og mellomregningsfelt :

Pi	=	3,14159265		A	=	-1,5708
				A	=	0,9273
				A	=	0,4636

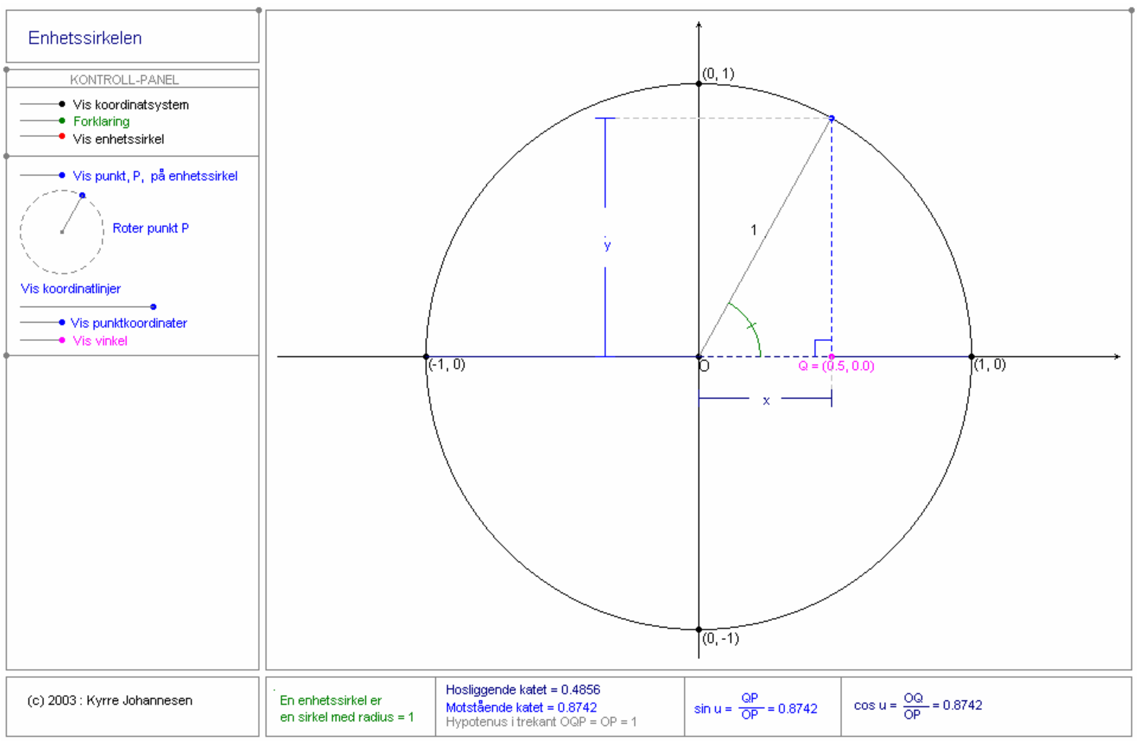
Høydemåling med Klinometer : Klinometer.fig



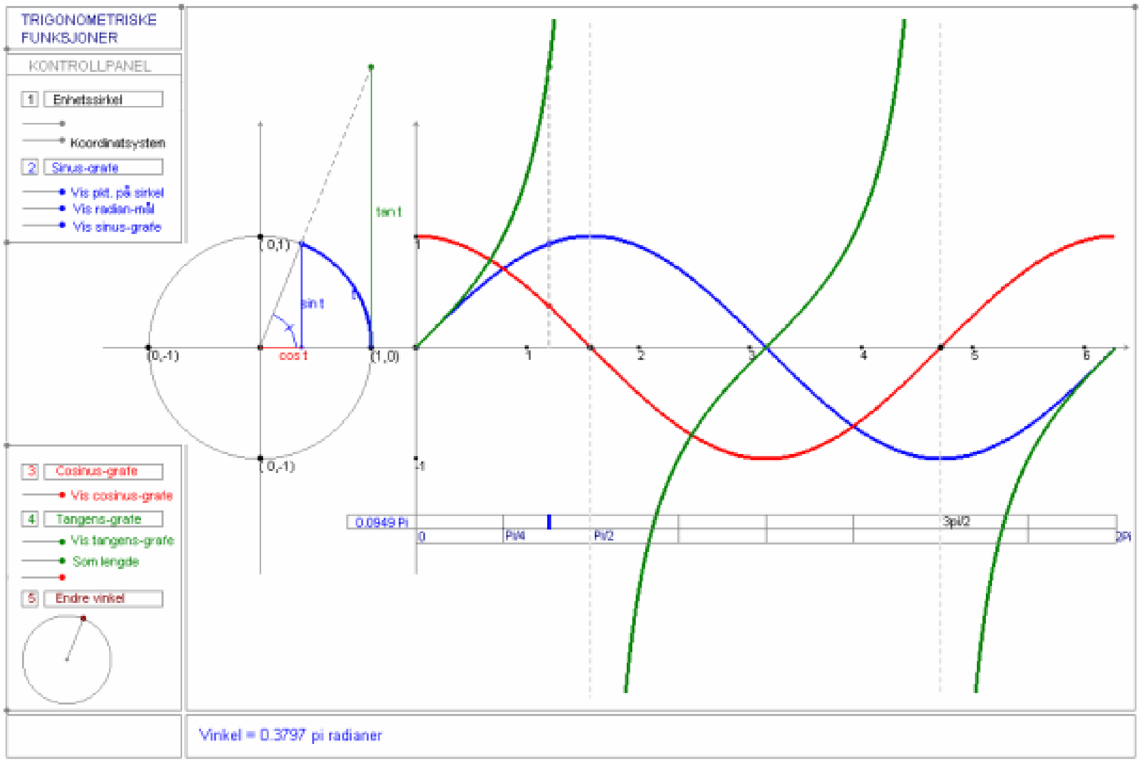
Vinkelmål i grader og i radianer : Vinkelmaal.fig



