Arbeidsnotat

IKT i matematikkundervisningen

Dynamisk geometri med
Cabri Geometri II+

Kyrre Johannesen

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Arbeidsnotat nr 216

Steinkjer 2007

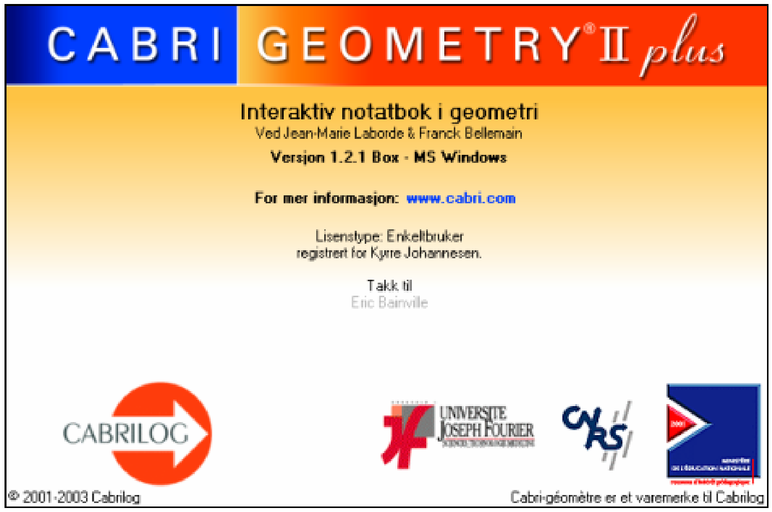
HØGSKOLEN I NORD-TRØNDELAG

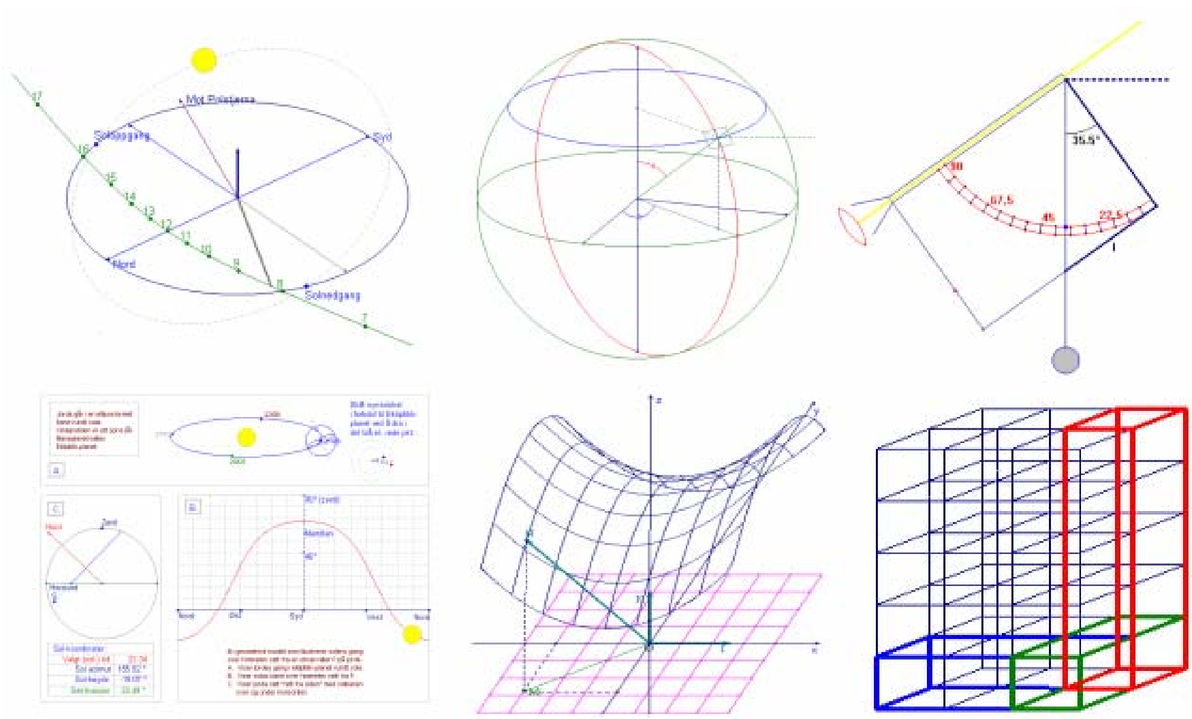
IKT i matematikkundervisningen

Dynamisk geometri med
Cabri Geometri II+

Kyrre Johannesen

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Arbeidsnotat nr 216
Avdeling for sykepleier-, ingeniør- og lærerutdanning
ISBN 82-7456-497-9
ISSN 1501-6285
Steinkjer 2007





IKT i matematikkundervisningen: Dynamisk geometri med Cabri Geometri II+

Intro

Dette heftet er tenkt som et støttehefte for å lære å bruke det dynamiske geometriprogrammet **Cabri geometri II pluss**. Heftet inneholder en kortfattet oversikt over de viktigste funksjonene i **Cabri** og hvordan de kan brukes. Hovedvekten er lagt på eksempler og mange oppgaver for å lære programmet å kjenne. Det er tatt med løsninger for noen av oppgavene.
Leseren kan godt starte med startoppgavene i kapitel 2 og bruke kapitel 1 med eksempler til støtte i arbeidet. I resten av kapitel 2, finnes en hel rekke utforskings- og problemløsingsoppgaver i tillegg til en hel del andre oppgaver som illustrerer **Cabri**-programmets muligheter. I siste del av kapitel 2 gis en beskrivelse av et tverrfaglig undervisningsopplegg der bruk av Cabri-programmet inngår.
I kapitel 3 gir vi en kortfattet historisk og fagdidaktisk bakgrunn og oversikt over såkalt dynamiske geometri-programmer (**DGP**), som **Cabri** er ett eksempel på.

Innhold

1. Oppstart, menyer, pekere og pekermeldinger

1.1 Oppstart

Når du starter opp **Cabri Geometre II Pluss**, blir du møtte av følgende skjermbilde:

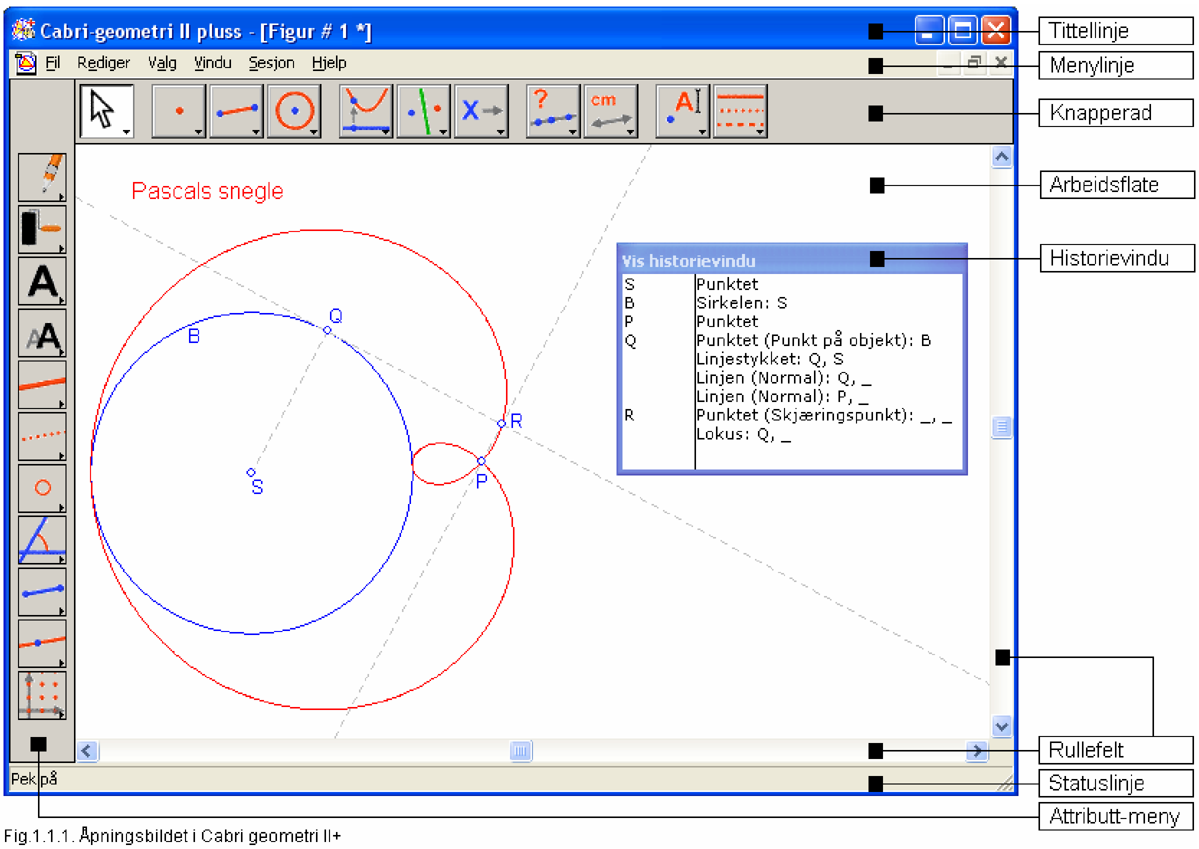


Fig.1.1.1. Åpningsbildet i Cabri geometri II+

Vi ser at skjermbildet inneholder de kjente Windowselementente. Du finner en ***tittellinje øverst*** med programnavnet lengst til venstre, etterfulgt av navnet på den figur du er i ferd med å arbeide med. Dersom du ikke har lagret den under noe navn, forslår Cabri en arbeidstittel av typen Figure #n der n er nummeret på figuren dersom du har flere åpne.
I linjen under finner du en ***menylinje*** bestående av de 6 menyene **Fil, Rediger, Valg, Vindu, Sesjon** og **Hjelp.**

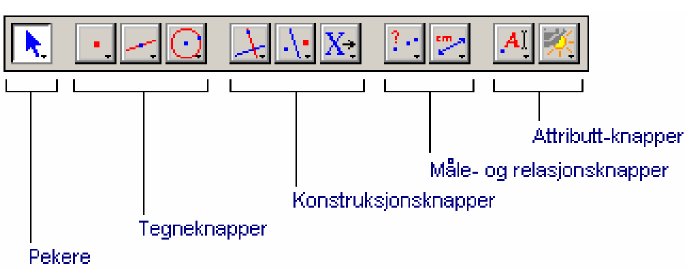


Fig.1.1.2 Knapperadsmenyen

Rett over ***arbeidsflaten*** finner du en ***Knapperadsmeny*** bestående av 11 ***knapperadsmenyer*** vist i fig.1.1.2 til venstre.
Den første er en gir en peke- og rotasjons-meny, de tre neste tegneknappene gir menyer for å tegne ulike frie objekter. Deretter følger tre konstruksjonsmenyer som gir deg anledning til å konstruere relasjoner mellom og for de frie objektene. (avhengige objekter) Nest lengst til høyre finnes knapper som gir menyer for å måle og undersøke relasjoner mellom de frie og de avhengige objektene og lengst til høyre finnes to attributtknapper som gir deg anledning til å utstyre frie og avhengige objekter med farge, stiler, navn med mer og til å skjule objekter.
Ellers likner åpningsskjermbildet i Cabri Geometri II Pluss på skjermbildet i andre Windowsbaserte programmer så som Word og Excel.

1.2 Menylinjen i Cabri Geometri II Pluss

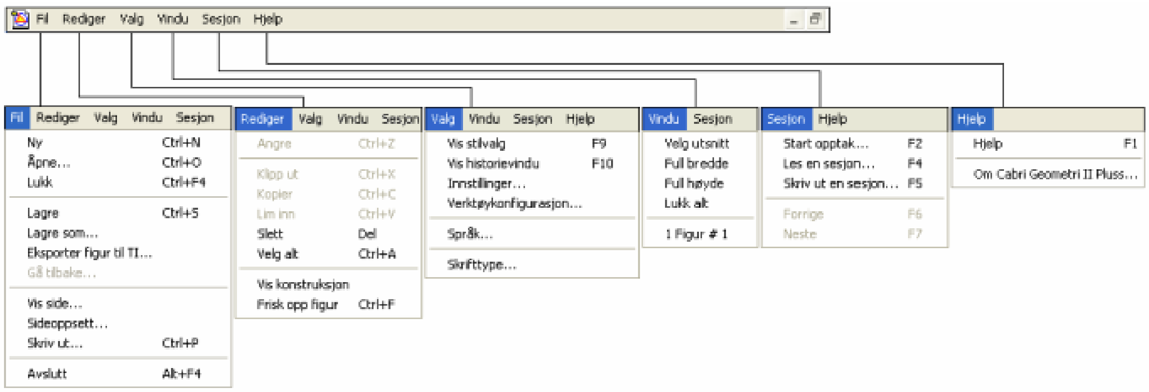


Fig.1.2.1 Menyradsmenyene

I menylinjen finner du 6 ulike menyer. Menyvalgene her er de vanlige Windows-menyvalgene og vi skal bare kommentere dem etter hvert som vi får bruk for dem.
Leseren kan imidlertid merke seg at til høyre i menyen står det for de fleste av menyvalgene nevnt en tastekombinasjon som populært kalles en hurtigtast-kombinasjon. Denne kan brukes direkte fra tastaturet for å slippe å gå inn i menyene for å gjøre valgene der.

Eks1.2.2 - I filmenyen ved siden av menyvalget **<u>S</u>kriv ut …** står ***hurtigtast***-kombinasjonen **Ctrl + P**. Dette betyr at om du holder Ctrl-tasten nede mens du trykker en gang på P-tasten, så skrives konstruksjonen din ut. Dette kan du altså gjøre i stedet for å gå inn i **<u>F</u>il**-menyen og klikke på meny-valget **<u>S</u>kriv ut** noe som tar lengre tid.

- I menyen **Valg** finner vi ved siden av menyvalget ***Vis historievindu hurtigtast***en **F10**. Dette betyr at om du trykker **funksjonstasten F10** ned en gang vises ***historievinduet*** i arbeidsflaten. Trykker du **F10**-tasten en gang til, fjernes historievinduet igjen.

- Et tredje eksempel finner du i Hjelp-menyen lengst til høyre. Ved siden av menyvalget Hjelp finner du ***hurtigtast***en **F1.** Dette betyr at om du trykker ned F1-tasten, så slås en hjelpetekst nederst i arbeidsflaten på. Denne hjelpeteksten gir en forklaring til hver valgt menyfunksjon i knapperadsmenyen. Trykker du F1-tasten en gang til, fjernes hjelpeteksten.

Vi kommer altså tilbake til de ulike menyvalgene i framstillingen framover, men kan her nevne et par – tre viktige menyfunksjoner:

Fil-menyen	:	**Eksporter figur til TI**	Lagre en figur slik at den kan leses av Cabri-programmet i Texas Instruments-kalkulatoren.
Rediger-menyen	:	**Vis konstruksjon**	Bla gjennom en konstruksjon. Dette kan f.eks. være nyttig for å se hvordan elever/studenter utfører sine konstruksjoner.
Sesjon-menyen	:	**Start opptak**	Gjør det mulig å lagre en serie av utførte deler en konstruksjon og spille dem av steg for steg etterpå ved hjelp av F7-tasten. (F6 for å bla tilbake.)

1.3 Knapperadslinjen

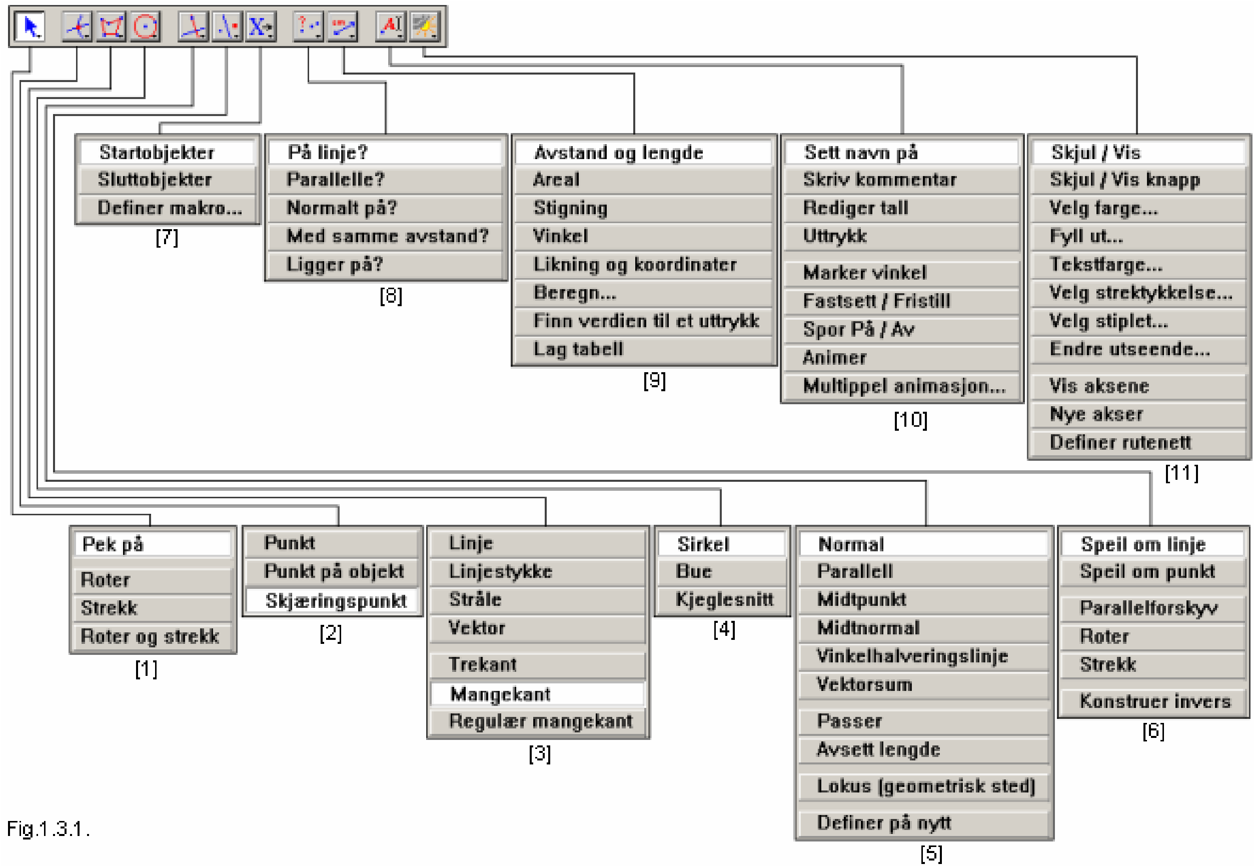


Fig.1.3.1.

Knappene fungerer slik at om vi peker på en knapp med musepekeren trykker og holder venstre mustast nede, faller en meny av ulike valg ned. Nederst i skjermbildet finner vi under det horisontale rullefeltet en meldingslinje der Cabri gir forklarende tekst til ulike funksjoner og menyvalg.
I figur 1.3.1 vises en oversikt over hvordan knapperadsmenyene er bygget opp. Her skal vi finne ut av hvordan et utvalg av disse funksjonene kan brukes ved hjelp av noen eksempler.

Før vi starter skal vi se nærmere på noe som kan volde litt bry når en starter bruken av Cabri. Når du bruker musa vil pekeren, eller "skrivermerket" om du vil, endre utseende og når du peker på et tegnet eller konstruert objekt vil en pekermelding vises.

1.4. Pekere og pekermeldinger i Cabri

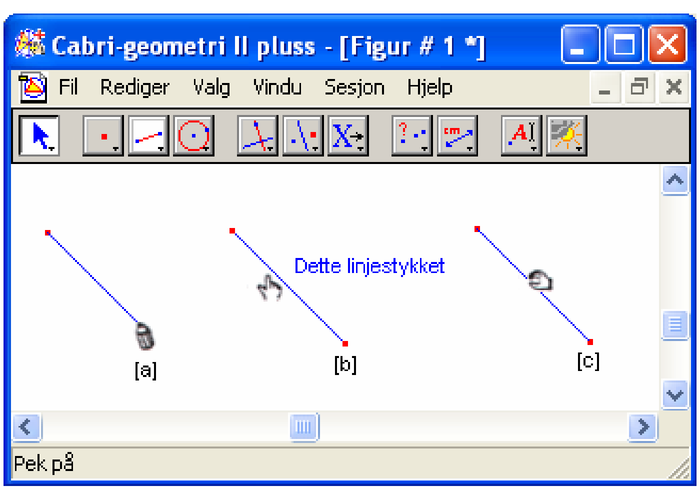


Fig.1.4.1.