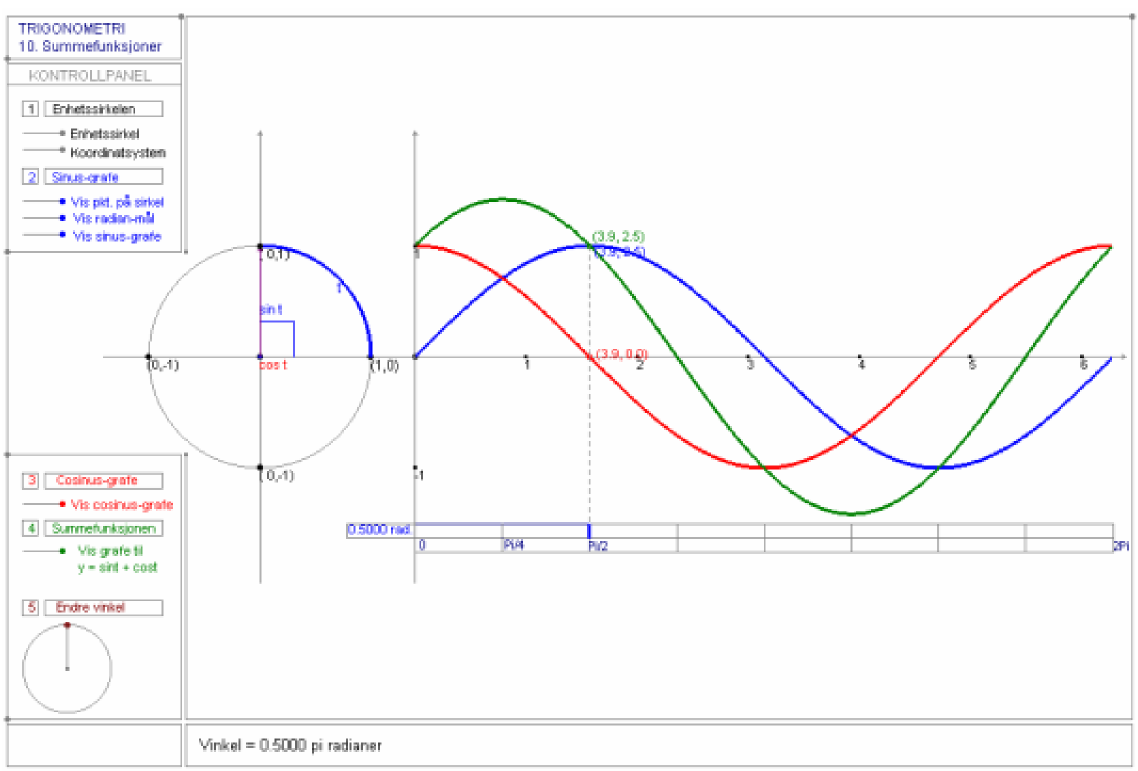
Enhetssirkelen : Enhetssirkelen.fig



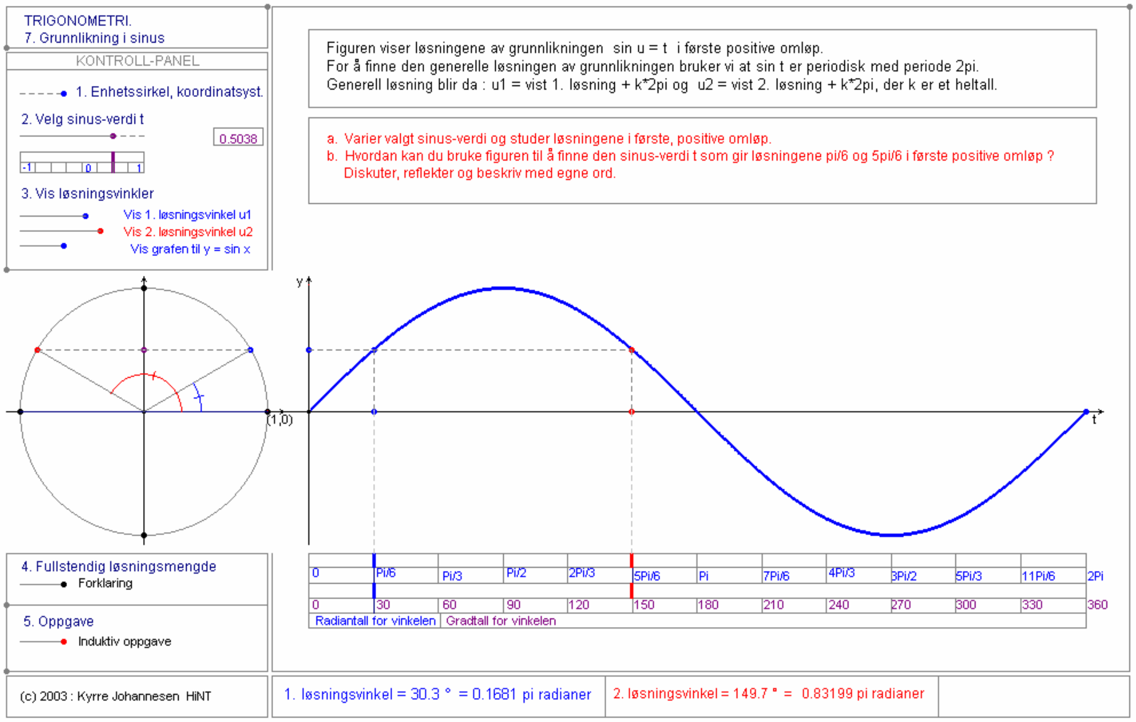
Grafene til de trigonometriske funksjonene : GrafeSinCosTan.fig



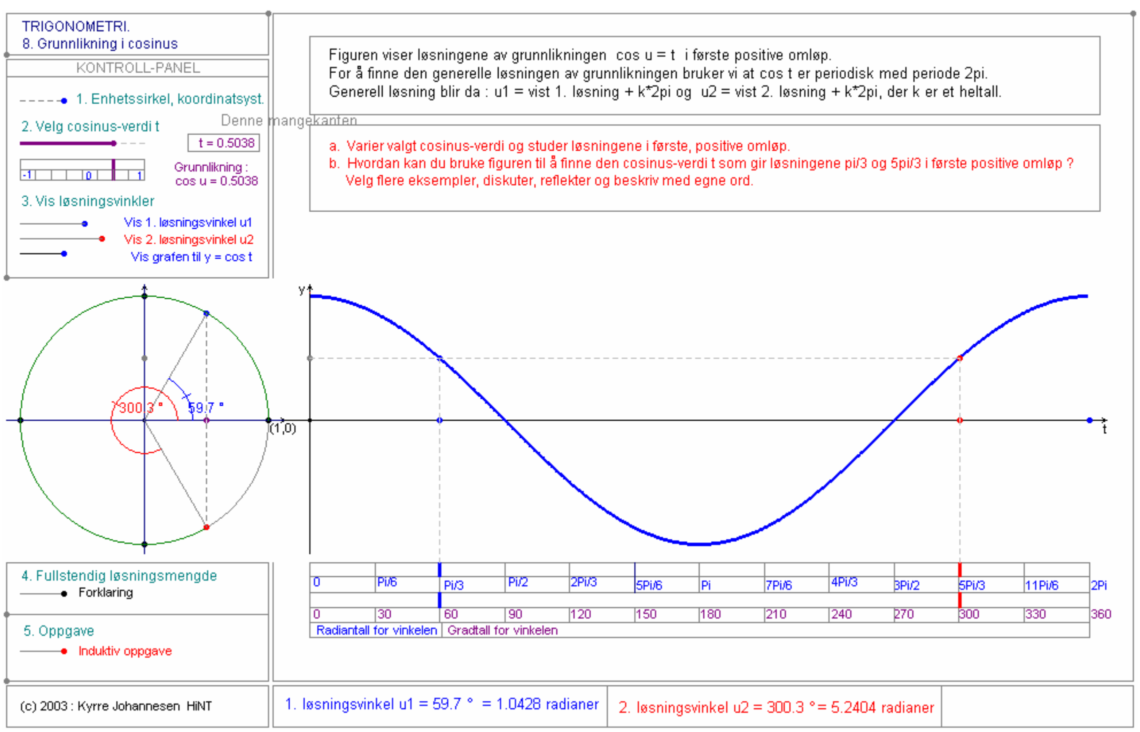
Grafer til sammensatte trigonometriske funksjoner : GrafesumSinCos.fig



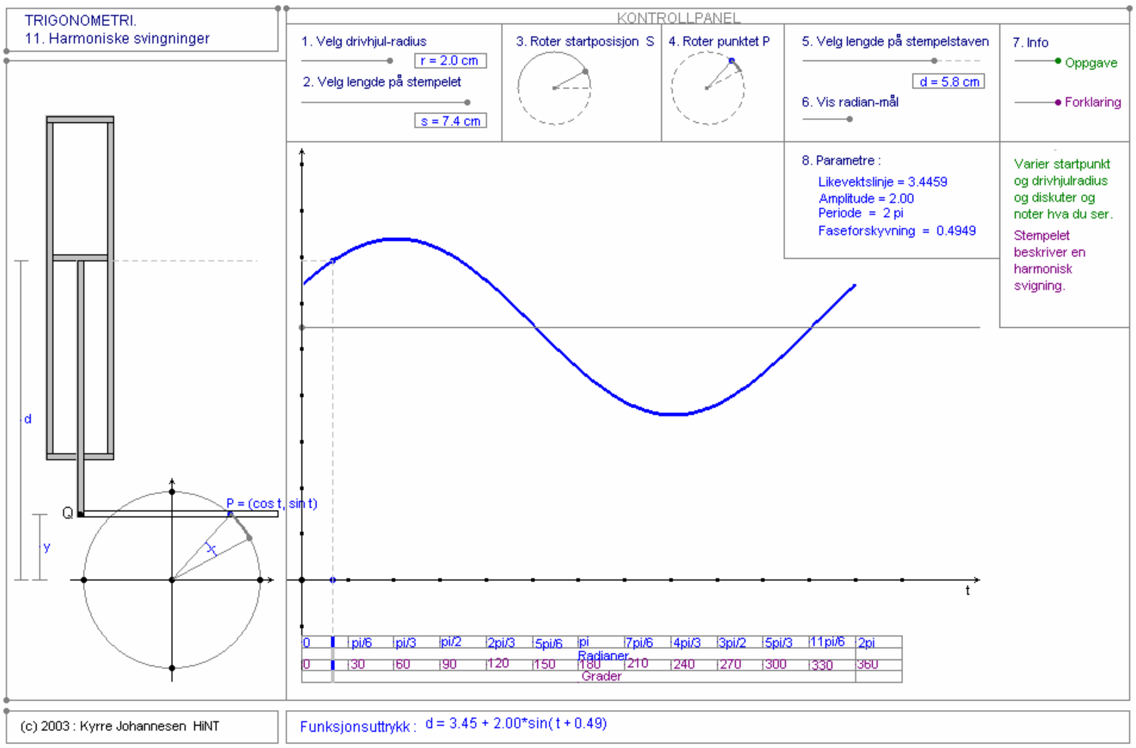
Grunnlikning i sinus : Grunnliknsin.fig



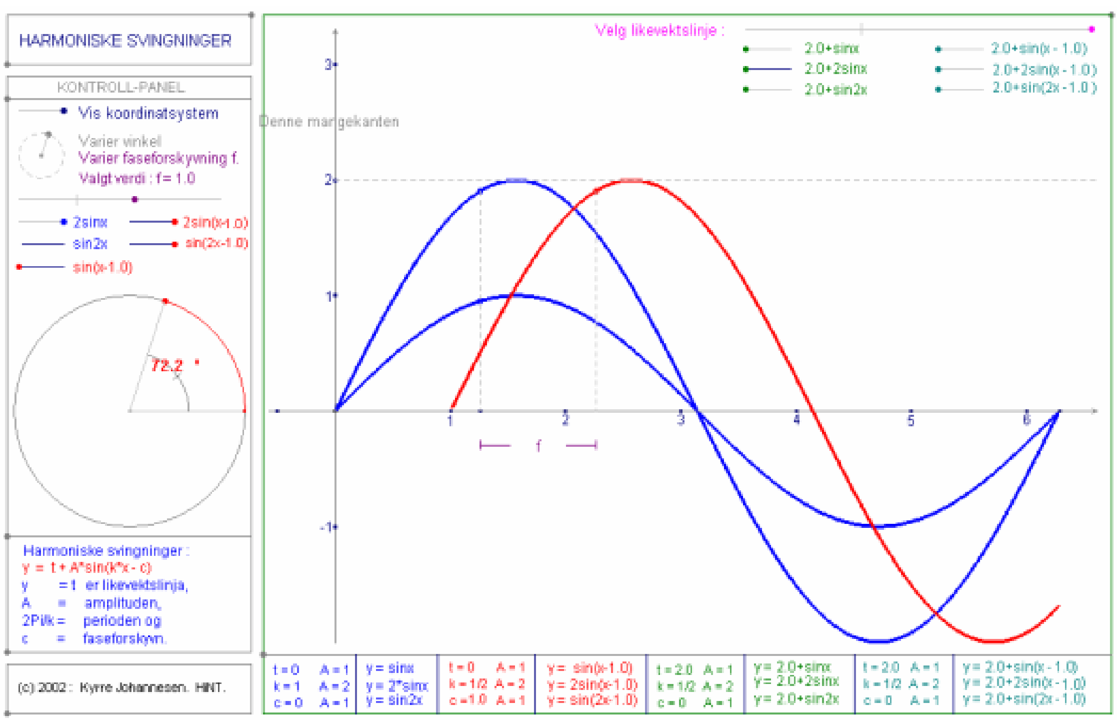
Grunnlikning i cosinus : Grunnlikncos.fig