Eks.1.4.2 La oss si at du skal tegne et rett linjestykke. Du velger **Linjestykke** fra meny [3] i knapperaden. Deretter flytter du skrivemerket ut på arbeidsflaten og pekeren forandrer seg til en blyant. Du klikker en gang med venstre mustast og drar ut linjestykket så langt og i den retningen du ønsker. Deretter klikker du en gang til for å markere endepunktet. Dersom du nå velger **Pek på** fra første knapp til venstre og peker på linjestykket, endres pekeren til en pekende hand ([b]) og dersom vi trykker ned venstre mustast, holder og drar, endres pekeren til en draende hand ([c]).

I figur 1.4.3 nedenfor er vist en oversikt over ulike typer pekere du møter i Cabri. Vi skal kommentere dem etter hvert som vi møter dem i eksemplene utover.

PEKER	IKON	FUNKSJON
Pek på		Pekeren befinner seg på på menyraden, knappraden eller i rullefeltene
Kors		Pekeren er aktiv
Tegneblyant		Vi kan tegne et objekt
Valgblyant		Vi kan tegne et objekt, utføre en konstruksjon eller plassere et punkt på et objekt
Handa peker		Et objekt kan velges
Handa velger		Et objekt er avhengig eller pekeren befinner seg mellom valg av objekt eller flytting av det
Handa drar		Et objekt kan flyttes
Åpen hand		CTRL-tasten er trykket ned
Handa griper		Vi kan rulle vinduet ved å bruke musa
Forstørrelsesglass		En tvetydighet har oppstått og et objekt må velges fra en meny
Tekstmarkering		Vi kan skrive inn eller redigere tekst
Pensel		Vi kan endre farge eller andre egenskaper ved et objekt
Malingsspann		Et objekt kan fylles med et mønster eller en farge
Kors med piler		Vi kan skrive inn en kommentar
Kolonnebredde		Kolonnebredden til en tabell kan endres

Fig.1.4.3. Pekere og pekerfunksjoner

Det er spesielt viktig når vi bruker musa enten til å peke og ta fatt i tegnede eller konstruerte objekter å legge merke til pekermeldingen som kommer opp ved siden av pekeren. Denne meldingen forteller oss hva vi er i ferd med å gjøre.
La oss starte med en sekvens av eksempler som viser hvordan menyfunksjonene, menyvalgene på knapperadsmenyen og pekerne med pekermeldinger virker.

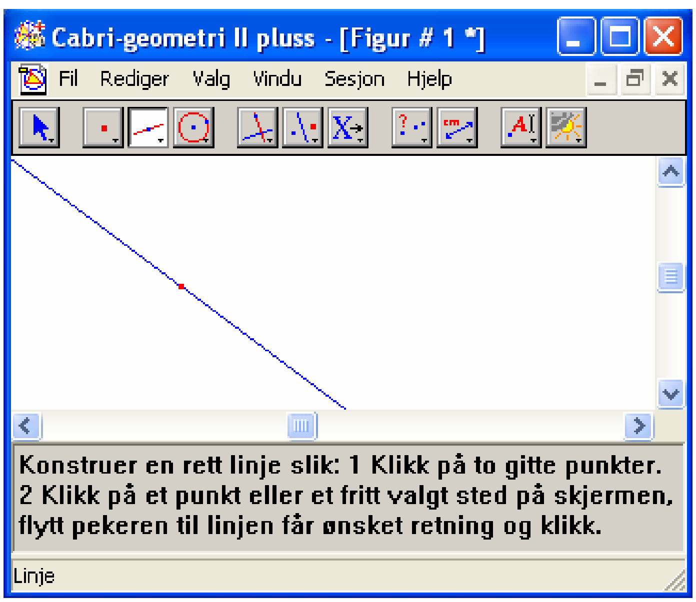
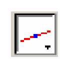


Fig.1.4.5. Konstruksjon av ei rett linje, to punkter på linja og en trekant gjennom punktene på linja og et tredje punkt utenfor linja

Eks.1.4.4. Vi skal konstruere følgende objekter i planet: Ei rett linje, to forskjellige punkter på denne linja og en **trekant** som går gjennom disse to punktene og gjennom et tredje punkt utenfor linja.
La hjelpetekstfunksjonen være påslått ved å trykke F1-tasten.
Klikk først på menyknappen  og hold venstre mustast nede. Meny [3] faller da ned.
Klikk så på **Linje** og beveg pekeren ut på konstruksjonsflaten. Merk at menyknapp [3] da har linjeikonet, noe som betyr at menyfunksjonen **Linje** er slått på. Denne funksjonen vil våre slått på til du gjør et annet menyvalg. Dette betyr blant annet at du kan tegne flere rette linjer etter hverandre uten å gå til menyen på nytt.
Klikk så et sted i arbeidsflaten, dra ut linjen i den retningen du vil ha den og klikk en gang til. (fig.1.4.5)
Klikk deretter på **Punkt** i menyknapp [2] og pek et sted på linja og klikk. (Her kunne du også brukt menyvalget **Punkt på objekt**.) Klikk til slutt et sted i arbeidsflaten utenfor linja. Da har vi ei rett linje med to punkter og et punkt utenfor linja. Trekanten konstrueres ved å klikke på menyknapp [3] igjen velge menyfunksjonen **Trekant**. Legg merke til hjelpeteksten nedenfor arbeidsflaten som forteller hvordan en trekant kan konstrueres. (Fig.1.4.6 på neste side)

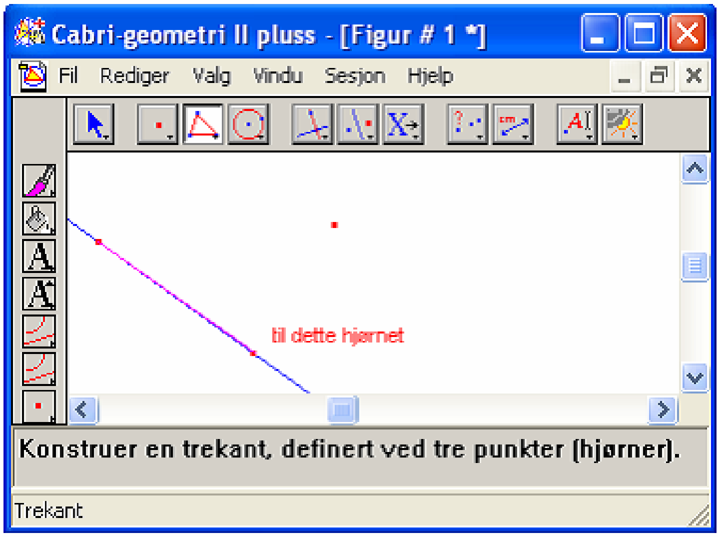


Fig.1.4.6.

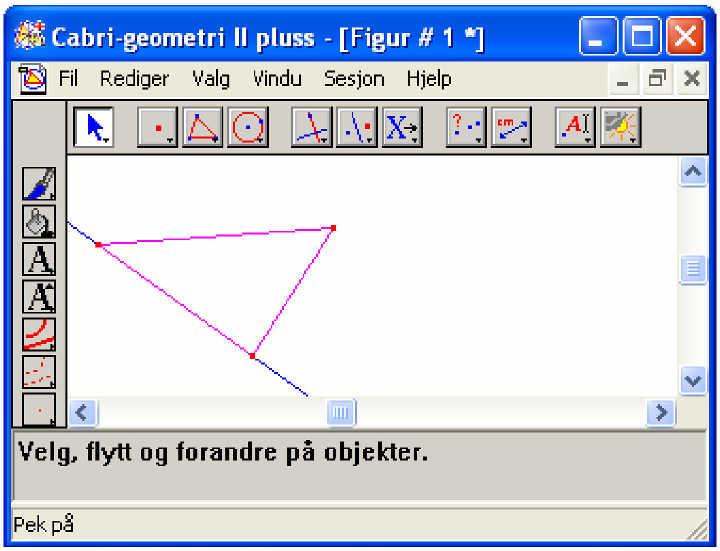


Fig.1.4.7.

Du skal peke på punktene som skal utgjøre hjørnene i trekanten etter tur, og klikke med venstre mustast, slippe tasten og dra ut sidekanten mot neste hjørne, klikke, slippe og dra til siste hjørne og til slutt klikke og slippe.
Vi kan kalle denne teknikken **Klikk-slipp-dra(-og-klikk)**.
Legg også nøye merke til pekermeldingene underveis i konstruksjonen:

- Når du peker på første punkt, vises meldingen **Fra dette hjørnet**
- Når du peker på neste hjørne, vises meldingen **Til dette hjørnet**
- og når tredje punkt pekes på, vises også meldingen **Til dette hjørnet**.

Etter dette skal konstruksjonen se ut som i figur 1.4.7 til venstre.
Merk at linja ikke var nødvendig for å konstruere trekanten, det hadde vært tilstrekkelig med tre ulike punkter.
Siden to av punktene ligger på den rette linja, vil denne sidekanten i trekanten alltid ligge på linja, mens det tredje punktet kan beveges fritt.

Eksemplet gir oss anledning til å forklare forskjellen på tegnede objekter og konstruerte objekter i Cabri. Bruker du menyfunksjoner fra menyene [2], [3] eller [4] til å tegne objekter som f.eks. punkter, linjestykker, linjer, ståler, vektorer, sirkler osv., kan disse objektene flyttes og endres fritt etterpå. Vi kaller dem derfor for ***frie*** objekter. Bruker du derimot menyene [5] eller [6] til å konstruere relasjoner til eller mellom slike frie objekter, så kan disse ikke flyttes eller endres fritt. Vi kaller dem derfor ***avhengige*** objekter.
I eksempel 1.4.4 er linja og det tredje punktet frie objekter og kan flyttes eller endres fritt. Trekanten kan derimot ikke flyttes fritt eller endres helt fritt, siden to av hjørnene er knyttet til linja. Flytter vi linja eller endrer retning på den, følger den ene sidekanten i trekanten med. Det tredje frie punktet ligger derimot i ro.

Oppg.1.4.8.
a. Utfør konstruksjonen i eksempel 1.4.4.
b. Prøv å flytte de to punktene som ligger på linja. Hva skjer?
c. Flytt deretter på linja og legg merke til hva som skjer med trekanten.
Du flytter på linja ved å peke på den utenfor trekanten, klikke og holde og dra.
d. Prøv å flytte hele trekanten på samme måten som linja. Hva skjer? Forklar.

Knappemeny [3] inneholder også et par nyttige valg når det gjelder å konstruere **polygoner**. Vi kan f.eks. prøve menyvalget **Regulære Mangekanter** (**Polygoner**).

Oppg.1.4.9. Klikk på **Regulær Mangekant** og før muspekeren ut på konstruksjonsflaten. Klikk i et punkt i konstruksjonsflaten og dra ut en sirkel. Klikk en gang til og dra og en mangekant kommer fram. Drar du sirkelen rundt, forandres antall sidekanter i det regulære polygonet. Dra til du ser en trekant. Klikk deretter en gang til og trekanten kommer fram.
Gjenta prosessen og konstruer en firkant, en femkant, en sekskant, en syvkant og en åttekant. Merk deg at Cabri holder orden på antall kanter med et tall i parentes i sentrum av mangekanten, og programmet tar automatisk vare på regulariteten, dvs. at alle sidekantene i polygonet skal være like lange. Skjermbildet ditt skal da se omtrent ut som figur 1.4.10 nedenfor.

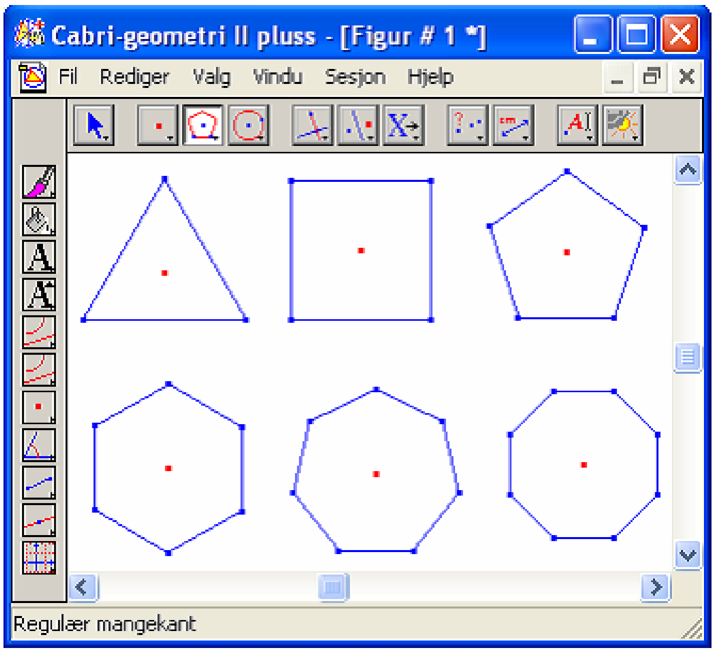


Fig.1.4.10. Regulære mangekanter.

Alle disse mangekantene er regulære, dvs. at i hver mangekant er alle sidekantene like lange og alle hjørnevinklene like store.
Konstruksjonen av regulære mangekanter er altså innebygget i Cabri. Å konstruere en regulær trekant (likesidet trekant), eller en regulær firkant (kvadrat) eller en regulær sekskant er relativt greit ”manuelt”, mens for eksempel konstruksjonen av en regulær femkant (pentagon) ikke er helt trivielt. Bl.a. av denne grunn er denne konstruksjonen innebygget i Cabri.

Når elever i grunnskolen skal bruke Cabri i læringsprosessen kan vi, avhengig av hva elevenes læringsmål er, endre dette bl.a. ved å ***tilpasse menyene*** når elevene bruker programmet. Mer om dette senere.

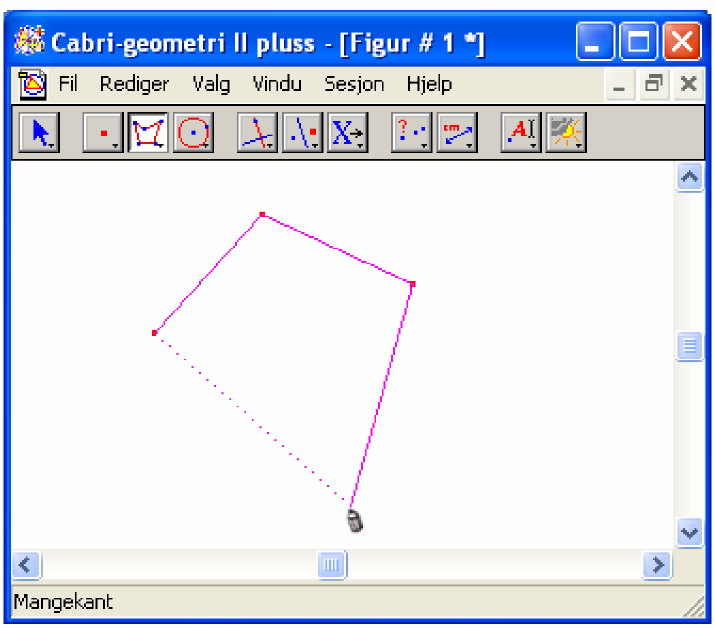
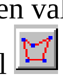


Fig.1.4.11. Mangekant

Vi prøver også menyvalget **Mangekant** fra denne menyen. Klikk på **Mangekant** og deretter i rekkefølge i ulike punkter i konstruksjonsflaten. Du ser at sidekantene ”følger med” ettersom du klikker nye punkter. (Fig.1.4.11.)
Klikk så i startpunktet til slutt for å lukke kurven som definerer mangekanten.
Skjermen din skal da se ut omtrent som :
Som vi før har sett, endres ikonet i knappen vi har klikket på etter hvert for å vise det sist valgte menyvalget under knappen. Her har den valgte knappen forandret innhold til  for å vise at vi har valgt menyvalget **Mangekant** sist. Denne menyknappen inneholder også valgene **Linjestykke**, **Stråle** og **Vektor** som lar oss konstruere henholdsvis et linjestykke, en stråle og en vektor.

Oppg.1.4.12. Prøv menyvalgene **Linjestykke**, **Stråle** og **Vektor** fra denne knappemenyen.
Prøv Cabris *dynamiske egenskaper* ved å endre lengde på linjestykket og endre retningen på strålen og vektoren.

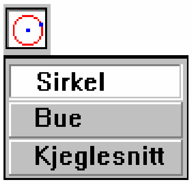


Fig.1.4.13.

Neste knappemeny, med menyvalgene **Sirkel**, **Bue** og **Kjeglesnitt** lar deg konstruere henholdsvis en sirkel, en sirkelbue og (med menyvalget **Kjeglesnitt**) en **ellipse**, **parabel** eller en **hyperbel** definert ved hjelp av fem punkter.

Sirkelen konstrueres ved å velge et punkt i arbeidsflaten som sentrum og deretter dra ut radius-lengden. En bue konstrueres ved å velge tre ulike punkter (eventuelt på en gitt sirkel) som buen skal gå gjennom og kjeglesnitt konstrueres ved å velge 5 ulike punkter i arbeidsflaten som kurven skal gå gjennom.

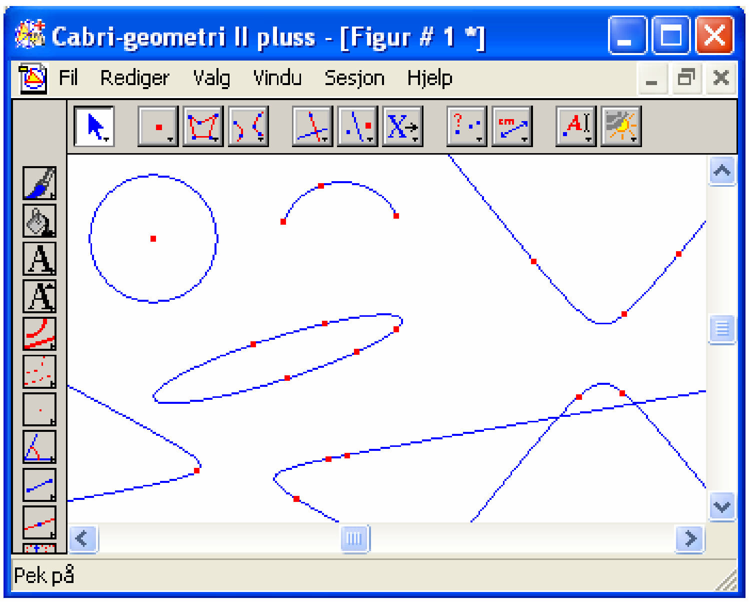


Fig.1.4.14. Kjeglesnitt.

For å konstruere en sirkel, klikk på **Sirkel**, klikk i konstruksjonsflaten, dra ut sirkelen og klikk en gang til. Musteknikken her har vi kommentert tidligere: **Klikk-slipp-dra-klikk**. Sirkelen kommer da fram i konstruksjonsflaten. Prøv deretter menyvalget **Bue** ved å klikke i et punkt i konstruksjonsflaten, dra ut sirkelbuen, klikk et punkt til og dra videre ut og avslutt med et nytt klikk. Sirkelbuen definert av de tre punktene framkommer da. Til slutt kan du prøve menyvalget **Kjeglesnitt** for å konstruere en ellipse, en parabel eller en hyperbel ved å klikke og dra via fem punkter. Prøv deg fram for å få fram både ellipser, parabler og hyperbler. Skjermbildet ditt kan da se ut omtrent som i figur 1.4.14.

Så langt har du kun sett på de ulike menyene og knapperaden i Cabri. Dersom du senere trenger hjelp, men ikke finner det i denne framstillingen, kan du bruke Hjelp-funksjonen og prøve deg fram. Bruk også knapperadsmenyene vist i figur 1.3.1 til hjelp i arbeidet ditt.
De funksjonene der som vi ikke har prøvd hittil, vil vi ta opp etter hvert i oppgavene nedenfor.