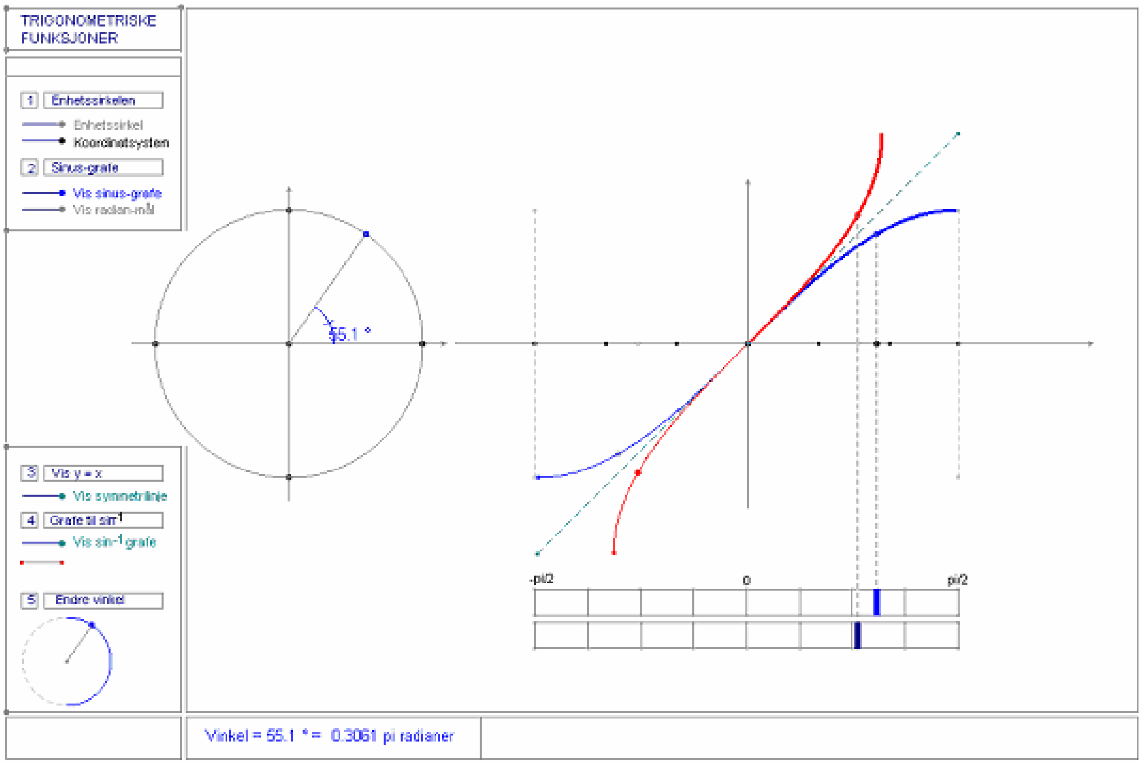
Harmoniske svingninger. Et eksempel. : Harmsvingn.fig



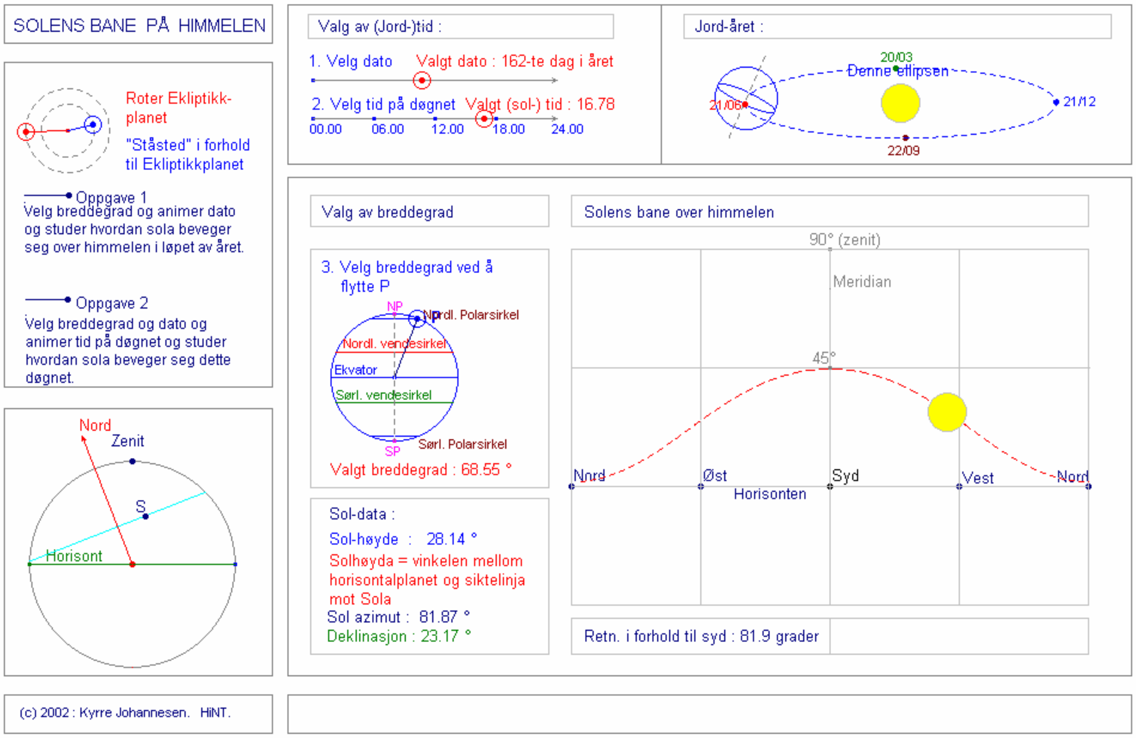
Harmoniske svingninger. : Harmsvingn2.fig



Grafen til den inverse funksjonen $y = \sin^{-1} t$: GrafeInvSin.fig



Solens gang. : Solensgang.fig.



11. Fasit

Kap.1.

1.1.5. a. $AC \approx 7{,}2\,\text{cm}$ b. $\sin A \approx 0{,}5547$, $\cos A \approx 0{,}8321$, $\tan A = \frac{2}{3}$

c. $\sin C \approx 0{,}8321$, $\cos C \approx 0{,}5547$, $\tan C = \frac{3}{2}$

d. $\sin C = \cos A$, $\cos C = \sin A$ og $\tan C = \frac{1}{\tan A}$

1.2.2 Hypotenusen = $a\sqrt{2}$, Lengste katet = $a\sqrt{3}$

1.3.10 a. Stigning = 9,5 % b. Stigningsvinkel = $5{,}4^\circ$

1.4.4 a. $\sin 32{,}3^\circ \approx 0{,}5344$, $\cos 57{,}7^\circ \approx 0{,}5344$

b. $\sin 12{,}9^\circ \approx 0{,}2233$, $\cos 77{,}1^\circ \approx 0{,}2244$ $\sin 12{,}9^\circ = \cos 77{,}1^\circ$, $\sin 32{,}3^\circ = \cos 57{,}7^\circ$

c. $\sin u = \cos(90^\circ - u)$

d. $\angle A = 38{,}7^\circ$

1.4.5 a. $\sin 41{,}3^\circ \approx 0{,}6600$, $\cos 59{,}2^\circ \approx 0{,}5120$, $\tan 54{,}4^\circ \approx 1{,}3968$

b. $\sin A = 0{,}2164 \Rightarrow \angle A \approx 12{,}5^\circ$ eller $\angle A \approx 180^\circ - 12{,}5^\circ = 167{,}5^\circ$

$\cos A = 0{,}9354 \Rightarrow \angle A \approx 20{,}7^\circ$ eller $\angle A \approx 360^\circ - 20{,}7^\circ = 339{,}3^\circ$

$\tan A = 0{,}3096 \Rightarrow \angle A \approx 17{,}2^\circ$

1.4.6 241,6 m

1.4.7 Omkrets $\approx 6{,}63 \cdot r$. Omkrets $\approx 33{,}1$ cm

1.4.8 Solhøyde = $4{,}3^\circ$

1.4.9 c. Høyden = $(30 \cdot \sqrt{3})\text{m} \approx 52{,}0$ m

1.4.13 $BC \approx 16{,}25\,\text{m}$, $\angle A \approx 40{,}5^\circ$, $\angle C \approx 49{,}5^\circ$

1.4.14 Stigning = $5{,}7^\circ$

Kap.2.

2.2.5 1 rad $\approx 57{,}3^\circ$

2.2.76 a. Tabell : b. $-135^\circ \approx 2{,}3562$ rad

Grader	210°	240^0	270°	315°	330°
Radianer	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

2.2.17 a. $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ b. $160^\circ = \frac{8\pi}{9}$ c. $-420^\circ = -\frac{7\pi}{3}$

d. $\left(\frac{150}{\pi}\right)^\circ = \frac{5}{6}$ radianer e. $\left(\frac{20}{\pi}\right)^\circ = \frac{1}{9}$ radianer

2.2.18 a. $\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$ b. $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$ c. $-\frac{2\pi}{3} = -120^\circ$

d. $-\frac{7\pi}{3} = -420^\circ$ e. $\frac{1}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$ f. $\frac{4}{3\pi} \approx 76{,}4^\circ$

2.2.19 2 radianer

2.2.23 3110 km fra Nordpolen. Breddegradsforskjell = $3{,}7^\circ$ som tilsvarer 411 km (langs lengdegrad).

2.2.24 384000 km

2.2.25 2,7 cm

2.4.8 a. $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\cos\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\cos\frac{11\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.4.9 $\sin(-1{,}87) = -0.95557$ $\cos(-1{,}87) = -0{,}29476$

2.4.11 I positive omløp for eksempel :

a. $\theta = 0^\circ$ eller $\theta = 180^\circ$ eller $\theta = 360^\circ$

b. $\theta = 90^\circ$ eller $\theta = 270^\circ$ eller $\theta = 450^\circ$

2.4.12 $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\cos(-\theta) = \frac{3}{5}$

$\sin(-\theta) = \frac{4}{5}$

2.4.14 $\sin t = 0{,}5 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ eller $t = \frac{5\pi}{6}$ og $\cos t = 0{,}5 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$ eller $t = \frac{5\pi}{3}$

2.5.9 $\sin 6{,}79 \approx 0{,}4854$ $\cos -2{,}00 \approx -0{,}4161$

2.5.11 a. $\sin t = -0{,}4731$ gir f.eks. $t \approx -0{,}4928$ b. $\cos t = 0{,}1112$ gir f.eks. $t \approx 1{,}4594$

c. $\sin t = 0{,}8989$ gir f.eks. $t \approx 1{,}1173$

2.5.12 a. $\theta \approx 0{,}3718$ eller $\theta \approx 2{,}7698$ b. $\theta \approx 0{,}1365$ eller $\theta \approx 6{,}1487$

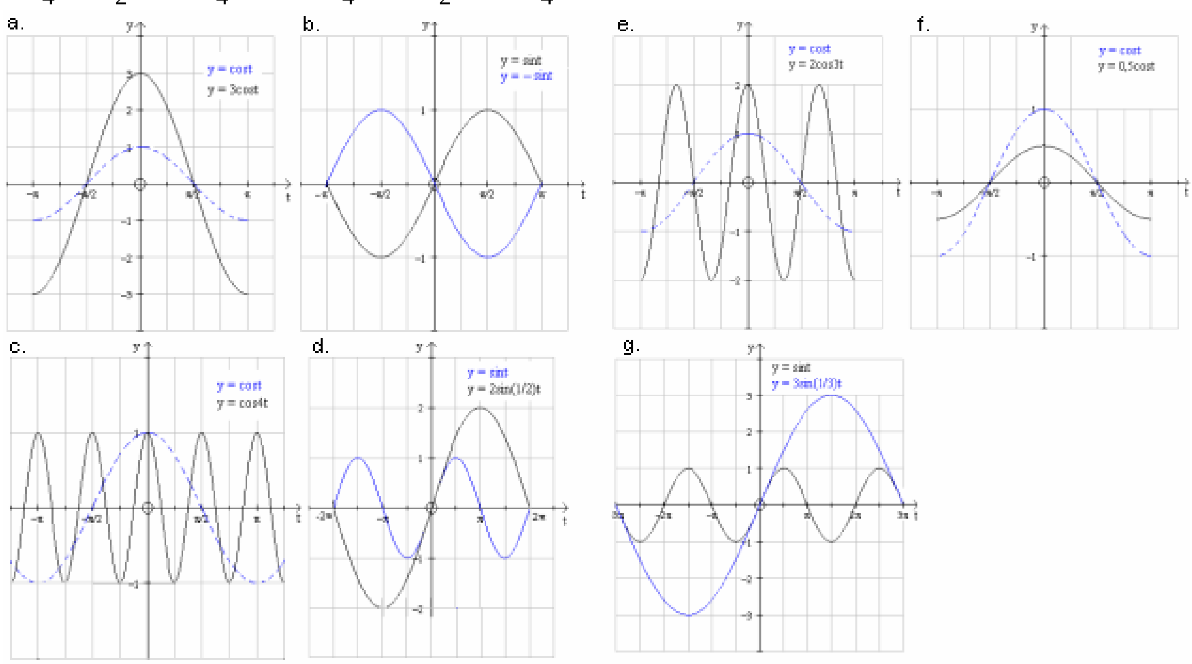
c. $\theta \approx 2{,}7105$ eller $\theta \approx 3{,}5727$ d. $\theta \approx 0{,}6000$ eller $\theta \approx 2{,}5416$

e. $\theta \approx 0{,}3007$ eller $\theta \approx 2{,}8408$ f. $\theta \approx 0{,}3617$ eller $\theta \approx 5{,}9132$

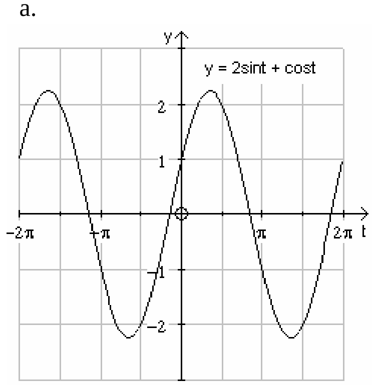
Kap.3.