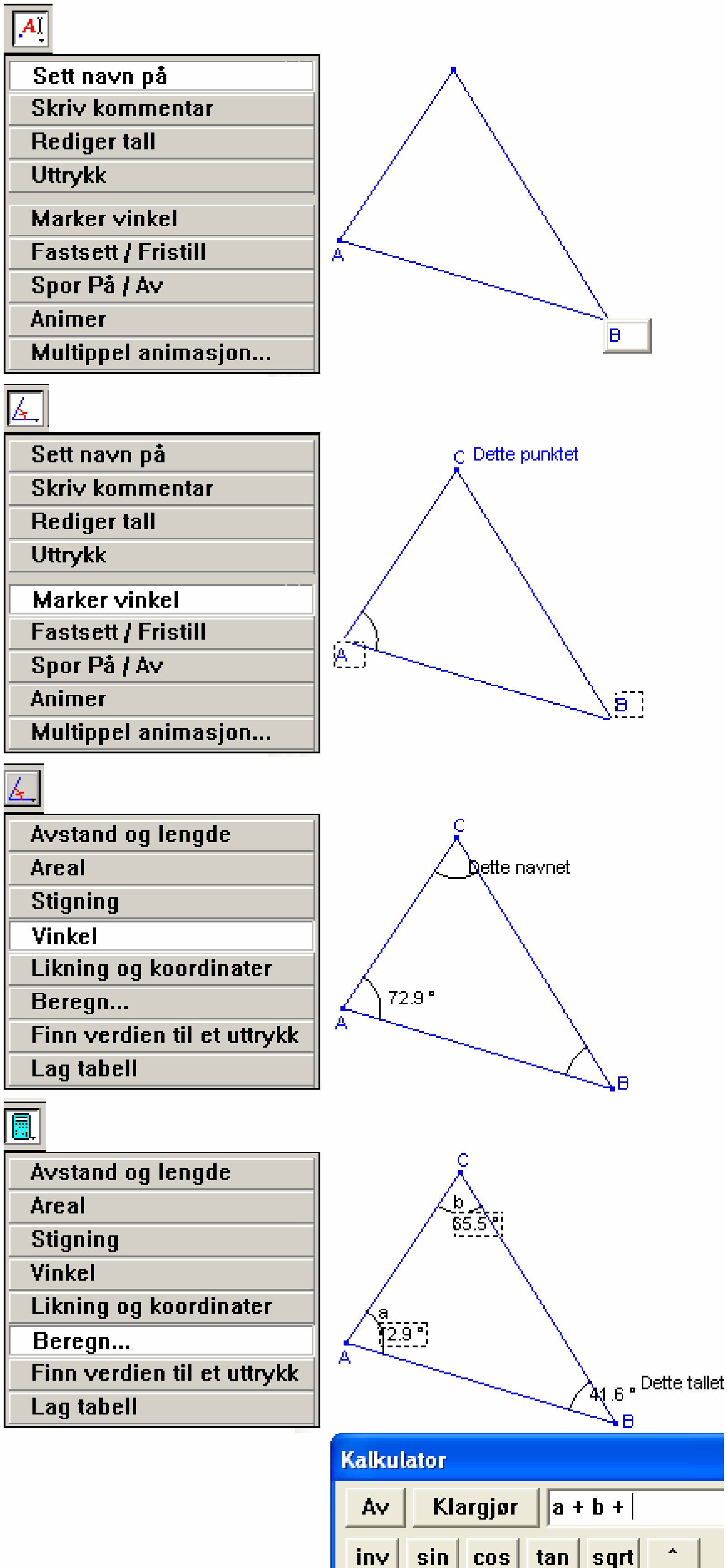


Fig.1.5.3. Trekant, vinkler og vinkelsum

1.5. Et måle- og beregnings-eksempel

Det er nå på tide å prøve seg på noe konstruksjoner i Cabri og prøve ut noen av hjelpemidlene som er innebygget i programmet. Prøv å utføre konstruksjons-oppgavene nedenfor. Til de første oppgavene har vi tatt med løsningsforslag. (se side …) Om du får problemer, slå på Help-funksjonen og prøv deg fram..

Oppg.1.5.1. Vi skal tegne en trekant ABC, markere hver av hjørnevinklene, måle dem og skrive måltallet på figuren. Deretter skal vi regne ut summen av vinklene i trekanten.

Løsning: Tegn en trekant som beskrevet tidligere. Når du skal navnsette hjørnene A, B og C, velger du knappemenyen nest lengst til høyre. Velg der menyfunksjonen **Sett navn på**. (Øverst i fig.1.5.3.) Deretter peker du på hvert punkt og klikker. Ved hvert hjørnepunkt kommer en tekstrute fram der du kan skrive inn navnet på trekanthjørnet.
Når du er ferdig med et punkt, kan du klikke et annet sted i arbeids-flaten. Når du peker, på et hjørne, holder mustasten nede og drar det rundt i arbeidsflaten, følger navnet på hjørnet med. Prøv.
Navnet alene vil kun kunne beveges i en sirkelflate rundt punktet det tilhører. (Det kan også ”slites” vekk fra hjørnet og plasseres andre steder i arbeidsflaten.)
For å marker hjørnevinklene (dvs. tegne vinkelbuer som markerer hjørnevinklene), bruker du samme knappemeny og menyvalget **Marker vinkel**.

For å markere en vinkel må du klikke på tre punkter som viser vinkelen du skal markere. Når for eksempel vinkelen i hjørnet A skal markeres, må du enten klikke på punktene C, A og B i rekkefølge ($\angle CAB$) eller på punktene B, A og C i rekkefølge. ($\angle BAC$.)

For å måle hjørnevinklene, velger du knappemenyen for **måling** nest lengst til høyre i knapperaden. (nest nederst i fig.1.5.3.) Deretter peker du på vinkelbuen du vil måle og klikker en gang. Målingen kan gjentas for de andre vinklene ved å peke på dem etter tur og klikke.
Når du er ferdig, klikk på pil-knappen lengst til venstre i knapperaden.

1.6. Beregning ved hjelp av kalkulatoren i Cabri

Til slutt skal vi regne ut summen av hjørnevinklene i trekant ABC. Da kan du gå frem slik:

- Klikk på knappen for måling.
- Klikk på **Beregn**.
  Da fremkommer følgende beregningsvindu på skjermen :

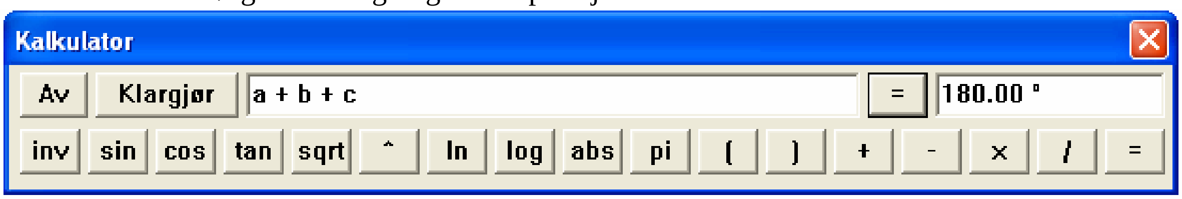


Fig.1.6.1. Beregning av vinkelsummen i en trekant

Dette er en spesiell kalkulator med innebygde funksjoner der du kan beregne fra målte størrelser i figuren din. Vi skal summere vinkelstørrelsene for hjørnevinklene A, B og C.
Dette gjør vi ved å:

- Klikke på måltallet for vinkelen i hjørnet A og deretter klikke på pluss-knappen i beregningsvinduet,
- klikke på måltallet for vinkelen i hjørnet B og deretter på pluss-knappen i beregningsvinduet og til slutt
- klikke på måltallet for vinkelen i hjørnet C og deretter klikk på knappen med likhetstegn i beregningsvinduet. Du får da frem vinkelsummen i trekant ABC i resultatfeltet i kalkulatoren.

Om du nå klikker på et hjørne i trekanten og drar det rundt i arbeidsflaten, endres selvfølgelig

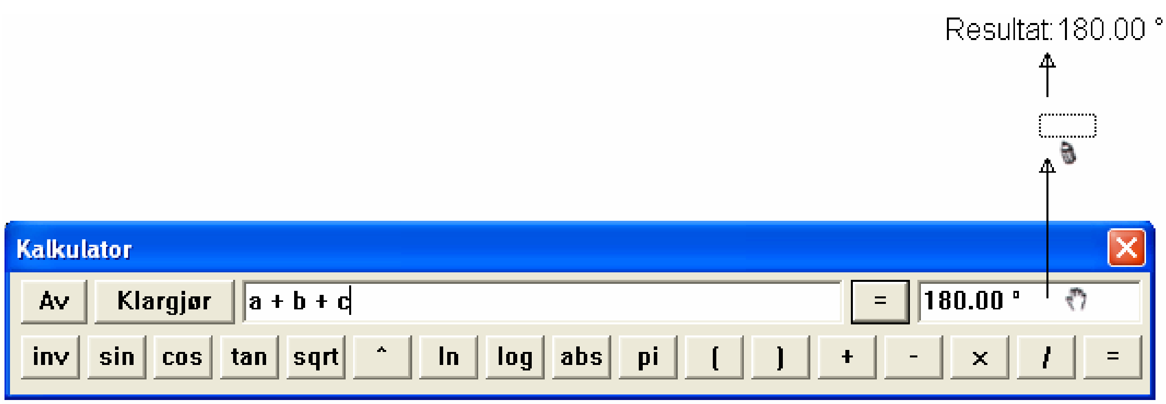


Fig.1.6.2. Vinkelsummen lagt ut på arbeidsflaten.

vinkelmåltallene etter hvert som hjørnevinklene endres. (Ikke gjør dette riktig ennå.)
Vi kan også undersøke om vinkelsummen endres, ved å klikke i resultatruten lengst til høyre i kalkulatoren og flytte markøren til et sted i arbeidsflaten. Da markerer en stiplet rute ved markøren at resultat-måltallet følger med markøren. Klikker du nå en gang i arbeidsflaten, settes dette tallet inn på arbeidsflaten. (Fig.1.5.5..) Her vil det bli oppdatert etter som vinkelstørrelsene endres.

Om du nå klikker på et hjørne i trekanten og drar det rundt i arbeidsflaten, endres selvfølgelig vinkelmåltallene, mens vinkelsum-tallet ikke endres. Prøv. Hva viser dette deg?
Lagre resultatet ditt ved menyvalget **Lagre som …** i nedtrekks-menyen **Fil** og deretter angi navnet oppg151. (Velg selv stedet på harddisken du vil lagre dine konstruksjoner.)

Oppg.1.6.3.

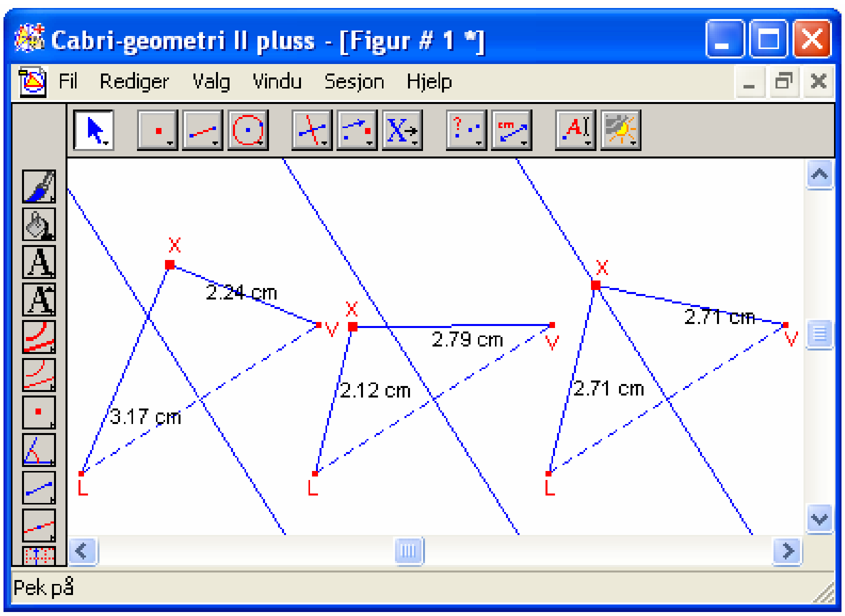
a. Anne har funnet ut at hun bor like langt (i luftlinje) fra Levanger som fra Verdal. Vet vi nå nøyaktig hvor Anne bor? Hvorfor eller hvorfor ikke?

b. Tegn to punkter L og V. Konstruer midtnormalen mellom dem. Tegn også et vilkårlig punkt X. Tegn linjestykkene LX og VX. Må lengden av dem. Hvilken lengde er størst?

c. Flytt på punktet X. Når er LX > VX? Når er det motsatt, at LX < VX? Og når er LX = VX?

d. Hvordan tror du punktet X kan ligge dersom avstanden til L skal være dobbelt så stor som avstanden til V? Utforsk! Lagre resultatet ditt ved menyvalget **Lagre som …** i nedtrekks-menyen **Fil** og deretter angi navnet Oppg163.

Løsning:



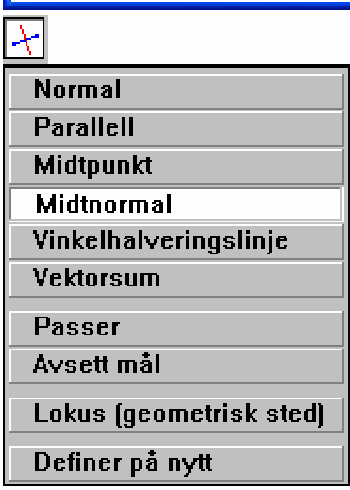


Fig.1.6.4. Midtnormalen.

a. Merk av to ulike punkter. (Merket L og V i fig. ovenfor)
Vi vet at mengden av alle punkter med lik avstand til L og V, ligger på midtnormalen mellom L og V.

b. Konstruer **midtnormalen** mellom dem ved hjelp av menyvalget **Midtnormal** i **Konstruer** menyen (fig. til venstre).
Merk av et tredje punkt X utenfor midtnormalen. Tegn linjestykkene LX og VX ved hjelp av menyvalget **Linjestykke** i Linje menyen.
Mål linjestykkene LX og VX som beskrevet i forrige oppgave.
Klikk på punktet X og dra det rundt i arbeidsflaten.
Sammenlikn lengdene av linjestykkene LX og VX mens du drar.
Du vil se at $LX \neq VX$ når X ligger utenfor midtnormalen, mens LX = VX for alle punkter på midtnormalen.

d. Prøv selv først. Løsningsforslag finner du bakerst i dette heftet.

Oppg.1.6.5.

a. Tegn en rett linje l og merk av et punkt P utenfor l.

b. Vis avbildningen S_l (speiling om linja l) ved å speile punktet P om l. Navnsett punktene P og P'.

c. Dra i punktet P og observer hvordan dette påvirker P'. Vis også at alle punkter på l er invariante under avbildningen S_l ved å dra P inn på linja l. Merk av et punkt X på l. Tegn linjestykkene PX og XQ.

d. La linja l representere ei elv. Tenk deg at du står i P og skal via elva (for å hente vann) til hesten som står i Q (et annet punkt på samme side av l). Merk av punktet Q.
Konstruer den korteste veien ved å benytte avbildningen S_l. (Dvs. finn det punktet S på l som er slik at PS + SQ er kortest mulig.)

e. Mål linjestykkene PS og SQ.

f. Dra nå i P og studer hva som skjer.

g. Lagre resultatet ditt ved menyvalget Lagre som … i nedtrekksmenyen Fil og deretter angi navnet oppg165.

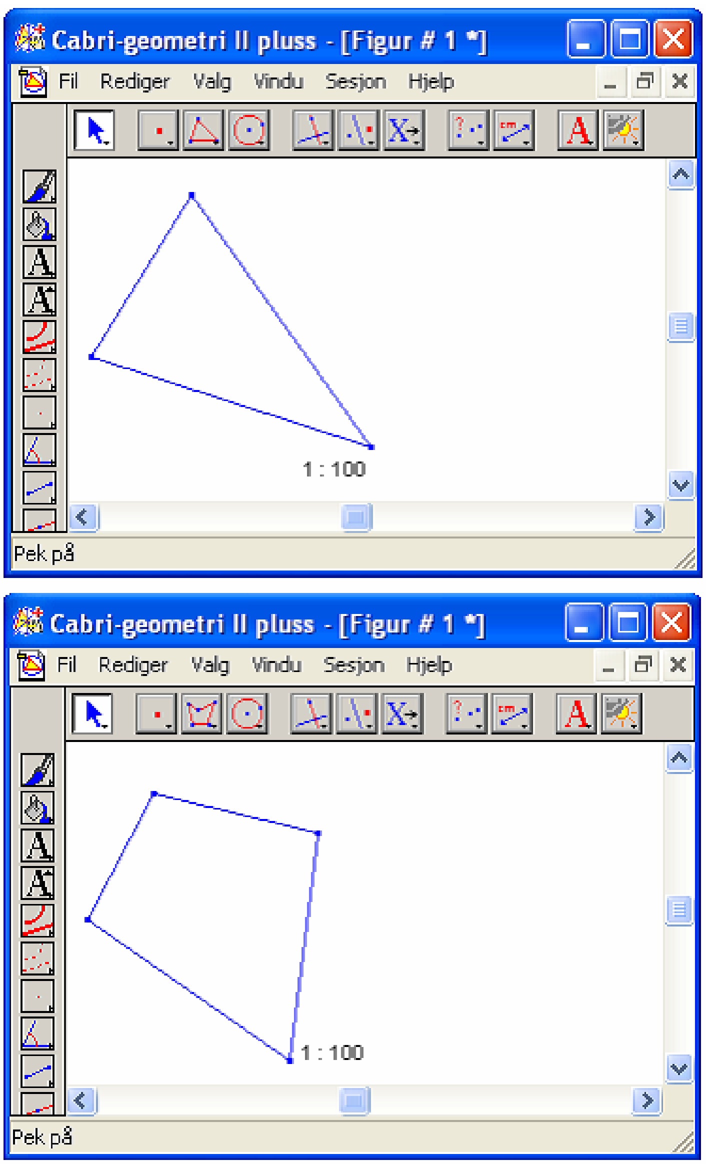


Fig.1.6.7. Problem : Hyttetomter og vanning.

Oppg.1.6.6.

a. Konstruer løsningen til problemet med korteste vegen fra et punkt på den ene siden av ei elv til et punkt på den andre siden (der elevbreddene er parallelle linjer).
Navnsett punkter på samme måte som du har gjort ovenfor.
Begynn med å konstruere elva, så merke av punktene P og Q på hver sin side av elva og deretter plan legge og gjennomføre konstruksjonen som løser problemet.

b. Når du er ferdig, dra i P og studer hvordan vegen forandres.

c. Lagre resultatet ditt ved menyvalget **Lagre som …** i nedtrekksmenyen **Fil** og deretter angi navnet oppg166.

Oppg.1.6.8.

a. Hytteeieren X har et jordbærland med form slik som trekanten øverst i figur 1.6.7. Han vil vanne bærene med en vannspreder som kan rekke over hele jordstykket, men han vil ikke vanne mer enn nødvendig. Sprederen lager en sirkel når den vanner. Denne sirkelen skal være så liten som mulig. Omtrent hvor mener du han bør plassere sprederen og hvor stor blir radius i sirkelen?

a. Lag en konstruksjon som løser problemet.

Hytteeier Y har en plen utenfor hytta si med form slik som firkanten nederst i figur 1.6.7 viser. Han vil vanne plenen med en vannspreder som kan rekke over hele jordstykket, men han vil ikke vanne mer enn nødvendig. Sprederen lager en sirkel når den vanner. Denne sirkelen skal være så liten som mulig. Omtrent hvor mener du han bør plassere sprederen og hvor stor blir sirkelen?

b. Vi skal nå undersøke nærmere tilfeller der en sirkel skal dekke en firkant.
Tegn en firkant. Konstruer midtnormalene på alle fire sidene i firkanten. Hva ser du?
Grip fatt i et hjørne i firkanten og dra i hjørnet. Prøv å forandre firkanten slik at alle fire midtnormalene går gjennom samme punkt. Hva ser du?

c. Utforsk midtnormalene på sidene i andre figurer.

d. Lagre resultatet ditt ved menyvalget **Lagre som…** i nedtrekksmenyen **Fil** og deretter angi oppg168.

Oppg.1.6.9.

a. Tegn en trekant ABC. Konstruer midtpunktet på hver av sidene i trekanten. Kall midtpunktet på AB for R, midtpunktet på BC for S og midtpunktet på AC for T.

b. Tegn linjestykkene AS, BT og CR. Hva ser du?

c. Kall skjæringspunktet mellom linjestykkene AS, BT og CR for G. Tegn også linjestykkene AG, GS, BG, GT, CG og GR. Mål linjestykkene AG og GS og sammenlikn. Gjenta for linjestykkene BG og GT og deretter for linjestykkene CG og GR. Hva finner du? Dra i et hjørne i trekanten og gjenta sammenlikningene. Prøv å formulere det du finner i en setning.

d. Berit sier at linjene ST og AB er parallelle. Har hun rett?
Hun sier også at trekantene STG og ABG er formlike. Har hun rett?

e. Mål arealene av trekantene ARG og RBG. Hva skjer med de to arealene når du endrer på trekant ABC ved å dra i et hjørne? Hvorfor?

f. Skriv ut konstruksjonen på papir. Klipp ut trekant ABC. Klipp til et stykke papp og lim trekanten på. Prøv å få den til å balansere på en blyantspiss.
På hvilket punkt balanserer trekanten vannrett?

g. Lagre resultatet ditt ved menyvalget **Lagre som…** i nedtrekksmenyen **Fil** og deretter angi filnavnet oppg169.