3.1.3 $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{3\pi}{4}$ og $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{7\pi}{4}$

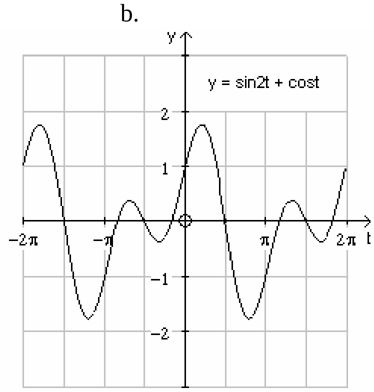
3.5.6



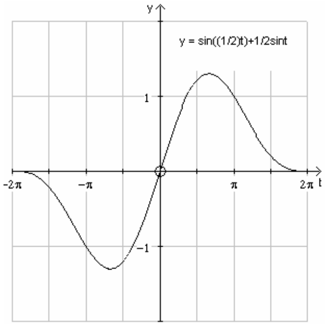
3.6.5 a.



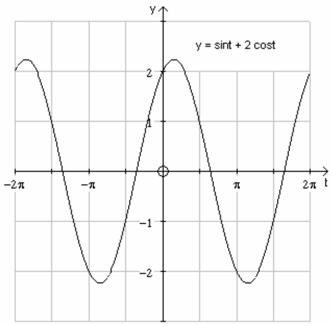
b.



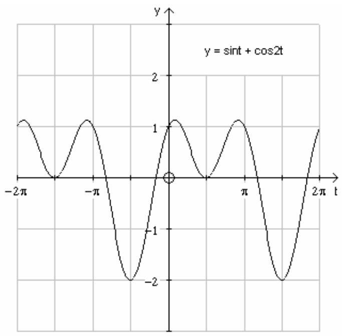
c.



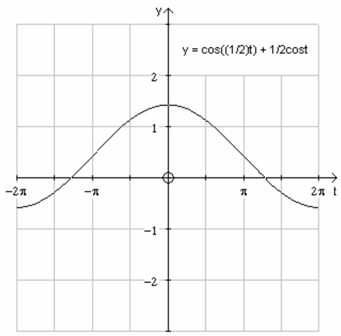
d.



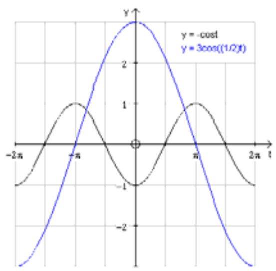
e.



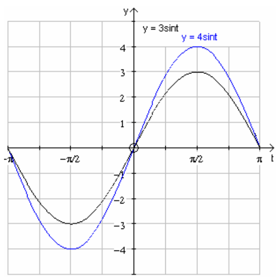
f.



3.6.6. a. og d.



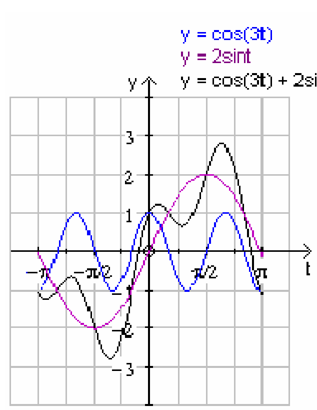
b. og c.



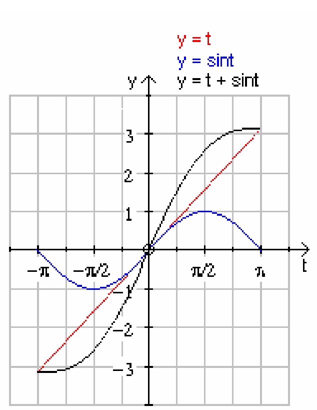
3.6.7.

	Periode	Amplitude
a	2π	1
b	2π	4
c	4π	3

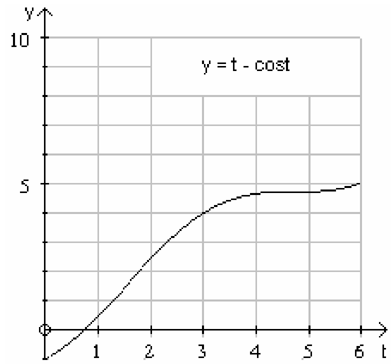
3.6.8 Grafe :



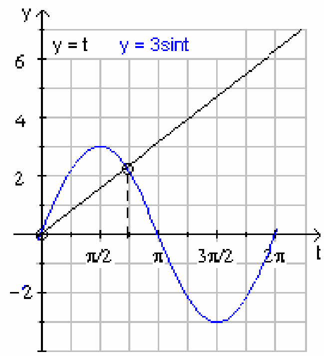
3.6.9 Grafe :



3.6.10 Grafe :



3.6.11 Grafe :



Løsninger :
t = 0 eller $t \approx 2{,}35$

Kap.4.

4.2.5. a. $\cos(s+t) = \cos(s-(-t)) = \cos s \cdot \cos(-t) + \sin s \cdot \sin(-t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t$

b. $\sin(s-t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s-t)\right) \overset{a.}{=} \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos(s-t) + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin(s-t)$

$= \sin(s-t) = \sin s \cdot \cos t - \cos s \cdot \sin t$

4.2.7. a. $\cos 2t = \cos(t+t) = \cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - \sin^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$

b. $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1$

4.2.9.

$$\begin{aligned}\sin 3t = \sin(2t+t) = \sin 2t \cdot \cos t + \cos 2t \cdot \sin t &= 2\sin t \cdot \cos t \cdot \cos t + (1 - 2\sin^2 t) \cdot \sin t \\ &= 2\sin t \cdot \cos^2 t + \sin t - 2\sin^3 t \\ &= 2\sin t \cdot (1 - \sin^2 t) + \sin t - 2\sin^3 t \\ &= 2\sin t - 2\sin^3 t + \sin t - 2\sin^3 t \\ &= 3\sin t - 4\sin^3 t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3t &= \cos(2t+t) = \cos 2t \cdot \cos t - \sin 2t \cdot \sin t \\ &= (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot \cos t - 2\sin t \cdot \cos t \cdot \sin t \\ &= \cos^3 t - (1 - \cos^2 t) \cdot \cos t - 2\sin^2 t \cdot \cos t \\ &= \cos^3 t - \cos t + \cos^3 t - 2(1 - \cos^2 t) \cdot \cos t = 4\cos^3 t - 3\cos t\end{aligned}$$

4.2.10. a.1. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ a.2. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ b.1. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ b.2. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

c.1. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c.2. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ d.1. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ d.2. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

4.2.11. a. $\cos 1$ b. $\cos 5$ c. $\sin \pi = 0$ d. $\frac{1}{2}$

4.2.12. a. $\sin(t+\pi) = \sin t \cdot \cos \pi + \cos t \cdot \sin \pi = -\sin t$

b. $\cos(t+\pi) = \cos t \cdot \cos \pi - \sin t \cdot \sin \pi = -\cos t$

c. $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \cos t \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -\cos t$

d. $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos t \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin t \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \sin t$

4.2.13. a. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ b. $\sin\beta = \frac{12}{13}$ c. $\sin(\alpha+\beta) = \frac{56}{65}$

d. $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{33}{65}$ e. $\sin(\alpha-\beta) = -\frac{16}{65}$ f. $\cos(\alpha-\beta) = \frac{63}{65}$

g. $\tan(\alpha+\beta) = -\frac{56}{65}$ h. $\tan(\alpha-\beta) = \frac{16}{33}$

4.2.14. a. $\sin 64^o$ b. $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ c. $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\cos 82^o$

4.2.15. a. $\cos t = -\frac{4}{5}$ b. $\sin 2t = -\frac{24}{25}$ c. $\cos 2t = \frac{7}{25}$

d. $\tan 2t = -\frac{24}{7}$

4.2.17. a. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ b. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ c. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75^o$

Kap.5.