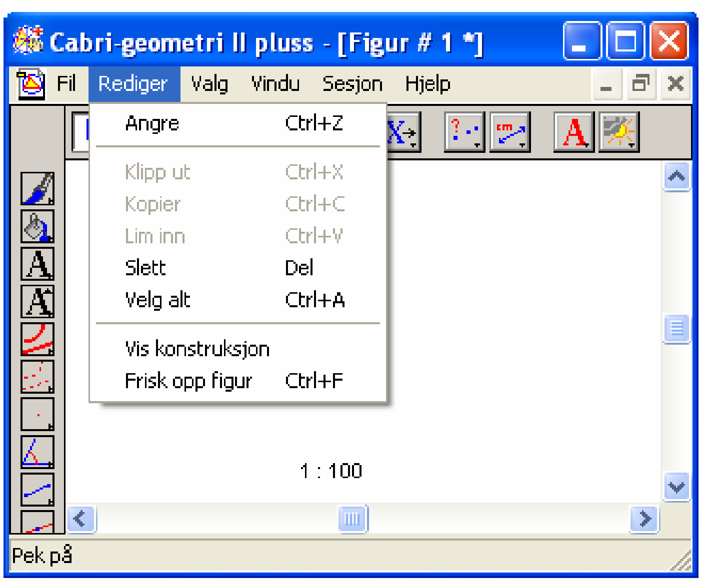


Fig.1.6.11. Menyfunksjonen Vis konstruksjon

Oppg.1.6.10.

a. Tegn en trekant ABC. Konstruer høyden på to av sidene i trekanten. Kall skjæringspunktet mellom de to høydene for H.

b. Konstruer også høyden på den tredje siden i trekanten.
Hva ser du?
Gjelder dette alltid?
Undersøk dette ved å peke på og dra i et av hjørnene i trekanten.

c. Kan en trekant ha slik fasong at H ligger utenfor trekanten?
I tilfelle – hvilke egenskaper må nødvendigvis en slik trekant ha?
Undersøk ved å peke på og dra i et av hjørnene i trekanten.

d. Lagre resultatet ditt ved menyvalget **Lagre som…** i nedtrekksmenyen **Fil** og deretter angi filnavnet oppg1610.

Oppgave 1.6.11 nedenfor er omfattende og her får du i stor grad utforsket Cabri-programmets *dynamiske* muligheter. Bruk tid på oppgaven og forsøk å få oversikt over mulighetene i Cabris innebygde funksjoner. Blant annet skal du utforske det nyttige menyvalget Vis konstruksjon beskrevet ovenfor. Denne funksjonen finnes i nedtrekksmenyen **Rediger** (Fig. til venstre.)

Oppg.1.6.12. a. Konstruer en trekant ABC.

b. Konstruer **midtnormalene** til sidene AB, BC og AC og merk av skjæringspunktet mellom midtnormalene. Navnsett skjæringspunktet M.

c. Merk av midtpunktet på hver av sidene i trekanten og konstruer linjestykket fra hver av hjørnene i trekant ABC ned på midtpunktet på motsatt side. Disse linjestykkene kalles **medianene** i trekanten.
Konstruer til slutt skjæringspunktet mellom medianene. Navnsett dette skjæringspunktet G. Punktet G kalles trekantens **tyngdepunkt**.

d. Konstruer **høydene** fra hvert hjørne i trekanten. Konstruer til slutt skjæringspunktet mellom høydene og navnsett dette skjæringspunktet H. Punktet H kalles trekantens **ortosenter**.

e. Konstruer linja gjennom M og G. Hvordan ligger H i forhold til denne linja? Denne linja kalles "**Euler-linja**" til trekanten.

f. Dra i et av hjørnene i trekant ABC og studer hva som skjer med linja. Prøv å formulere en setning om det du oppdager.

g. Lagre resultatet ditt ved menyvalget **Lagre som …** i nedtrekksmenyen **Fil** og deretter angi filnavnet oppg1611.

h. Slett skjermen ved menyvalget **Ny** i **Fil**-menyen. Hent så fram resultatet av konstruksjonen f.eks. i oppgave 4 og se på hvordan du utførte konstruksjonen fra bunnen av gjennom menyvalget Vis konstruksjon i Rediger-menyen.
Du får frem følgende vindu:

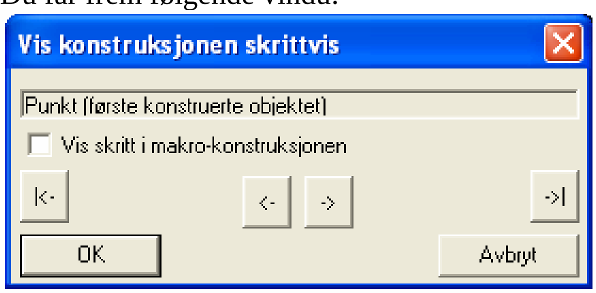


Fig.1.6.13. Vinduet for menyfunksjonen Vis konstruksjon

Klikk på -> og du får frem element for element hvordan konstruksjonen ble bygget opp. Merk at dette er en utmerket måte å studere dine elevers konstruksjoner på. Slett til slutt skjermen igjen på samme måte som ovenfor.

Oppg.1.6.14. a. Konstruer en firkant ABCD ved å merke av fire punkter og tegne linjestykkene mellom punktene.

b. Konstruer så midtpunktene M på AB, N på BC, O på CD og P på AC.
Tegn linjestykkene MN, NO, OP og MP. Hva slags firkant er MNOP?
Dra i hjørnet B og merk deg hva slags firkant MNOP blir. Prøv å formulere en hypotese.

c. Tegn en diagonal i firkanten ABCD. (F.eks. diagonalen AC.) Betrakt sidene MN og PO i forhold til denne diagonalen. Hva ser du?

d. Lagre resultatet ditt under filnavnet oppg1613.

Oppg.1.6.15. a. Tegn en trekant ABC. Tegn inn midtpunktet på hver av sidene i trekanten. Kall midtpunktet på AB for R, midtpunktet på BC for S og midtpunktet på AC for T.

b. Tegn linjestykkene AS, T og CR. Hva ser du?

c. Kall skjæringspunktet mellom linjestykkene AS, BT og CR for G. Tegn også linjestykkene AG, GS, BG, GT, CG og GR. Mål linjestykkene AG og GS og sammenlikn.
Gjenta for linjestykkene BG og GT og deretter for linjestykkene CG og GR. Hva finner du? Dra i et hjørne i trekanten og gjenta sammenlikningene. Prøv å formulere det du finner i en setning.

d. Berit sier at linjene ST og AB er parallelle. Har hun rett? Hun sier også at trekantene STG og ABG er formlike. Har hun rett?

e. Mål arealene av trekantene ARG og RBG. Hva skjer med de to arealene når du endrer på trekant ABC ved å dra i et hjørne. Hvorfor?

f. Skriv ut konstruksjonen på papir. Klipp ut trekant ABC. Klipp til et stykke papp og lim trekanten på. Prøv å få den til å balansere på en blyantspiss. På hvilket punkt balanserer trekanten vannrett?

g. Lagre resultatet ditt under filnavnet oppg1614.

Oppg.1.6.16. a. Tegn en trekant ABC. Konstruer høyden på to av sidene i trekanten. Kall skjæringspunktet mellom de to høydene for H.

b. Konstruer også høyden på den tredje siden i trekanten. Hva ser du? Gjelder dette alltid? Undersøk dette ved å peke på og dra i et av hjørnene i trekanten.

c. Kan en trekant ha slik fasong at H ligger utenfor trekanten? I tilfelle - hvilke egenskaper må nødvendigvis en slik trekant ha? Undersøk ved å dra i et av hjørnene i trekanten.

d. Lagre resultatet ditt under filnavnet oppg1615.

1.7. Makroer

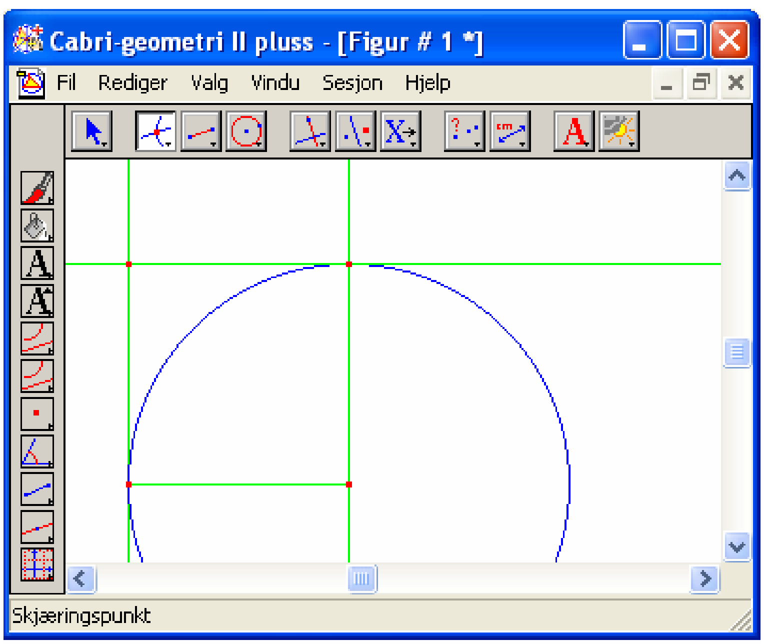


Fig.1.7.1. Konstruksjon som grunnlag for makroen Kvadrat fra linjestykke

Rett som det er trenger vi kvadrater i geometrioppgaver. Det hadde derfor vært nyttig om denne konstruksjonen kunne være ferdig laget en gang for alle til senere bruk. I Cabri finnes en funksjon som kalles makro, som kan benyttes til nettopp dette formål. Du kan også merke deg at dette betyr at du kan bygge ut Cabri med flere ferdige menyfunksjoner ved hjelp av makro-bygging.

Oppg.1.7.2.

Tegn et rett linjestykke (AB). Konstruer et kvadrat ABCD der altså AB er en side i kvadratet. Kvadratet skal ligge slik at vi leser ABCD i positiv dreieretning, dvs. mot urviserne.

Vi skal nå lagre en **makro** som produserer et kvadrat hver gang vi angir en side i kvadratet. Først konstruerer vi imidlertid kvadratet.
Gå frem slik:

1. Konstruer et rett **linjestykke** og en normal i hver av linjestykkets endepunkter.
2. Slå en **sirkel** om det ene endepunktet med radius lik lengden av linjestykket.
3. Merk av **skjæringspunktet** mellom normalen og sirkelen.
4. Konstruer en ny **normal** i dette skjæringspunktet (den skal stå normalt på den første normalen.)
5. Merk av **skjæringspunktet** mellom normalene. Konstruksjonen din skal da se ut omtrent som figur 1.6.1.
6. Skjul de tre normalene ved å velge **Skjul/Vis** i knappemenyen lengst til høyre. Konstruksjonen din skal se ut omtrent som figuren nederst til venstre.
7. Bruk deretter menyvalget **Mangekant** i Knappemenyen [3]. Dette vil gi et kvadrat med det første linjestykket som ”grunnlinje”.

Du har nå utført i rekkefølge de **konstruksjonstrinn** som gir deg et kvadrat utfra et gitt rett linjestykke. Det gjenstår nå å lagre disse trinnene i en makro. Før vi går i gang med å lagre makroen merker vi oss flg. om å lage makroer i Cabri :

Du trenger **veldefinerte utgangselementer**, dvs. konstruerte objekter som makroen bygger på. I dette tilfellet vil det nettopp være det linjestykket vi startet med. Dette skal definere kvadratet entydig. Merk at i her vil kvadratets to neste sider danne vinkelen 90° med ”grunnlinjen” og ikke 270°. (dvs. kvadratet ligger ”over” linjestykket).
Dernest må en definere et **veldefinert sluttobjekt** som makroen skal gi som resultat. I dette tilfellet er det kvadratet selv.

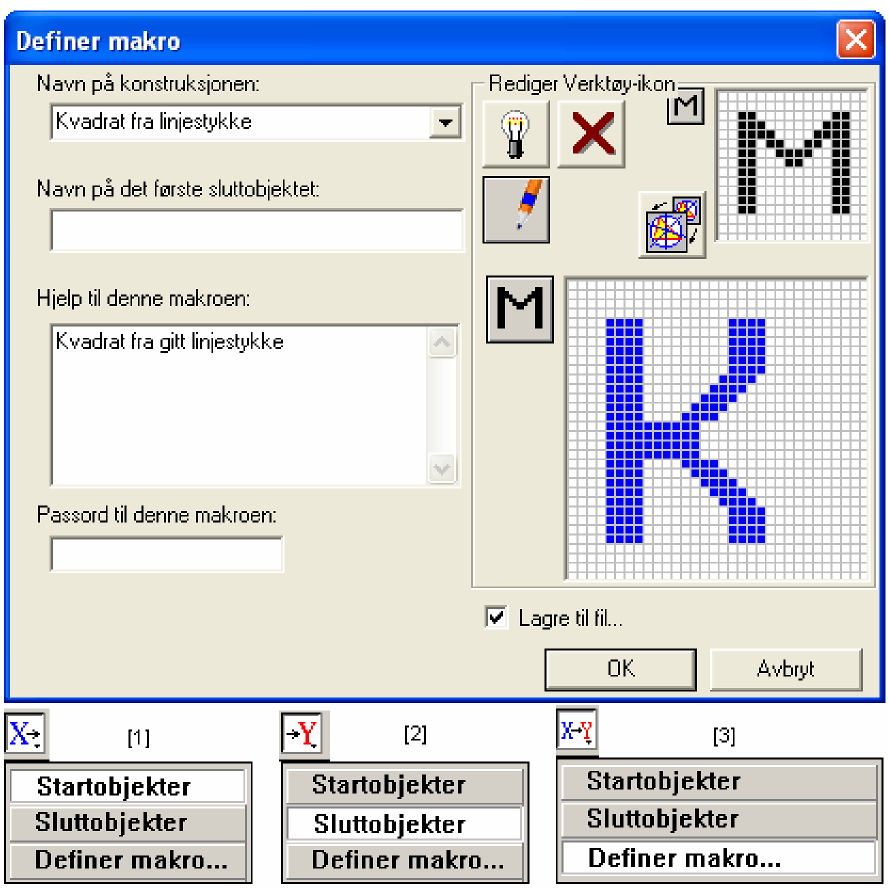


Fig.1.7.3. Lagring av makroen Kvadrat fra linjestykke.

Nå er vi klare til å lage makroen vår. Vi gjør dette ved å:

Klikke på **Startobjekter** i **Makro**-menyen.

Klikk på hvert av endepunktene i linjestykket du startet kvadrat-konstruksjonen med. Disse punktene blinker da.
Klikk på **Sluttobjekter** i **Makro**-menyen.
Klikk på kvadratet. Dette blir da stiplet og blinker.
Klikk til slutt på **Definer Makro** i **Makro**-menyen.
I dialog-boksen som da framkommer skriver du navnet ”Kvadrat fra linjestykke” i ruten **Navn** på konstruksjonen og klikk OK.

Nå er makroen "Kvadrat fra linjestykke» definert og er tilgjengelig som en egen funksjon i makromenyen.

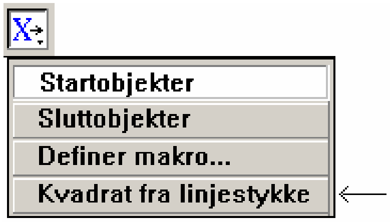


Fig.1.7.4. Makroen Kvadrat fra linjestykke plassert på makro-menyen.

Klikker du på denne knappen ser **Makro**-menyen din ut som i figur 1.7.4.
Du kan nå prøve ut om makroen virker som den skal:

Oppg.1.7.5. Tegn et rett linjestykke. Klikk på **Kvadrat fra linjestykke** i **Makro**-menyen og pek og klikk på linjestykkets endepunkter etter tur. Hva ser du?
Lagre resultatet ditt ved menyvalget **Save As …** i nedtrekksmenyen **File** og deretter angi navnet oppg175.
Makroen **Kvadrat** lagres da sammen med konstruksjonen din.

Merk at du kan lagre makroen slik at den er tilgjengelig i alle konstruksjoner du lager. Dette kalles å lagre den **globalt.** Da er du nødt til å klikke i ruta ved siden av **Lagre til fil** før du lagrer makroen.
Prøv å bruke Kvadrat-makroen gjentatte ganger til å konstruere et lappeteppe av kvadrater.

Oppg.1.7.6. Du skal skyte med en kule A og treffe kule B på biljardbordet. Det ligger mange kuler i veien, og du må skyte via veggen FG og deretter via veggen GH.

a. Tenk deg at du velger et punkt P på FG og sikter og skyter mot dette punktet. Hvordan vil kula gå etterpå?
Konstruer linjestykker som viser den veien kula vil følge. Treffer den kule B?
b. Flytt på punktet P til du treffer kule B.
c. Kunne du ha funnet ut på en annen måte hvor du må velge punktet P for å treffe kule B? (Vink: Speil A om FG og B om GH.)
d. Lagre resultatet ditt ved menyvalget Lagre som… i nedtrekksmenyen Fil og deretter angi navnet oppg176.

Oppg.1.7.7. Vi skal i denne oppgaven undersøke en spennende kurve, Pascals snegle.

a. Tegn en sirkel og et punkt P utenfor sirkelen. Merk av et punkt X på sirkelen.
Punktet X kan bevege seg på sirkelen.
b. Tegn radius fra sirkelens sentrum til X, og konstruer en tangent til sirkelen i X.
c. Konstruer normalen fra P til tangenten og kall denne normalens fotpunkt (på tangenten) for S.
d. Vi skal nå undersøke hvordan punktet S ligger når du flytter punktet X.
Til dette formål skal vi benytte en innebygget funksjon i Cabri som kalles **Lokus**.
Gå fram slik:
Klikk på **Lokus** (Geometrisk sted) i Konstruer-menyen.
Klikk på punktet S for å angi hvilket punkt du vil konstruere det geometriske stedet (Lokus) til.
Klikk på punktet X for å angi hvilket punkt du vil bevege.
Cabri tegner da det geometriske stedet for S når X beveger seg langs sirkel-periferien.
Flytt X langs sirkel-periferien og studer hvordan S forflytter seg.
Hva slags kurve beveger S seg langs?
Beveg punktet P mot og forbi sirkelens sentrum. Hva ser du?
Kurven du har konstruert kalles Pascals snegle.
e. Lagre resultatet ditt ved menyvalget Lagre som… i nedtrekksmenyen Fil og deretter angi navnet oppg177.

Oppg.1.7.8. I denne oppgaven skal vi studere litt *perspektiv-tegning* ved hjelp av Cabri.

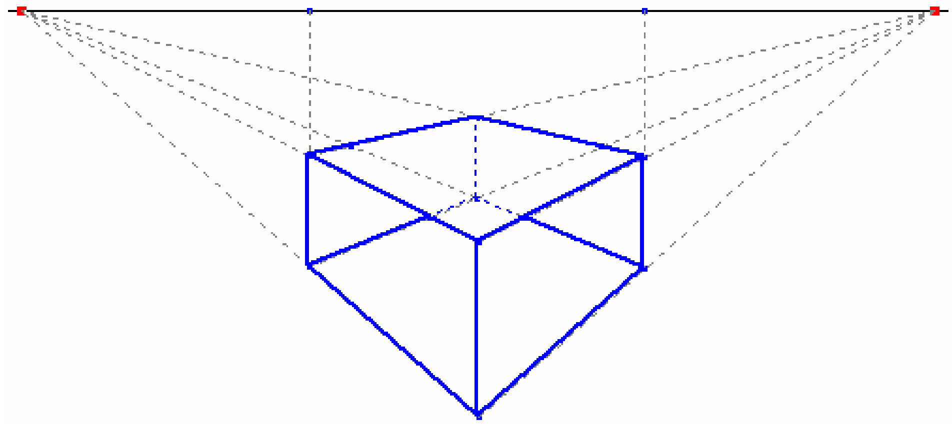


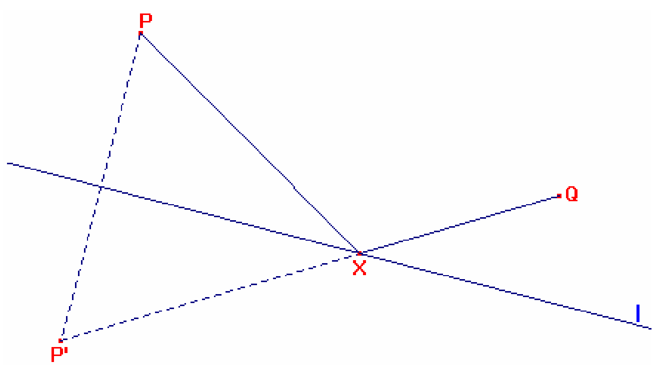
Fig.1.7.9. Perspektiv-tegning (2 punkts perspektiv) ved hjelp av Cabri.

a. Konstruer en kloss sett i (topunkts-) perspektiv. (Fig. 1.7.9.)
b. Tenk deg at klossen er en del av et hus med tak.
Prøv å konstruere huset perspektivisk.
c. Lagre resultatet ditt under filnavnet oppg178.