5.1.9 a. $t = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

b. $t = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

c. $t \approx 0{,}9273 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t \approx 2{,}2143 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

d. $t = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t = \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

e. $t = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t = \frac{5\pi}{3} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

f. $t \approx 1{,}3694 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t \approx 4{,}9138 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

5.1.10 a. $t = \frac{\pi}{4} + k\cdot \pi \ , \ k \in Z$ b. $t = -\frac{\pi}{3} + k\cdot \pi \ , \ k \in Z$

c. $t \approx 0{,}4636 + k\cdot \pi \ , \ k \in Z$

5.2.7. a. $t = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$

b. $t = k\cdot\pi \ , \ k \in Z$ c. $t = k\cdot\pi \ , \ k \in Z$

d. $t = k\cdot\frac{\pi}{2} \ , \ k \in Z$ e. $t = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi \ , \ k \in Z$ eller $t = \frac{3\pi}{4} + k\cdot\pi \ , \ k \in Z$

f. $t = \frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2} \ , \ k \in Z$ g. $t = k\cdot\frac{\pi}{2} \ , \ k \in Z$ h. $t = -\frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2} \ , \ k \in Z$

i. $t = k\cdot\frac{\pi}{3} \ , \ k \in Z$

5.2.8. a. $t = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$

b. $t = k\cdot\pi \ , \ k \in Z$ el. $t = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi, k \in Z$

c. $t \approx 0{,}8213 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t \approx 2{,}3203 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

d. $t = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{7\pi}{4} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ eller $t = \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{5\pi}{4} + k\cdot 2\pi, k \in Z$

e. $t = k\cdot\pi, k \in Z$ el. $t = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$ eller $t = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$

f. $t \approx 1{,}2632 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t \approx 5{,}0200 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

5.2.9. a. $t = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi \ , \ k \in Z$

b. $t = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi \ , \ k \in Z$ eller $t = \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi \ , \ k \in Z$

5.2.10. a. $t \approx 1{,}100 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$ eller $t \approx 2{,}0416 + k\cdot 2\pi \ , \ k \in Z$

b. $t \approx 0{,}1700 + k\cdot\frac{2\pi}{3} \ , \ k \in Z$ eller $t \approx 1{,}9244 + k\cdot\frac{2\pi}{3} \ , \ k \in Z$

5.2.11. a. $\frac{3}{\tan\theta} = \frac{20\tan\theta - 10}{\tan\theta}$ b. $\theta \approx 0{,}5764 \ (33{,}0^o)$

5.2.12. Likning : $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = 2+\sqrt{3}$ Løsning : $\theta = \frac{\pi}{6}$

Kap.6.

6.2.9 a. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ b. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

c. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ d. $\tan^{-1} 0 = 0$

e. $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ f. $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

Kap.7.

7.1.8. a. $b \approx 20,9$, $c \approx 17,4$ og $\gamma = 55,5^o$

b. $\alpha = 42,8^o$, $b \approx 364,1$ og $c \approx 106,5$

c. $\beta = 56^o$ og $a = c \approx 53,3$

d. $\beta \approx 42,1^o$, $\gamma \approx 22,9^o$ og $c \approx 19,8$

e. $\alpha \approx 52,5^o$, $\gamma \approx 67,5^o$ og $c \approx 12,8$

f. $\alpha \approx 70,9^o$, $\gamma \approx 49,1^o$ og $c \approx 9,6$

7.1.9. Skogvokter A er 29,3 km fra C, mens skogvokter B er 20,5 km fra C.

7.1.10. $AC \approx 1766\,m$

7.3.3 a. $a \approx 12,5$, $\beta \approx 76,1^o$, $\gamma \approx 43,9^o$ b. $b = 8$, $\alpha = \gamma = 60^o$

c. $a \approx 72,5$, $\beta = 14,1^O$, $\gamma = 15,9^O$ d. $\alpha \approx 30,6^o$, $\beta \approx 66,2^o$ og $\gamma \approx 83,2^o$

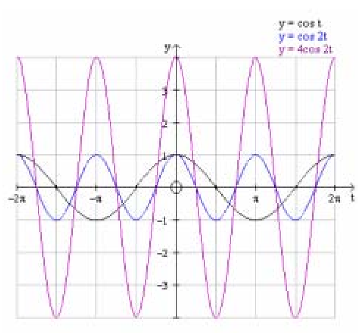
7.3.4 Avstanden mellom løperne kl. 15.00 er 37,4 km.

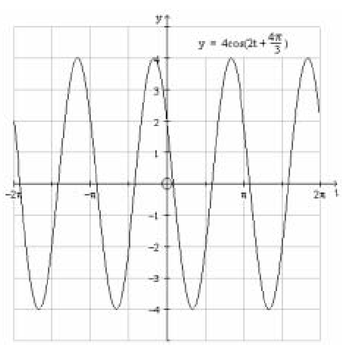
7.3.5 a. Største vinkel = $106,1^o$. b. $A \approx 670\,m^2$

7.3.6 Lengden av vannet $\approx$ 922 m.

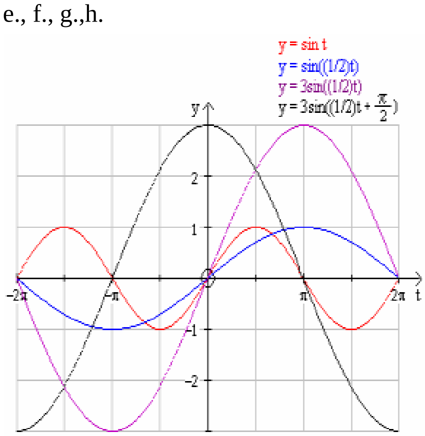
7.3.7 a. $A \approx 212\,m^2$ b. $A \approx 5,5\,m^2$ c. $A \approx 2253\,m^2$

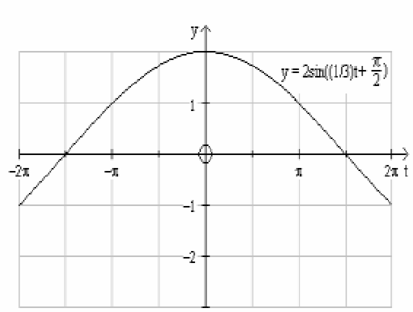
7.4.10 a., b., c. d.





e., f., g.,h. i.