Oppg.1.7.10. a. Finn deg en lærebok for ungdomstrinnet godkjent etter L-97. Finn fram oppgaver fra geometri-kapitlet i boka og bruk Cabri til å utføre konstruksjonene.
b. Tenk nøye gjennom om Cabri kan tilføre noe nytt til denne type arbeid i grunnskolematematikken.
Hvordan kan du utnytte Cabri-programmets dynamiske funksjon i undervisningen?

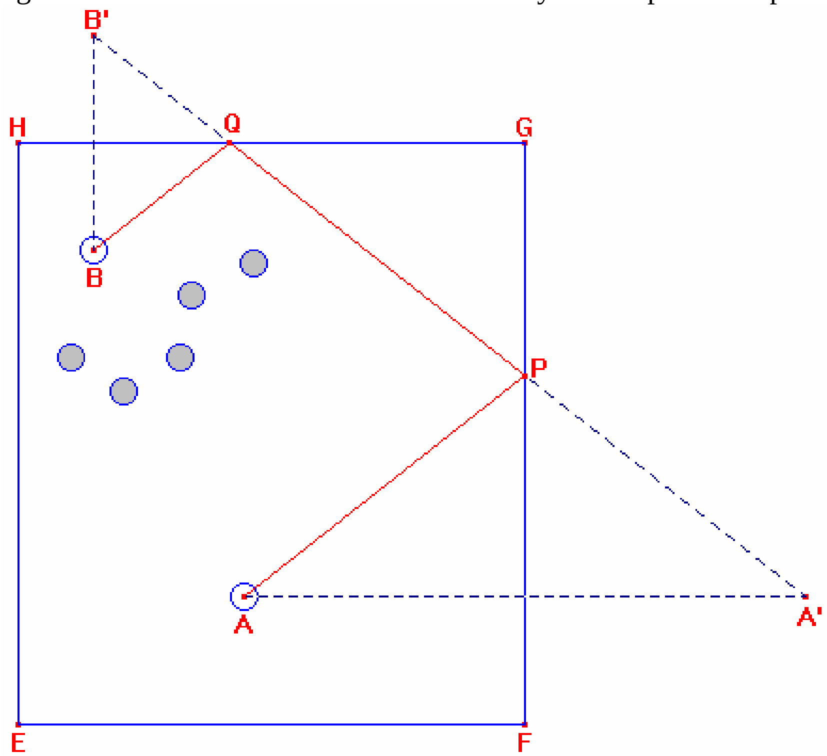
1.8. Svar til utvalgte oppgaver.

Oppg.1.5.3. Den korteste vegen fra P til Q via elva l, er PX + XQ. Grunnen er at siden P er speilet om l, er PX = P'X. Dermed er PX + XQ = P'X + XQ = P'Q som er den korteste avstanden mellom P' og Q.

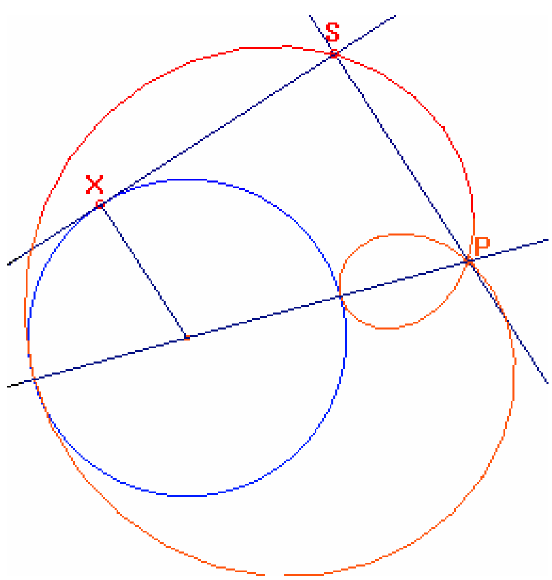


Oppg.1.5.4. Vi merker av et vilkårlig punkt X' på elvebredden på P's side. Så konstruerer vi ei bru over elva X'Y' som står vinkelrett på elvebredden. Deretter trekkes linjestykkene PX' og Y'Q.
Den korteste veien fra P til Q via broen over elven er PX + XY + YQ, der punktet X finnes ved å parallellforskyve X'Y' til Y' faller sammen med Q og deretter trekke linjestykket PX''. Der dette linjestykket skjærer elvebredden, finner vi punktet X.
Siden linjestykket PX'' er den korteste avstanden mellom P og X'' og avstanden PX + XY + YQ bare skiller seg fra denne avstanden med brolengden XY, følger påstanden.

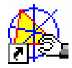
Oppg.1.6.2. Banen kule A må følge for å treffe B (via veggene FG og GH) er AP → PQ → QB, der punktene P og Q fremkommer ved at vi speiler A om FG (til punktet A') og B om GH (til punktet B') og trekker linjestykket A'B'. Der dette linjestykket skjærer FG finner vi punktet P og der denne linjen skjærer GH finner vi Q. Argumentet er at kula vil ta samme vei (for å treffe B) som en lysstråle, altså korteste avstand. Korteste avstand mellom A' og B' er lengden av linjestykket A'B'. Men banen AP + PQ + QB er like lang som AA', altså kortest mulig avstand fra A til B via veggene FG og GH. Derfor vil kula A treffe B når den skytes mot punktet P på FG. (Se fig. …)



Oppg.1.6.3. **Pascals snegle.**



DGP-programvare Cabri II+.
2. Oppgavesamling.

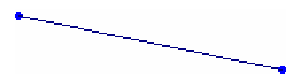
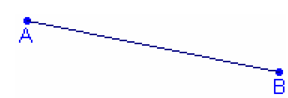
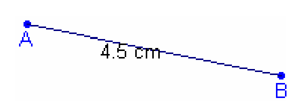


De fleste av oppgavene nedenfor er oppgaver som dekker grunnleggende deler av Cabri og hver oppgave består av en oppgavetekst, beskrivelse av de menyfunksjoner/knappevalg som kan brukes i oppgaven og noen kommentarer / beskrivelser lengst til høyre.

Spesielt i starten er det viktig å bli kjent med hvordan musa brukes i Cabri og lære å bruke peker-meldingene i arbeidet.

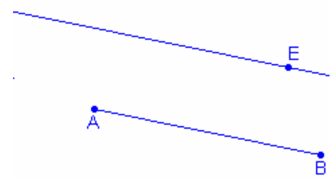
Ha arket med menybeskrivelsene og arket med beskrivelse av skjermbildet (i kursmappa) ved siden av deg når du arbeider. Når du føler at du behersker programmet rimelig, kan du gå over på de noe mer krevende oppgavene blant i Cabri-heftet.

2.1 Start - oppgaver

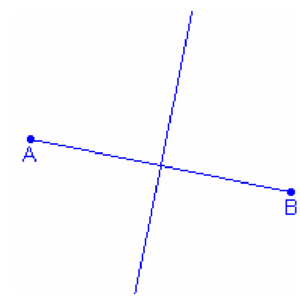
		Menyfunksjoner/knappevalg	Figur
1.	Tegn et fritt **punkt** i arbeidsflaten. Gjør punktet markert stort (dvs. slik: •) ved å peke på punktet, Klikke og deretter velge slikt utseende på punktet i stilvalgs-menyen Tegn et nytt fritt **punkt** i arbeids-flaten. Marker også dette stort. Tegn et **linjestykke** mellom punktene.	**Punkt (2. knapp fra venstre)** **Stilvalgsmenyen til venstre** **Punkt** **Stilvalgsmenyen til venstre.** **Linjestykke (3. knapp fra venstre)**	
2.	Slå på/av **hjelpetekst** i Cabri ved å trykke **F1-tasten** en gang og deretter gjenta. Slå på **stilvalgs-menyen** ved å klikke på **Valg**-menyen og deretter klikke en gang på menyvalget **Vis stilvalg**.	**F1-tasten** **Vis stilvalg**	
3.	Sett **navn** på punktene du har konstruert (A og B) ved å peke og klikke på et punkt og velge **Sett navn på** fra knappemenyen i knapp nr. 2 fra høyre.	**Sett navn på**	
4.	**Mål linjestykket** AB ved å velge **Avstand og lengde** fra menyen i knapp nr. 3 fra høyre.	**Avstand og lengde**	

5. Pek på hjørne A, og dra det rundt omkring i arbeidsflaten. Observer hva som skjer med **lengden** når du drar endepunktet A rundt omkring. **Klikk, hold og dra**

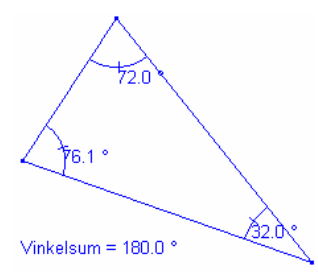
6. Tegn et rett **linjestykke**.
Navnsett endepunktene A og B. **Linjestykke / Sett navn på**
Tegn et **punkt** utenfor AB og **navnsett** dette punktet E. **Punkt / Sett navn på**
Konstruer **parallellen** til AB gjennom E og **navnsett** parallellen d. **Parallell / Sett navn på**
Dra i punktet A, og observer endringene på figuren. **Klikk, hold og dra**
Gjør det samme med punktene B og E og observer endringene.
Fjern figuren. **Marker område / Delete**



7. Tegn et **linjestykke** AB.
Linjestykke / Sett navn på
Konstruer **midtnormalen** til AB.
Midtnormal
Dra i punktet B og observer midtnormalen. Hva ser du? **Klikk, hold og dra**
Fjern så midtnormalen, ved å klikke på den og trykke Delete-tasten. **Delete**



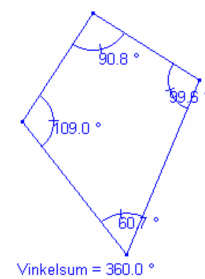
8. **Utforsking av trekanter:**
Hvilke typer trekanter kjenner du?
Tegn en fritt valgt **trekant**. **Trekant**
Marker alle tre hjørne**vinklene**. **Marker vinkel (Merk rekkefølgen)**
Mål hver av hjørne**vinklene**. **Mål vinkel**
Pek på et hjørne, klikk med venstre mustast, hold og dra hjørnet rundt. **Klikk, hold og dra**
Observer hva som skjer med hjørnevinklene når du drar i hjørnet.
Regn ut vinkelsummen i trekanten. **Beregn (Merk hvordan kalkulatoren brukes med målte størrelser.)**



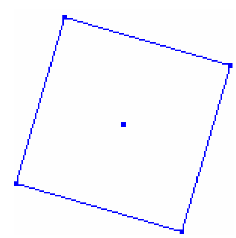
Pek på et hjørne, klikk med venstre mustast, hold og dra hjørnet rundt. **Klikk, hold og dra.**
Observer hva som skjer med **vinkelsummen** når du drar i hjørnet.
Formuler en setning om summen av vinklene i en trekant. **Skriv kommentar**
Gjør trekanten **rettvinklet** ved å dra i et hjørne til en vinkel blir 90^o **Klikk, hold og dra**

Mål hver av sidene i trekanten.	**Avstand og lengde** **(Merk hvordan lengden** **av et linjestykke måles)**
Gjør trekanten **likebeinet** ved å dra i et hjørne til to sider er like lange.	**Klikk, hold og dra**
Gjør trekanten **likesidet** ved å dra i et hjørne til alle tre sidene blir like lange.	**Klikk, hold og dra**
Mål omkretsen av trekanten.	**Mål avstand og lengde**
Konstruer en **likesidet trekant** ved å benytte menyvalget **Regulær mangekant**	**(Merk hvordan omkrets måles)** **Regulær mangekant**

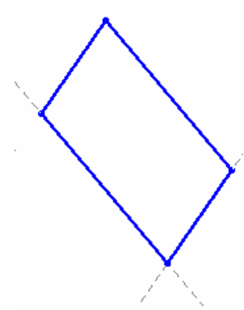
9. Utforsking av firkanter:



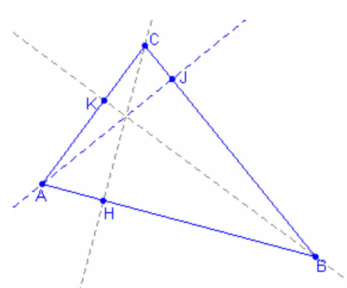
Hvilke typer firkanter kjenner du?	
Tegn en fritt valgt **firkant**.	**Mangekant**
Marker alle fire hjørne**vinklene**.	**Marker vinkel (Merk rekkefølgen)**
Mål hver av hjørne**vinklene**	**Mål vinkel (Merk rekkefølgen)**
Pek på et hjørne, klikk med venstre mustast, hold og dra hjørnet rundt.	**Klikk, hold og dra**
Mål hver av **sidekantene** i firkanten	**Mål avstand og lengde**
Gjør firkanten **likesidet** ved å dra i flere hjørner etter tur til alle fire sidene blir like lange. Hva kalles en slik firkant?	**Klikk, hold og dra**
Mål omkretsen av trekanten.	**Mål avstand og lengde** **(Merk hvordan omkrets måles)**
Konstruer et **kvadrat** ved å benytte menyvalget **Regulær mangekant**	**Regulær mangekant**



10. Tegn tre punkter **A, B og C.**



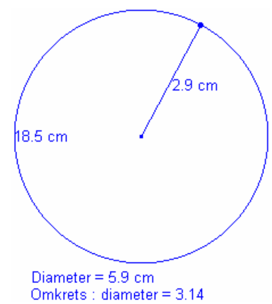
Tegn tre punkter **A, B og C.**	Punkt / Sett navn på
Konstruer **parallellogrammet** ABCD.	**Parallell / Skjæringspunkt / Mangekant**
Kontroller at parallellogrammet fortsetter å være et parallellogram når punktene flyttes. Dersom det ikke er tilfelle, slett figuren og konstruer på nytt.	**Klikk, hold og dra**
Skjul hjelpelinjene.	**Skjul / vis**
Mål sidekantene AB, BC, CD og AD.	**Avstand og lengde**
Mål hjørnevinklene.	**Marker vinkel / Vinkel**
Dra i et hjørne i parallellogrammet og beskriv hva du ser om sidekanter og vinkler i parallellogrammet. Fjern figuren.	**Klikk, hold og dra**



11. Tegn en **trekant** og **navnsett** hjørnene A, B og C. Konstruer **normalen** fra C ned på AB og de to andre høydene i trekanten.

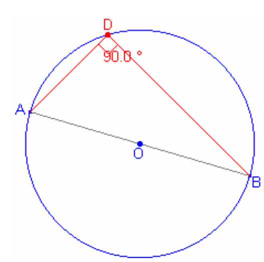
Tegn en **trekant** og **navnsett** hjørnene A, B og C.	**Trekant / Sett navn på**
Konstruer **normalen** fra C ned på AB og de to andre høydene i trekanten.	**Normal**
Marker hver av normalenes **skjæringspunkter** med grunnl.	**Skjæringspunkt**
Navnsett disse skjæringspunktene henholdsvis H, J og K.	**Sett navn på**
Dra i et av trekantens hjørner og observer hva som skjer med høydene.	**Klikk, hold og dra**

Prøv å finne ut hva slags type trekanter som har to høyder som faller utenfor trekanten.
Hva slags trekanter har du når to av høydene faller sammen med to av sidene i trekanten?
Fjern deretter figuren.



12.

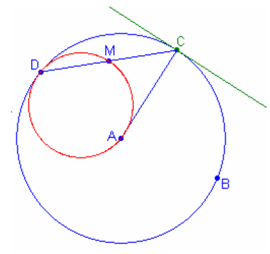
Konstruer en **sirkel** med fritt valgt sentrum og radius.	**Sirkel**
Merk av et **punkt** på sirkellinjen og navnsett dette P.	**Punkt på objekt**
Konstruer linjestykket **fra sentrum til punktet P.**	Linjestykke
Mål lengden av **linjetykket** (dvs. radius i sirkelen)	**Avstand og lengde**
Mål **sirkelens** omkrets	Avstand og lengde
Beregn sirkelens **diameter.**	**Beregn**
Hvordan er forholdet mellom sirkelens omkrets og diameter?	
Regn ut forholdet mellom sirkelens omkrets og dens diameter	**Beregn**
Mål sirkelens **areal**	**Areal**



13.

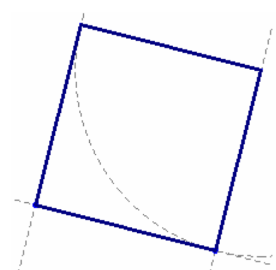
Tegn et **linjestykke** AB og konstruer **sirkelen** med diameter AB.	**Linjestykke, sirkel**
Navnsett sentrum i sirkelen for O.	**Sett navn på**
Konstruer et **punkt** på sirkel-periferien og **navnsett** dette C.	**Punkt, Sett navn på**
Konstruer **linjestykkene** AC og BC.	**Linjestykke**
Marker vinkel ACB og **mål** den.	**Marker vinkel, mål vinkel**
Dra i punktet C og observer.	**Klikk, hold og dra**

14. Tegn to **punkter** A og B og
konstruer **sirkelen** med sentrum
i A som går gjennom B. **Bruk menyoversikten og finn ut selv**
Plasser et **punkt** C på sirkelen.
Konstruer **tangenten** til sirkelen **Normal**
i punktet C.
(Tenk etter hvordan tangenten s
kal ligge i forhold til radius fra
sentrum og ut til C.



Dra i C og observer. **Klikk, hold og dra**
Avmerk et annet **punkt** D
på sirkelperiferien. **Punkt på objekt**
Konstruer **linjestykket** CD og
konstruer **midtpunktet**, M, på CD. **Bruk menyoversikten og finn ut selv**
Flytt punkt C langs sirkelperiferien
og observer hva som skjer
med punktet M. **Klikk, hold og dra**
Velg menyvalget **LOKUS**.
Klikk deretter på M og så på C. **Lokus**
Flytt så C langs sirkelperiferien
på nytt og observer. **Klikk, hold og dra**
Klikk på **ANIMER**.
Klikk så på M og dra fjæra ut litt,
og klikk så på C. Observer. **Animer**

15. Hva er et **kvadrat**?
Noter ned på et ark hvilke
egenskaper kvadrater har?
Konstruer et kvadrat på flg. måte:



① Tegn et **linjestykke** med
fritt valgt lengde **Linjestykke**

② Konstruer en **normal**
i hvert av endepunktene **Normal**

③ Konstruer en **sirkel**
med sentrum i det ene
endepunktet som går
gjennom det andre
endepunktet **Sirkel**

④ Marker **skjæringspunktet**
mellom sirkelen
og normalen **Skjæringspunkt**

⑤ Konstruer en **normal**
til linjestykket gjennom
skjæringspunktet **Normal**

⑥ Marker et nytt
skjæringspunkt slik at
du har fjerde hjørne
i kvadratet **Skjæringspunkt**

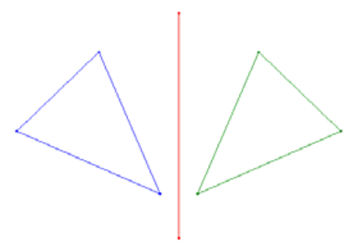
⑦ Konstruer **firkanten**
gjennom de fire hjørne-
punktene **Mangekant**

⑧ **Marker** og **mål** hver av hjørnevinklene. **Vinkel**

⑨ **Mål** hver av sidekant-lengdene. **Avstand og lengde**

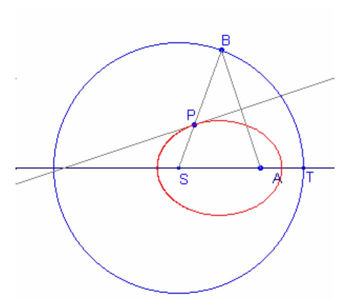
Pek, klikk hold og dra i ett av firkantens hjørner og observer. Hva ser du?
Beskriv med egne ord.
Hvorfor kan du ikke dra i det siste hjørnet?
Gå gjennom konstruksjonen og finn ut hvor vi har tatt vare på kvadratets egenskaper slik du beskrev dem først i oppgaven.

16. **Speiling om ei linje:**



Tegn et fritt valgt **trekant**. **Trekant**
Tegn et rett **linjestykke** utenfor trekanten. **Linjestykke**
Speil trekanten **om linjestykket.** **Speil om linje**
Pek, klikk, hold og dra og observer trekanten og dens speilbilde.
Hva ser du? **Klikk, hold og dra**
Dra ett av hjørnene på linjestykket.
Hva ser du? **Klikk, hold og dra**
Dra ett av hjørnene på andre siden av linjestykket. Hva ser du? **Klikk, hold og dra**

17. Konstruer en **sirkel** med radius 5 cm.



Sirkel
Sett navn på sentrum i sirkelen S.
Sett navn på
Konstruer en radius ST i sirkelen.
Linjestykke
Avsett et **punkt** A på ST.
Punkt på objekt
Avsett et **punkt** B på sirkel-periferien og trekk linjestykket SB. **Punkt på objekt. Linjestykke**
Trekk **linjestykket** AB. **Linjestykke**
Konstruer **midtnormalen** til AB. **Midtnormal**
Konstruer **skjæringspunktet**, P, mellom SB og midtnormalen. **Skjæringspunkt**
Konstruer **LOKUS** (**geometrisk sted**) for P når B beveger seg på sirkelperiferien. **Lokus**
Dra i punktet A langs hele ST og studer hva som skjer. **Klikk, hold og dra**
Forklar konstruksjonens egenskaper.

18. Samme konstruksjon som i 19., men i stedet for å legge punktet A på radien ST, konstrueres en vilkårlig **stråle** fra sentrum i sirkelen og A legges (gjerne utenfor sirkelen) på denne strålen. Konstruer så **midtnormalen** til AB og en **stråle** fra B gjennom S Konstruer til slutt **skjæringspunktet**, P, mellom denne siste strålen og midtnormalen. Til slutt konstrueres **LOKUS** for P når B beveger seg rundt sirkelen. Dra i punktet A langs hele ST og studer hva som skjer. Forklar konstruksjonens egenskaper.

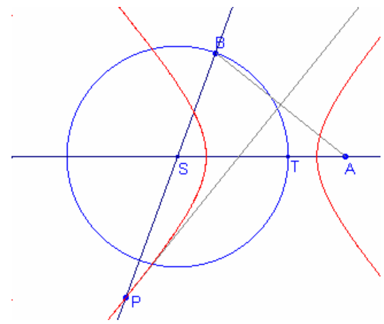
Stråle

Midtnormal, Stråle

Skjæringspunkt

Lokus

Klikk, hold og dra

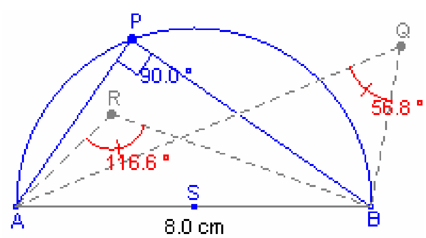


2.2 Utforskings - oppgaver

I hver av oppgavene nedenfor er det meningen at du skal utføre konstruksjonen og dernest kanskje aller viktigst, diskutere og reflektere over om bruk av programmet Cabri geometri II Plus Cabri som læringsstøtte gjør at du lære på en annen (og kanskje bedre?) måte:

19. "Halvsirkelvinkler"

A. Konstruksjonsdel:



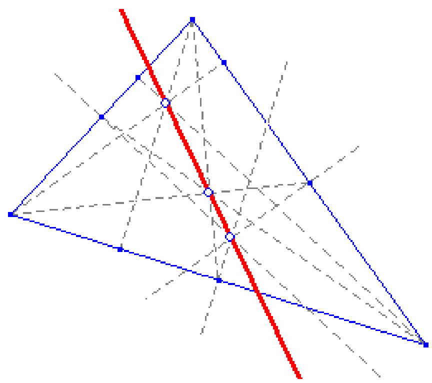
a. Tegn et rett linjestykke med lengde 8 cm og navnsett endepunktene A og B.
b. Konstruer midtpunktet S på AB.
c. Slå en sirkel om S som går gjennom A og B.
d. Merk av et punkt punkt Q på sirkelen.
e. Konstruer halvsirkelen gjennom A, B og Q og skjul deretter sirkelen og Q.
f. Merk av et punkt P på halvsirkelen og konstruer linjestykkene AP og PB og marker og mål $\angle APB$.
g. Klikk, hold og dra i punkt P og observer $\angle APB$.
h. Tegn deretter to punkter Q og R fritt i planet, Q utenfor og P innenfor halvsirkelen. Konstruer linjestykkene AQ og QB og AR og RB og marker og mål vinklene $\angle AQB$ og $\angle ARB$.
i. Klikk, hold og dra i punktet Q eller punktet R rundt om i planet og beskriv hvordan vinkelen endres. Hva skjer dersom Q ligger på halvsirkelen?
j. Diskuter, reflekter og formuler med bakgrunn i g.- i. med egne ord hva du ser.

B. Refleksjon omkring konstruksjonen:

a. I grunnskolen brukes dette resultatet ofte til å konstruere en rett vinkel som spenner over et gitt linjestykke AB.
Beskriv hvordan konstruksjonen, og spesielt punktene g. – j. kan gi deg en begrepsforståelse av denne setningen.
b. Har lengden av linjestykket AB noe å si? Dra i hjørne B og observer.

20. Euler-linja for trekanter

A. Konstruksjonsdel:



a. Konstruer en **trekant**, og **navnsett** hjørnene A, B og C.
b. Konstruer **midtnormalene** til hver av sidene i trekant ABC. Hva ser du?
c. Marker **skjæringspunktet** mellom midtnormalene og navnsett det **M**.
d. *Medianene* er **linjestykket** fra et hjørne til midtpunktet på motstående side.
Konstruer **medianene** til hver av sidene i trekant ABC. Hva ser du?
e. Marker **skjæringspunktet** mellom medianene og navnsett det **N**.
f. Konstruer linja som går gjennom M og N.
g. Konstruer **høydene** fra hvert av trekantens hjørner ved hjelp av **normal-**funksjonen. Hva ser du?
h. Marker **skjæringspunktet** mellom høydene og navnsett det **H**.
i. Undersøk om punktet H virkelig **ligger på** linja gjennom M og N.
j. Formuler med egne ord det du ser.
k. Dra i et av trekantens hjørner og undersøk hva som skjer:
- Ligger M, N og H alltid på ei rett linje?
- Dra i hjørnet til du ser at N ligger på en av trekantsidene. Forklar hva du ser.

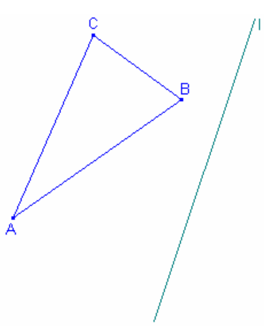
l. Konstruer en **sirkel** med sentrum i M og med radius lik AM. Hva ser du?

B. Refleksjon omkring konstruksjonen

a. Euler-linja (først funnet av matematikeren Leonard Euler) er ett uttrykk for flere egenskaper for trekanter.
Reflekter over hvilke begreper du lærer gjennom denne konstruksjonen.
(selv om ingen av egenskapene er *direkte* formulert som grunnskolepensum i læreplanen). Hvilke plangeometriske begreper inngår altså her?
Kan arbeidet med oppgaven ved hjelp av Cabri gi styrket læring av noen av disse plangeometriske begrepene?
b. Beskriv hvordan oppgaven viser Cabris dynamiske egenskaper og hva som skiller denne konstruksjonen fra klassiske grunnskolekonstruksjoner i plangeometrien.
Se spesielt på punkt k. Kan bruk av Cabri erstatte klassisk arbeid med disse begrepene?

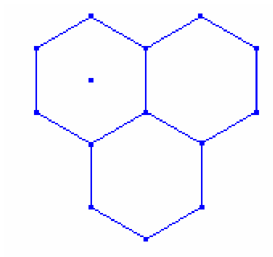
2.3 Planavbildninger ved hjelp av Cabri

21. Plangeometriske symmetrier: Speiling om rette linjer



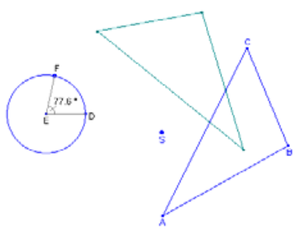
a. **Tegn** figuren til venstre.
b. **Speil** trekant ABC om linja l.
c. Dra i et av trekant ABC's hjørner. Hva ser du?
d. Dra hjørnet på motsatt side av linja l og observer hva som skjer.
e. Dra i linja l og observer hva som skjer.
f. Finn ut og noter hva som skiller din Cabri-konstruksjon her fra en vanlig konstruksjon med passer og linjal.

22. Plangeometriske symmetrier: Mangekant-tesseleringer



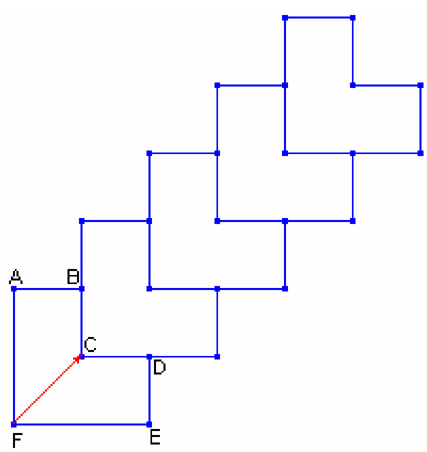
a. Konstruer en **regulær sekskant**.
b. **Speil** sekskanten om en av sine sider.
c. Gjenta til du har vist at den regulære sekskanten *tesselerer*. En mangekant tesselerer dersom den kan fylle hele planet uten overlapp eller åpenrom.
d. Gjør det samme for den regulære **femkanten** og påvis at den ikke tesselerer.
f. Endre størrelsen på start-sekskanten ved å dra i et av hjørnene (i den første sekskanten) og studer.
g. Vurder ditt læringsutbytte i forhold til den klassiske måten å lære om tesseleringer på.

23. Plangeometriske symmetrier: Rotasjoner om et punkt



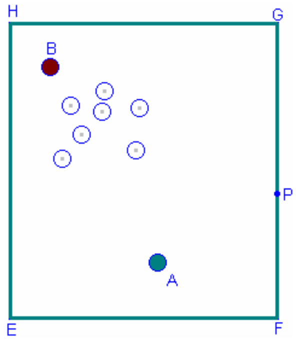
a. Konstruer en sirkel med radius ca. 3 cm. Kall sentrum E.
b. Tegn et horisontalt linjestykke fra E ut til sirkelperiferien, og kall endepunktet D.
c. Merk av et punkt F på sirkelperiferien.
d. Marker vinkelen DEF og mål den.
e. Konstruer trekant og navnsett hjørnene A, B og C.
f. Tegn et punkt S utenfor trekanten.
g. Bruk funksjonen Roter og roter trekant ABC om S så mye som vinkel DEF viser.
h. Klikk deretter på punktet F og dra det rundt på sirkelen. Hva ser du?
i. Noter deg hva en slik konstruksjon kan tilby i forhold til en vanlig konstruksjon med passer og linjal.

24. Plangeometriske symmetrier: Parallellforskyvninger med en gitt vektor



Du skal starte med å konstruer figuren til venstre.
a. Konstruer den ikke-regulære sekskanten ABCDEF ved hjelp av **polygon**-funksjonen (Hjørnene trenger ikke navn.) slik at AB = BC = CD = DE og AF = FE = 2 AB.
b. Konstruer så en **vektor** fra F til C.
c. Velg menyfunksjonen **parallellforskyv** og klikk på mangekanten ABCDEF og deretter på vektoren FC. Forklar det du ser.
d. Gjenta c., men nå med den parallelforskjøvne figuren.
e. Gjenta d. igjen med en siste figuren du har fått.
f. Lag et båndmønster ved å fortsette noen ganger slik.
g. Klikk på punktet A og dra hjørnet ut av stilling. Hva skjer med båndmønsteret?
h. Noter deg hva en slik konstruksjon kan tilby i forhold til en vanlig konstruksjon med passer og linjal.

25. Speiling om ei rett linje: Biljardspillet



Du skal skyte ei biljardkule A for å treffe ei kule B. Det ligger mange kuler i vegen, og du bestemmer deg for å skyte via kanten FG og kanten GH (i ett forsøk).

a. Konstruer figuren til venstre.

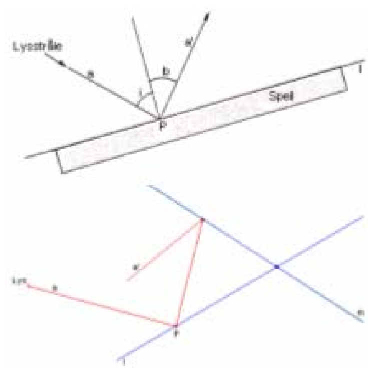
b. Tenk deg at du velger et **punkt** P på kanten FG og skyter kula A mot dette punktet. Hvordan vil kula gå etterpå?
Konstruer P og linjestykker som viser den vegen kula vil følge. Treffer den kula B?

c. Pek, klikk, hold og dra i punktet P til du ser at du vil treffe kule B.

d. Merk deg hvor P må ligge for at du skal treffe A.
Diskuter hvordan du kan **konstruere punktet** P slik at kule A alltid treffer kula B.

e. Prøv å flytte rundt på kule A og studer hvor banen til kula går i hvert enkelt tilfelle.

26. Refleksjon og speil



Når en lysstråle treffer et speil, blir den kastet tilbake. Den blir reflektert. Lyset blir reflektert slik
at innfallsvinkelen i er lik brytningsvinkelen b.

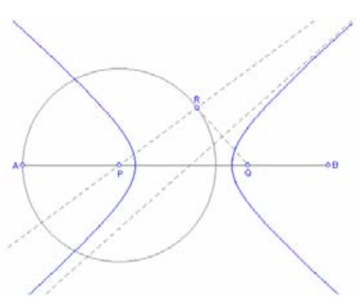
a. Lag en konstruksjon som viser hvordan en lysstråle reflekteres. La speilet være l, og la lysstrålen treffe den i et punkt P. Det kan være nyttig å konstruere en normal til l i P.

b. Undersøk hvordan det går med en lysstråle som treffer to speil, og dermed blir reflektert to ganger.
Tegn et speil l. En lysstråle treffer l i P og blir reflektert. Den reflekterte strålen treffer et annet speil, m. (se fig.)
Gjennomfør konstruksjonen som viser hvordan strålen reflekteres via de to speilene.

c. Grip fatt i et av speilene, f.eks. m og drei eller flytt på det.
Undersøk hvordan det går med a’ når du endrer vinkelen mellom speilene l og m.
Hva ser du?
Undersøk hvordan lysstrålene a og a’ går når vinkelen mellom speilene er rett. ($90°$)

2.4 Kjeglesnitt med Cabri

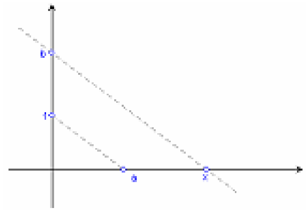
27. Konstruksjon av kjeglesnittkurven hyperbelen



Tegn et vannrett linjestykke, ca. 8 cm langt. Kall endepunktene A og B.
Legg et fritt punkt P på AB og et fritt punkt Q på AB til høyre for P.
Konstruer en sirkel med sentrum P og radius PA.
Legg et fritt punkt R på sirkelen og trekk linjestykket RQ.
Konstruer ei rett linje, m, gjennom P og R.
Konstruer midtnormalen til RQ og konstruer skjæringspunktet, T, mellom midtnormalen og linja m.
Konstruer LOKUS for T når R beveger seg rundt på sirkelen.
Dra i punktet Q og observer. Hva ser du?

2.5 Konstruerbare tallstørrelser ved hjelp av Cabri

28. Konstruerbare tall: Produktet av to tall

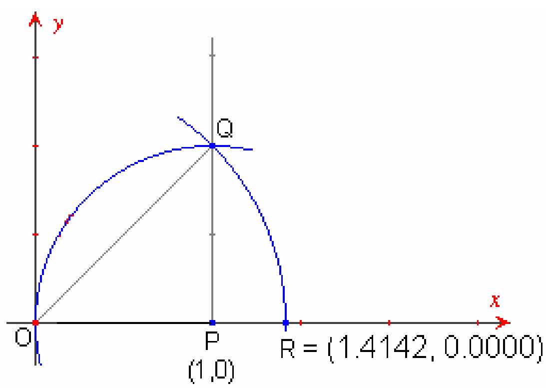


a. Konstruer figuren til venstre. Punktet a skal være et fritt punkt på x-aksen og punktet b skal være et fritt punkt på y-aksen. Punktet x framkommer ved å:
- Konstruere linjestykket gjennom a og punktet (0,1) på y-aksen.
- Konstruere en parallell med linjestykket som går gjennom b .
- x er skjæringspunktet mellom parallellen og x-aksen.

b. Finn ut fra konstruksjonen sammenhengen mellom punktet x og punktene a og b.

c. Dra i a og etterpå også i b, og studer hvordan x endres.
Bruk **Likning eller koordinater** til å bestemme tallverdiene til a, b og x. og gjenta punkt c.

29. Konstruksjon av kvadratrøtter: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{n}$



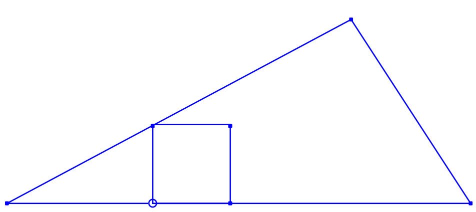
a. Konstruer tallstørrelsen $\sqrt{2}$ ved å gå frem slik:
- Ta fram koordinatsystemet og legg inn et rutenett.
- Konstruer en normal gjennom punktet P = (1,0) på x-aksen.
- Slå en sirkel om P = (1,0) som går gjennom origo.
- Marker skjæringspunktet, Q, mellom normalen og sirkelen.
- Trekk linjestykket OQ.
- Slå en sirkel om O med radius OQ og marker sirkelens skjæringspunkt, R, med x-aksen.(på positiv side.)
- Bruk Likning og koordinater til å finne x-koordinatene til punktet R.
- Forklar ut fra konstruksjonen at R må ha 1.-koordinat lik $\sqrt{2}$.

b. Forsøk å konstruere $\sqrt{3}, \sqrt{4}$ **og** $\sqrt{5}$ etter tur ved å bygge på konstruksjonen av $\sqrt{2}$.
HiNT: $\sqrt{3}$ kan konstrueres ut fra en rettvinklet trekant med kateter $\sqrt{2}$ og **1**, $\sqrt{4}$ kan konstrueres ut fra en rettvinklet trekant med kateter $\sqrt{3}$ og **1**,
$\sqrt{5}$ kan konstrueres ut fra en rettvinklet trekant med kateter $\sqrt{4}$ og **1**, osv.

2.6 Problemløsings - oppgaver

30.

En klassisk problemløsingsoppgave går ut på å konstruere et kvadrat som har alle sine hjørner på sidene i en gitt trekant.

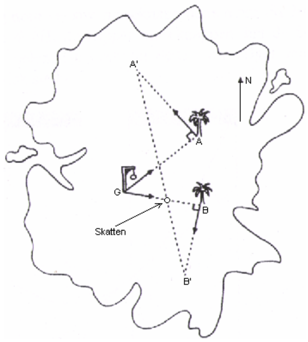


a. Løs denne oppgaven ved å eksperimenter med en Cabri-konstruksjon. Konstruksjonen til venstre kan være til hjelp. Her er P valgt som et fritt punkt på linjestykket AB og PQRS er konstruert som et kvadrat.

b. Dra i punktet P og undersøk hvordan det 4. hjørnet R beveger seg.

c. Bruk det du finner ut i b. til å konstruere løsningen.

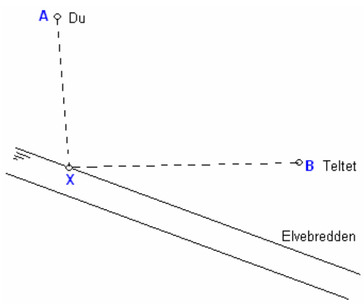
31. Denne oppgaven er hentet fra heftet *Komplekse tall* av Finn Holmboe.



Du har reist til en øde øy for å finne en nedgravd skatt. På skattekartet står det:

Start ved galgen G, telle antall skritt til den nordlige palmen A, drei 90 grader til venstre og gå like mange skritt fra A. Da kommer du til punktet A'.
Start deretter på nytt fra galgen G, gå til palmen B, drei 90grader til høyre og gå like mange skritt fra B. Da kommer du til B'.
Skatten er begravd midtveis mellom A' og B'.
Når du kommer til øya, finner du til din forskrekkelse at galgen er vekk, bare de to palmene står igjen. Kan du likevel finne skatten?
Oppgaveteksten tyder på at skatten ligger på samme sted uansett hvor galgen er plassert.
Sjekk dette ved å konstruere i Cabri.