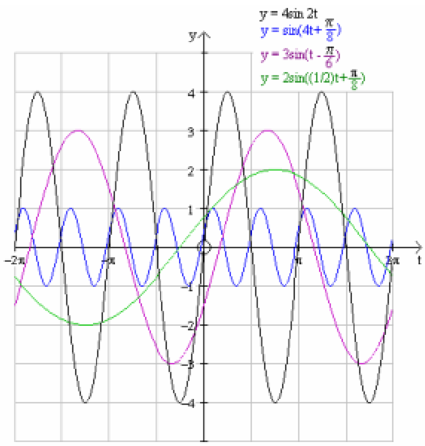


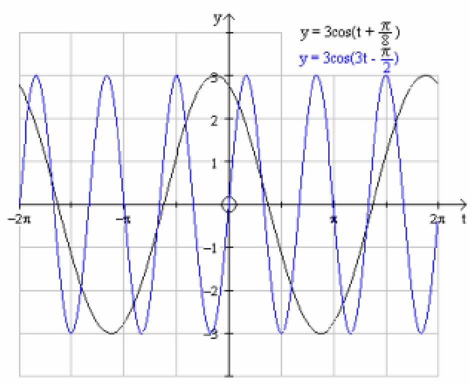


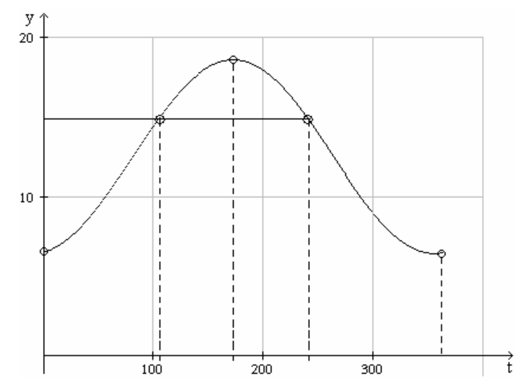
7.4.11

	Likevektslinje	Periode	Amplitude	Faseforskyvning
a.	$y = 0$	π	4	0
b.	$y = 0$	2π	3	$-\frac{\pi}{8}$
c.	$y = 0$	$\frac{\pi}{2}$	1	$-\frac{\pi}{32}$
d.	$y = 0$	$\frac{2\pi}{3}$	3	$\frac{\pi}{6}$
e.	$y = 0$	2π	3	$\frac{\pi}{6}$
f.	$y = 0$	4π	2	$\frac{\pi}{4}$

Grafer : a. , c. , e. , f. b. , d.







7.5.5.

a. $$g(t) \approx 12{,}5 + \sqrt{37}\cdot\cos\left[\frac{2\pi}{365}\cdot(t - 172{,}9)\right]$$

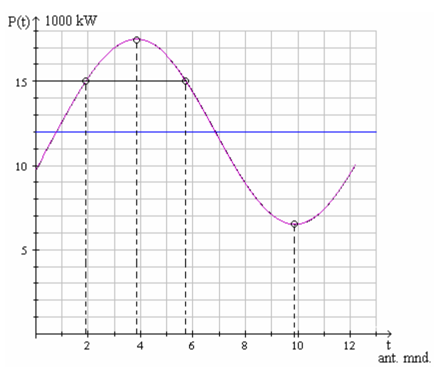
b. Likevektslinje $y = 12{,}5$, Amplitude $= \sqrt{37}$

Periode $= 365$, Faseforskyvning $= 172{,}9$

c. 1. Januar er sola oppe kortest, dvs. i 6,4 timer og ca. 15. juni er sola lengst oppe, dvs. i 18,6 timer.

d. Grafe ovenfor.

e. Sola er oppe 15 timer ca. 16. April (t = 106) og ca. 1 september (t = 240).



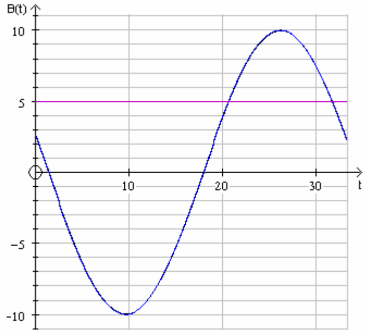
7.5.6. a. $$P(t) = 12 + 5{,}5\cdot\cos\left[0{,}52\left(t - 3{,}8419\right)\right]$$

Likevektslinje : $y = 12$, Amplitude : 5,5

Periode : 12,1 , Faseforskyvning : 3,8419

b. Grafisk : Produksjonen er størst i Mars.

c. Produksjonen er på 15000 kW i Februar og i Juni. (t = 1,9 el. t = 5,8)



7.5.7. a. $B(t) \approx 10 \cdot \cos[0{,}19(t - 26{,}2)]$

b. Funksjonen har periode $\frac{2\pi}{0{,}19} \approx 33$. Det tar altså 33 dager mellom hver gang hennes biorytme er på topp.

c. Halvparten av maksimalverdien $= \frac{10}{2} = 5$.

Hun bør få prøver lagt mellom 21. og 31. dag i måneden.

7.5.8 For eksempel $I(t) = 120 + 510 \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{24}(t - 12)\right]$, for $6 \le t \le 18$

Kap.8.

8.3.5. a. $f'(t) = 5\cos t - 3\sin t$ b. $f'(t) = 4\cos^2 t - 4\sin^2 t$

c. $f'(t) = 10\cos 2t$ d. $f'(t) = -3\sin 2t$

8.3.6. a. $t \approx 1{,}0304 + k \cdot \pi$, $k \in Z$.

b. For funksjonen i 8.3.5.c. : $t = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

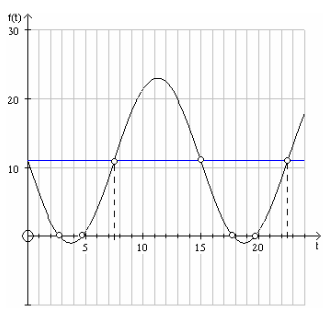
c. Maksimalpunkter : $\left(\frac{\pi}{4}, 5\right)$ og $\left(\frac{5\pi}{4}, 5\right)$

Minimalpunkter : $\left(\frac{3\pi}{4}, -5\right)$ og $\left(\frac{7\pi}{4}, -5\right)$

8.3.8. a. Temperaturen er i ferd med å synke med 1,06 ^{o}C pr. time kl. 22.

b. Høyste temperatur kl. 16 , er 5 ^{o}C og laveste temperatur kl. 04 er -3 ^{o}C .

8.3.9. a. Bølgens periode er 15.



b. Havnen er tørrlagt mellom t = 2,8 og t = 4,7 og mellom t = 17,8 og 19,7. (dvs. mellom kl. 02.48 og 04.28 og mellom 17.48 og 19.42)

c. Vanndybden er i ferd med å stige raskest kl. 07.30 og kl. 22.30.

Kap.9.

Fasit for oppgavesamlingen i kap.9. gis ut som papirkopi senere.