32. Problem med korteste veg
En problemløsingsoppgave som kan løses ved hjelp av speiling om ei rett linje



Du er på bærtur og har slått opp teltet i B ved siden av ei elv.(se "kartet" nedenfor).

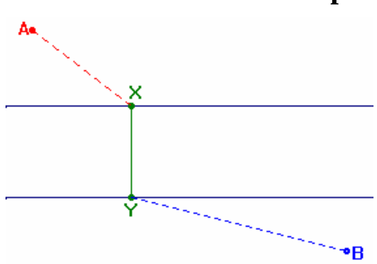
Selv er du i ferd med å plukke bær i et spann i A da du plutselig oppdager at teltet

står i brann. Du tømmer ut bærene av spannet og vil løpe til elva for å hente vann i spannet for å slukke teltbrannen. Spørsmålet er nå til hvilket punkt P på elvebredden

du vil løpe for å ha kortest mulig distanse å løpe. På "kart"-
figuren til venstre er tegnet inn en mulig løpsveg AX og deretter XB via et punkt X på elvebredden. Spørsmålet er altså hvor på elvebredden X må ligge for at avstanden AX + XB skal bli minst mulig.

a. Konstruer en liknende figur der du merker av punktene A og B og tegner elvebredden som et linjestykke.
b. Konstruer så et punkt X hvor du vil, men på elvebredde-linjestykket..
c. Mål avstandene AX og deretter XB.
d. Regn deretter ut summen av avstandene AX + XB.
e. Pek, klikk, hold og dra så i punkt X og observer hvordan totalavstanden AX + XB endres. Kan du finne et sted X kan ligge for at denne avstanden blir minst mulig? Noter.
f. Diskuter hvordan du kan finne dette stedet ved konstruksjon og konstruer punktet. (HiNT: Bruk speiling om ei linje)

33. Enda et korteste avstand problem

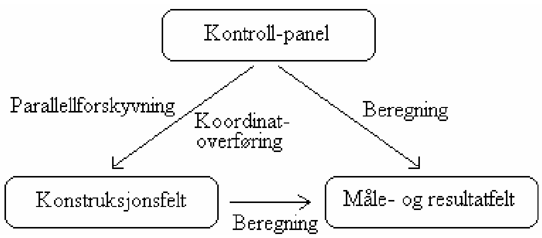


Samme problemstilling som i 32, men nå ligger teltet (B) på motsatt side av elva. (og elva er har en bredde å ta hensyn til.)
Du skal nå løpe til X på "din" elvebredd og via en tømmerstokk som akkurat når over elva (m.a.o. må den legges vinkelrett på elvebredden for å rekke over. Hvorfor?)
Finn ved konstruksjon hvor du må legge stokken (XY) for at løpeturen fra A til B via stokken XY skal bli kortest mulig.

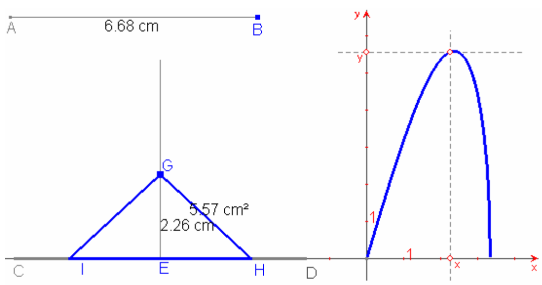
a. Legg et vilkårlige punkt X på samme elvebredd som der A ligger.
b. Bruk måling for å teste ut omtrent hvor på elvebredden X må ligge for at den samlede avstanden skal bli minst mulig.
c. Finn deretter ut hvordan du kan konstruere punktet X (og Y) og utfør så konstruksjonen og test løsningen.
d. Kunne du funnet løsningen uten å bruke speiling om ei rett linje. Forklar.
e. Hvilke muligheter gir Cabris dynamiske egenskapene til Cabri deg i arbeidet med å løse dette problemet som ikke
ville være tilstede med papir, blyant, linjal og passer som redskap

2.7 Mikromiljø laget ved hjelp av Cabri for å studere funksjoner

Et Cabri-miljø for arbeid med dynamisk funksjonslære



På den utdelte CD-en finnes det ferdiglagede sidemaler som kan brukes til å konstruere Cabri-miljø for å studere funksjonsgrafer.
I figuren til venstre er det antydet en liten oversikt over hvordan en kan benytte Cabris egenskaper generelt til å styre slike applikasjoner.



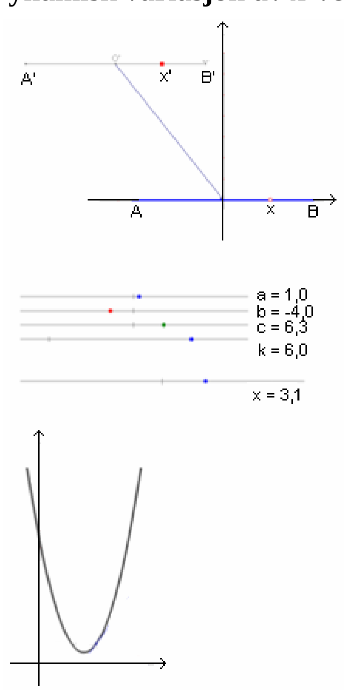
Eks.1. En areal-funksjon

Først et lite eksempel :

I figuren til venstre, er CD en vegg. AB er lengden av et gjerde. IG og GH er to like lange deler slik at IG + GH = gjerdelengden AB.
Problemet er å finne ut hvor G må legges for at arealet skal bli størst mulig.

a. Konstruer figuren lengst til venstre. A skal være et fast punkt, mens B skal kunne ”gli” fritt mot høyre. (dvs. at AB er en såkalt ”slider”)
b. Ta fram koordinatsystemet (fig. til høyre)
c. Mål AB og avsett AB langs x-aksen. (Gir punktet x på x-aksen)
   Mål EG = h og avsett måltallet langs y-aksen. (Gir punktet y på y-aksen)
d. Konstruer en normal til x-aksen gjennom x, og en normal til y-aksen gjennom y.
e. Marker skjæringspunktet, P, mellom normalene og konstruer LOKUS for P når du drar i G.
g. Hva viser den framkomne funksjonsgrafen?
h. Bruk grafen til å løse problemet ” hvor G må legges for at arealet skal bli størst mulig?”

Dynamisk variasjon av x-verdi fra en ”slider”



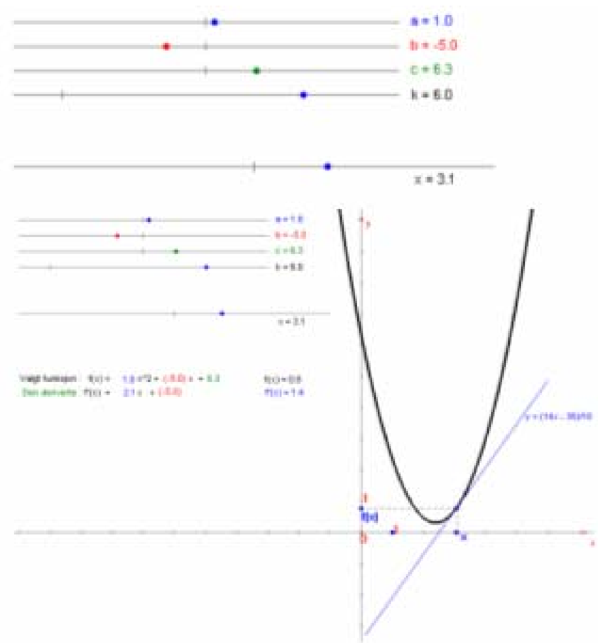
Bestem definisjonsområde på 1. aksen ved punktene A og B og mål avstanden AB
langs 1. aksen
Merk av punkt A’ til venstre for koord.-syst.
Konstruer parallell med 1.-aksen gjennom A’
Avsett målet for AB fra A langs parallellen.
Dette gir punkt B’.
Konstruer midtpunktet, O’, til A’B’ og linjestykket A’B’.
Konstruer et fritt punkt x’ på A’B’ og konstruer vektor O’O. (O er origo i koordinatsystemet.)
Parallellforskyv x’ ved hjelp av O’O-vektor. Gir punkt x.
Speil først O om x’’. Gir punkt x slik at x til slutt har hele AB som definisjonsområde når x’ varieres på linjestykket A’B’.

Nå kan du konstruere funksjonsgrafer ved å gå fram slik:

- Velg x-verdi fritt som et variabelt linjestykke (punkt på ”slider”)

- Avsett x-verdien langs 1.-aksen
- Konstruer en normal til 1.-aksen gjennom avsatt punkt
    - Velg parametre fritt som variable linjestykker
    - Beregn funksjonsverdien f(x)
    - Avsett x-verdien langs 2.-aksen
    - Konstruer en normal til 2.-aksen gjennom avsatt punkt
    - Konstruer skjæringspunktet P mellom normalene
    - Konstruer grafen til funksjonen f som det geometriske sted for P når x-verdien varierer fritt

Eks.2. En dynamisk funksjonsmiljø for å studere 2. gradsfunksjonen



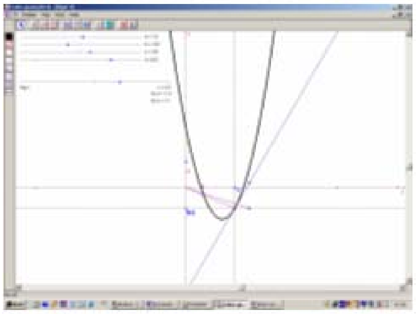
Den generelle 2.-gradsfunskjonen er på formen $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, der $a, b, c \in R$.
Her har vi en fri variabel x, og tre parametre. Vi merker oss at ethvert valgt reelt talltrippel (a,b,c) gir oss en bestemt 2.-gradsfunksjon, slik at vi både kan variere funksjonen og x-verdien :

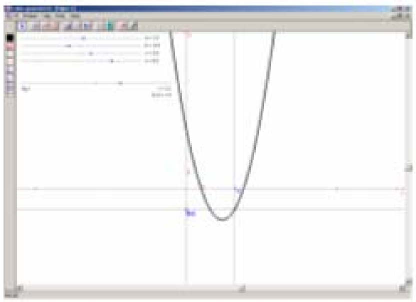
Vi konstruerer 4 parallelle, kongruente linjestykker og merker av midtpunktet på tre av dem. Det fjerde deler vi i 8 like deler og merker av for en av dem. Så legger vi inn et fritt punkt på hvert av linjestykkene og bruker koordinater til å la verdien til punktene variere f.eks. fra – 4 til 4. På det fjerde linjestykket lar vi verdiene variere fra 0 til 8.
De tre første ”sliderne” brukes til å endre parameterverdiene for a, b og c henholdsvis, mens det siste linjestykket brukes til å angi en skaleringsfaktor k.

Deretter bruker vi det innebygde koordinatsystemet, legger to endepunkter på førsteaksen og måler avstanden.
Denne overføres så til en ”slider” og midtpunktet (som tilsvarer origo på x-aksen) avmerkes.
Deretter legges et fritt punkt også på dette linjestykket og koordinater brukes til å gi punktet x-verdi fra -5 til 5.
x-verdien overføres deretter til koordinatsystemets 1.-akse ved hjelp av en vektor fra midten av slideren til origo. Så konstruerer vi en normal til x-aksen gjennom det avsatte x-verdi-punktet på 1-aksen.

Vi beregner verdiene for parametrene a, b og c skalert med k-verdien og til slutt beregner vi så funksjonsverdien f(x) ved hjelp av formelen $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ for de valgte verdier av parametrene a, b og c og valgt x-verdi.
f(x) avsettes så på 2.-aksen og en normal til 2.-aksen konstrueres i avsatt punkt. Normalenes skjæringspunkt utgjør da punktet (x,f(x)). Til slutt bruker vi meny-funksjonen LOKUS (geometrisk sted) for punktet (x, f(x)) når x-verdien på slideren varierer.

Vi kan gi et geometrisk uttrykk for den deriverte til funksjonen i ethvert punkt ved å konstruere tangenten til grafen til funksjonen i punktet (x, f(x)). Vi kan da benytte at $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ og beregne $f'(x)$ for valgt x-verdi. Så avsettes verdien for f’(x) på 2-aksen. Vi parallellforskyver til slutt enhetsintervallet OE vektoren fra O til (x, f(x)) (og får punktet P) og parallellforskyver aller sist punktet på 2.-aksen som angir verdien til f ’(x) vektoren OP. Dermed får vi et nytt punkt Q som vil ligge på tangenten gjennom (x, f(x)).
Vi konstruerer så linjen gjennom (x, f(x)) og Q.





Vi kan benytte tilsvarende fremgangsmåte for å framstille grafen til den deriverte funksjonen
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ for valgte verdier av a og b.
Skjuler vi så hjelpelinjer og "brusher opp" figuren, har vi en dynamisk funksjonsgrafe. (figuren nederst)
I denne modellen kan vi variere parametrene a, b og c kontinuerlig (innenfor visse valgte verdier), vi kan bevege punktet (x, f(x)) på grafen.
Merk deg at nettopp på grunn av at du kan variere parameterverdiene a, b og c dynamisk, så kan du studere alle typer 2.-gradsfunksjoner grafisk ved hjelp av dette mikro-miljøet.

Du kan finne fram til mappen for 2.-gradsfunksjoner på CD-en og studere i detalj hvordan du kan lage slike funksjonsanalyse-miljø ved hjelp av Cabri.

34. Bruk av ferdige Cabri-miljø for å analysere funksjoner

a. Hent inn filene etter tur i Cabri og bruk meny-valget **Vis konstruksjon** til å studere hvordan miljøet er bygget opp.
b. Prøv ut Cabrimiljøet ved å endre parameterverdier og variere x-verdi i definisjonsmengden.
c. Reflekter over hvordan du lærer om funksjoner ved hjelp av hvert av Cabri-miljøene.

35. Cabri-miljø for å studere lineære funksjoner (Se figur nedenfor.)

a. Start med blank skjerm. Ta fram **koordinatsystemet**. **Vis akser**
b. Lag deretter **rutenett** i koordinatsystemet ved å velge definer rutenett og peke og klikke på en av aksene. **Definer rutenett**
c. Pek på origo, trykk venstre mustast ned, hold og dra koordinatsystemet til det er omtrent midt på skjermen.
d. Ha menyvalget **Vis stilvalg** fremme på skjermen. **Vis stilvalg**
e. Velg **punkt** og velg stort (fylt) punkt fra stilvalgs-menyen. **Punkt**
f. Klikk på et av rutenettpunktene og velg **Likning og koordinater** og pek og klikk på punktet ditt. **Likning og koordinater**
g. Pek og klikk på punktet ditt, trykk venstre mustast ned, hold og dra punktet rundt i rutenettet til det har koordinatene (-10,7).
h. Konstruer en parallell gjennom punktet ditt som er parallell med y-aksen. **Parallell**
i. Gjenta det du gjorde i f. og dra dette punktet (se g.) slik at det får koordinatene (-10,-7)
j. Konstruer **linjestykket** fra det ene punktet (dvs. (-10,7)) til det andre (med koordinater (-10,-7)). **Linjestykke**

k. Skjul parallellen du laget i h. ved å velge Skjul/Vis og klikke på parallellen. **Skjul/Vis**

l. Skjul så endepunktene og deres koordinater ved igjen å velge Skjul/Vis og peke og klikke på objektene **Skjul/Vis**

m. Konstruer **midtpunktet** på linjestykket ved å velge midtpunkt og peke og klikke på linjestykket **Midtpunkt**

n. Velg **punkt på objekt** og pek og klikk på vilkårlig sted på linjestykket. **Punkt på objekt**

o. Sett navn på det siste punktet ved å velge **sett navn på**, peke på punktet og klikke og skrive **b**. **Sett navn på**

p. Konstruer en vektor fra midtpunktet på linjestykket til origo ved å velge **vektor**, peke på midtpunktet, klikke, slippe og dra til punktet origo og deretter klikke. **Vektor**

q. Velg parallellforskyv, pek på punktet b og pek så på vektoren og klikk **Skjul** så vektoren **Parallellforskyv**
Punktet b blir da parallellforskjøvet til et punkt på y-aksen.
Navnsett dette punktet også b. **Sett navn på**
Dermed kan du variere konstantleddet til funksjonen din.
Pek, klikk og dra i punktet b og studere hva som skjer.

r. Gjenta linjestykke-konstruksjonen (se f. – m. ovenfor) men nå mellom punktene med koordinater (-9,7) og (-9,-7).

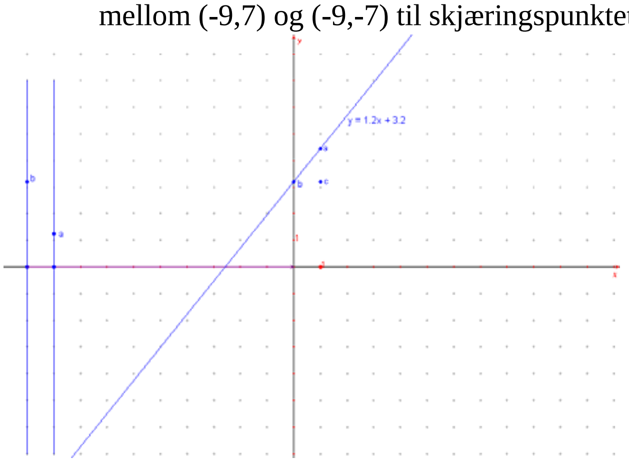
s. Konstruer på samme måte som i n. og o. et nytt punkt navnsatt **a** på dette linjestykket

t. Konstruer en **normal** til y-aksen gjennom punktet b på y-aksen ved å velge normal, klikke på punktet b på y-aksen og deretter klikke på y-aksen. **Normal**
Konstruer også en **normal** til x-aksen gjennom punktet merket 1 i koordinatsystemet ved å velge normal, klikke **Normal** i punktet merket 1 på x-aksen og deretter klikke på x-aksen.

u. Konstruer **skjæringspunktet** mellom disse normalene ved å velge skjæringspunkt, klikke først på den ene normalen og deretter på den andre.
Navnsett skjæringspunktet c. **Skjæringspunkt**

v. Skjul begge normalene ved å velge **Skjul/Vis** og deretter klikke på begge normalene etter tur.
Klikk deretter på pilknappen. **Skjul/Vis**

w. Konstruer en vektor fra midtpunktet på linjestykket mellom (-9,7) og (-9,-7) til skjæringspunktet c. **Vektor**



x. **Parallellforskyv** punktet a på siste linjestykke ved å velge Parallellforskyv, klikke på punktet a og deretter klikke på vektoren. Skjul deretter vektoren.
Navnsett det parallellforskjøvne punktet også a. **Parallellforskyv**

y. Konstruer ei rett **linje** gjennom punktet b på y-aksen og a til høyre for y-aksen ved å velge linje, og deretter klikke på punktet a på y-aksen og så på a til høyre for y-aksen. **Linje**

z. Få fram **likningen for linja** ved å velge Likning og koordinater og deretter

klikke på linja. **Likning og koordinater**
Modellen din er nå ferdig konstruert.

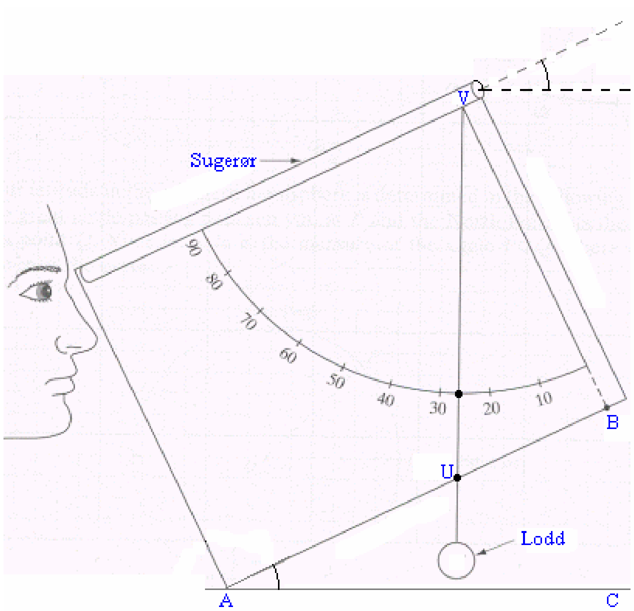
æ. Lagre til slutt modellen din for eksempel under navnet linfunk.fig. **Lagre som**
Skjermbildet ditt vil se ut omtrent som vist på forrige side.

ø. Prøv ut Cabri-miljøet du har konstruert og noter deg hva du lærer om lineære funksjoner ved hjelp av denne applikasjonen.

2.8 Et tverrfaglig matematikk-prosjekt med Cabri-ressurser som læringsstøtte: Klinometeret og polhøyda.

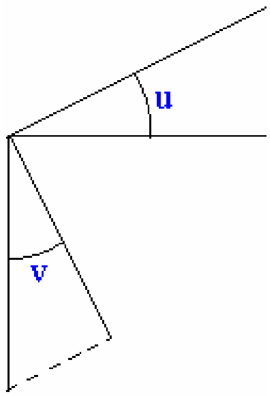
I middelalderen hadde man et instrument man kalte *kvadrant*, som ble brukt til å måle avstander med. På skip brukte man tidligere et instrument kalt *sekstant*, for å bestemme posisjonen til skipet.
Kan du finne ut noe om disse to instrumentene, for eksempel fra et leksikon?
Et ***Klinometer*** er en forenklet versjon av både en kvadrant og en sekstant. Instrumentet blir brukt til å måle høyder av store objekter (bygninger, fjell, trær osv.), og (*elevasjons-)vinkler*.
Elevasjonsvinkelen er vinkelen mellom horisontalplanet og siktelinjen mot det objektet man sikter mot. Eksempler på slike vinkler, er solhøyden og polhøyden. (Polhøyden viser hvor høyt Polarstjerna (Polaris) står på himmelen.)

36. Lag et Klinometer



Klinometeret er enkelt å lage. (Se fig. til venstre.)
Du trenger:

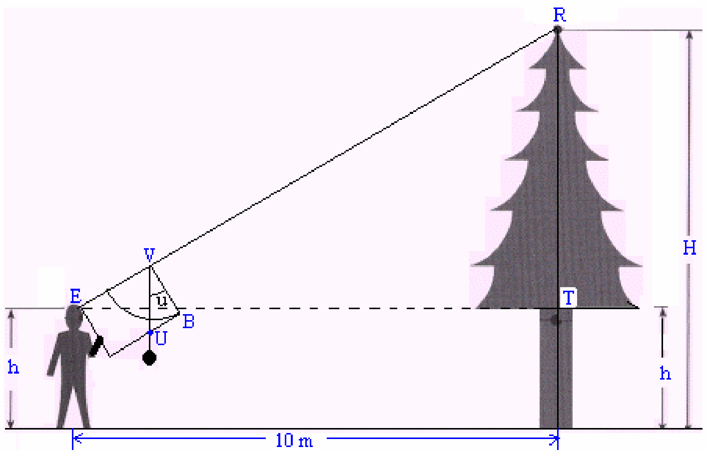
- En plate av spon, finer, papp, plankebiter eller lignende. Størrelse ca. 30 – 50 cm lang og minst 22 cm bred.
- Et sugerør med åpningsdiameter ca. 0,5 cm. (Bruk f.eks. typen med ”bøy”. Skjær bort bøyen, og skjøt to rør sammen ved å lage et lite snitt i enden av det ene og trykke dem sammen.)
- Blankt A4-ark eller mm-ark.
- Tape og tegnestifter.
- En passe lang (litt sterk, men tynn) tråd. (minst 0,5 m lang)
- En passe tung gjenstand som kan knyttes i enden av loddsnora. (Sten, lodd, eller lignende)
(Snora må henge stramt loddrett)
- Gradskive (til å tegne gradinndeling 0 – 90 grader på A4-arket) eller ferdigtegnet ark med vinkelangivelse fra 0^{o} til 90^{o}. (Se fig.)
Fest A4-arket med grad-inndeling slik som vist i figuren til venstre. Fest loddlinje-tråden i øvre høyre hjørne av plata f.eks ved hjelp av en tegnestift.
Gjør ferdig sugerøret slik at det passer med lengden av plata du bruker, og fest sugerøret langs den øvre kanten av plata med tape. Klinometeret ditt skal da se ut omtrent som vist i figuren ovenfor.
Prøv Klinometeret ditt ved å sikte mot et fast punkt, f.eks. en lyskilde og les av vinkelen BVU.



Klinometerets virkemåte

I figuren på forrige side er $\angle$ BAC *elevasjons-vinkelen* til Klinometeret.
I figuren er også $\angle CAB = \angle BVU$. Dette er grunnen til at Klinometeret er så nyttig.
Kan du finne ut hvorfor elevasjonsvinkelen, $\angle CAB$ alltid må være lik $\angle$ BVU ?

Figuren til venstre kan være til hjelp for deg.

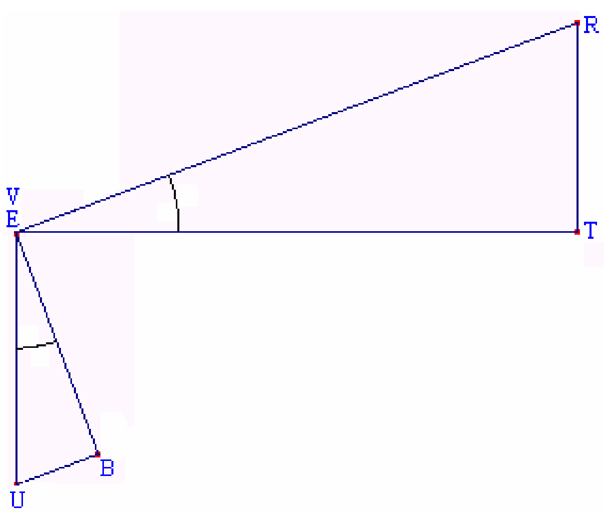


Hva kan du måle ved hjelp av Klinometeret?

Eks.1.: Høyden av et tre.

Du ønsker å finne høyden av treet vist i figuren nedenfor. Da bruker du Klinometeret til å finne elevasjonsvinkelen mellom horisontalplanet (tegnet som linjen ET i din øyenhøyde) og siktelinjen mot toppen, R, av treet. Du må også måle avstanden langs bakken fra der du står til treet. (I dette tilfellet 10 m).

Nå kan du finne treets høyde ved å bruke at trekant BVU er formlik med trekant TER.
Hvorfor tror du dette er tilfelle? Figuren nedenfor kan hjelpe deg.



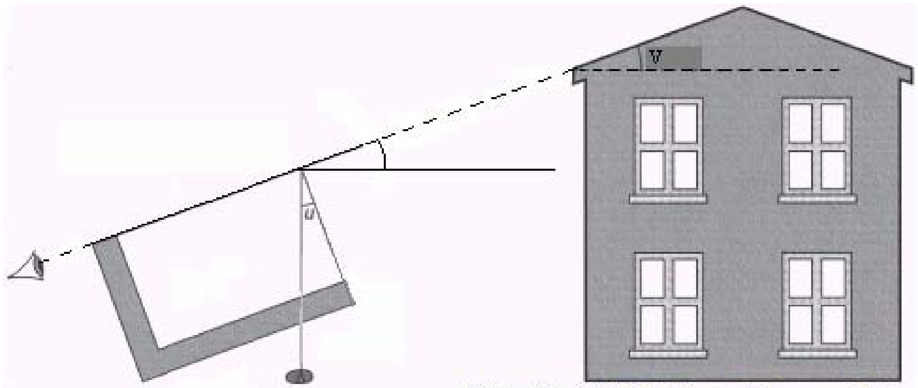
Siden trekantene er formlike, er: $\dfrac{RT}{UB} = \dfrac{ET}{VB}$

som gir: $RT = \dfrac{ET}{VB} \cdot UB$.

Avles deretter lengdene VB og UB på Klinometeret, sett inn og regn ut lengden RT.

Treets høyde, H, blir nå lik RT + høyden, h, fra bakken til øynene dine.

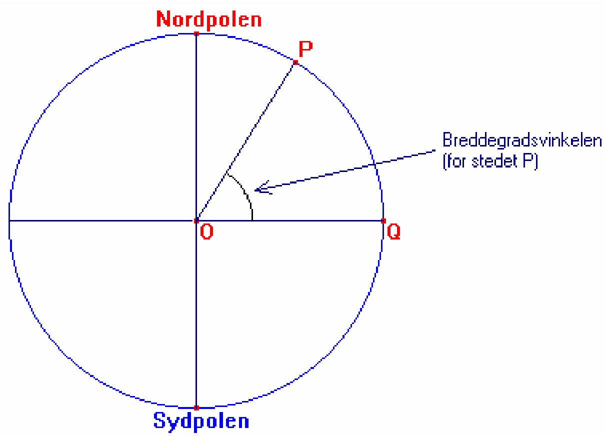
Eks.2.: Tak-vinkelen på et hus



Kilde : "Prosjektboka" Kjøsnes, Kvammen, Tvete

Bruk figuren som hjelp og finn ut hvordan du kan bestemme takvinkelen, ∠ v på figuren, for et hus eller en annen bygning.

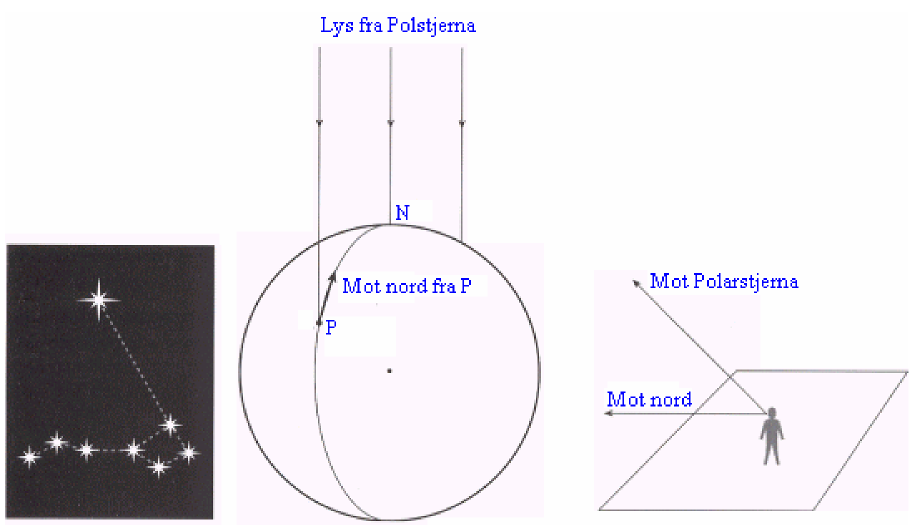
Eks.3.: Hvor langt nord på jorda ligger egentlig Levanger? (Levangers breddegrad)



Figuren til venstre or viser jorda sett " rett fra siden". På figuren er P et sted på den nordlige halvkula.
OP er radius i jordkula (fra jordas sentrum til punktet P) og linja gjennom O og Q viser ekvator-planet. Breddegraden for stedet P, på jordoverflaten, er vinkelen mellom ekvatorplanet nedenfor og OP.

Du kan bruke Klinometeret til å finne ut hvor stor denne breddegradsvinkelen er!
(Dvs. hvor langt nord på jordkula du befinner deg.)

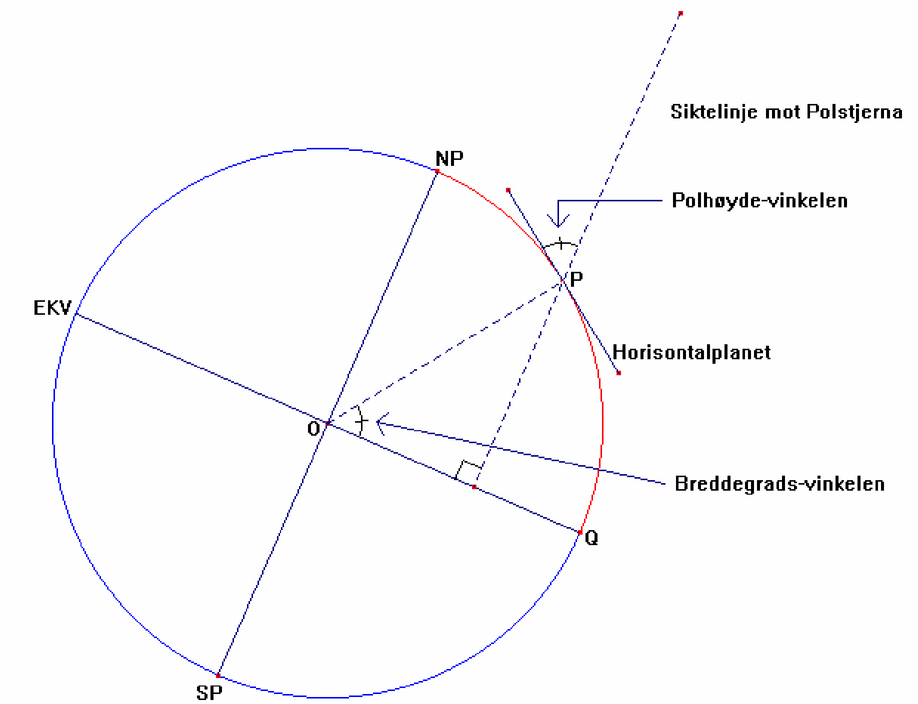
Dette gjør du ved å måle en annen vinkel, nemlig elevasjonsvinkelen til Polarstjerna over horisonten. Denne vinkelen kalles vanligvis *Polhøyda.*
Polarstjerna står praktisk talt rett i nord. Dermed er lysstrålene fra den parallelle med jord-aksen:



Kilde : "Prosjektboka" Kjøsnes, Kvammen, Tvete

Forklar utfra figurene ovenfor hvordan Polarstjerna kan hjelpe oss til å finne veien nordover. (og dermed også sørover, østover og vestover)
Service-folk som installerer parabol-antenne stiller vanligvis inn antennen i en bestemt retning mot satelitten som brukes. F.eks. 1^{o} Vest. (regnet fra retning rett syd)
En grovinnstilling kan gjøres ved å sikte mot Polarstjerna (Da har du retning rett Nord) og snu deg 180 grader. Da har du retning rett syd.

Figuren nedenfor viser at *polhøyde-vinkelen alltid er like stor som breddegradsvinkelen*. Se nøye på figuren.

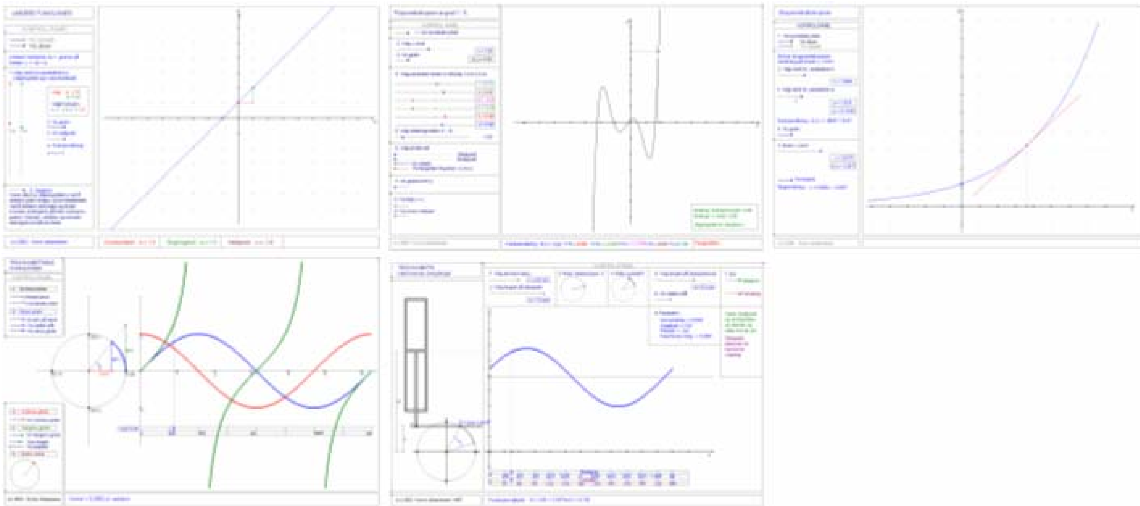


- Tenk deg at du står i punktet P på den nordlige halvkula. (Du kan for eksempel tenke deg at P er Levanger.)
- Sikt først vannrett (dvs. rett fram parallelt med bakken) med Klinometeret ditt. Da henger naturligvis loddsnora på Klinometeret loddrett, og vinkelrett på din siktelinje. Siktelinja di tilsvarer det som er kalt **horisontalplanet** på figuren ovenfor.
- Bøy nakken bakover og drei så Klinometeret til du får lyset fra Polstjerna i siktet. På figuren tilsvarer dette den prikkede linja som er kalt **Siktelinja mot Polstjerna**.
- Merk av vinkelen du avleser ved hjelp av loddsnora på Klinometeret. Noter gradtallet for denne vinkelen.
- **Polhøydevinkelen** (se fig.) er da vinkelen mellom horisontalplanet og denne siktelinja.
- Du har tidligere lært hva **breddegradsvinkelen** for et sted på jorda er. Ser du at det nettopp er vinkel QOP på figuren? (O er jordas sentrum og Q er ett punkt på ekvator-sirkelen)
- Vi påstår nå at: **Polhøydevinkelen** og **breddegradsvinkelen** for P er like store!
- Kan du se hvorfor? Figuren i oppgave 37 nedenfor kan være til hjelp.

37. Å lag et Cabri-miljø for å finne sammenhengen mellom breddegradsvinkelen og Polhøydevinkelen

a. Studer figuren ovenfor nøye.
b. Konstruer figuren ved hjelp av Cabri.
c. Varier breddegradsvinkelen ved å flytte punktet P.
d. Reflekter og forklar hva du ser.
Hvorfor blir breddegradsvinkelen lik Polhøydevinkelen?

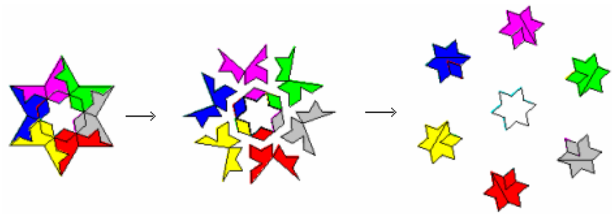
2.9 Noen eksempler på dynamiske mikromiljø (laget ved hjelp av Cabri) for å studere funksjoner.



Figuren viser skjermbilder fra Cabri-miljø for å studere

- Lineære funksjoner
- Polynom-funksjoner
- Eksponential-funksjoner
- Periodiske funksjoner

og nederst til høyre er vist et skjermbilde utklipp fra et Cabri-miljø for å studere harmoniske svingninger.



"Man is a tool-using animal.
without tools he is nothing,
with tools he is everything."
Thomas Carlyle

3. Fagdidaktiske kommentarer

3.1 Litt historikk

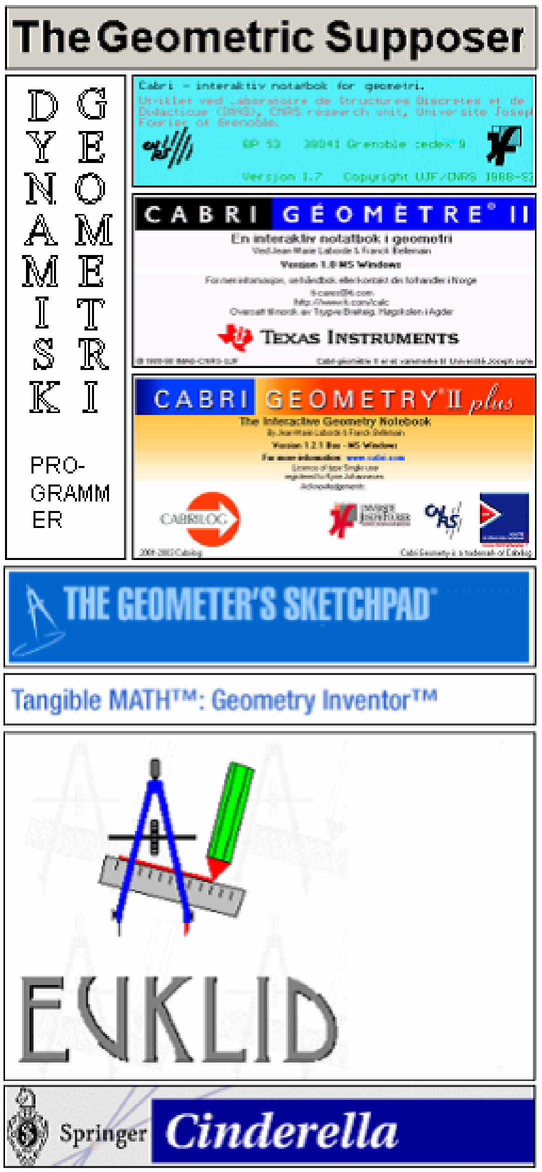


Fig.1.1.1.

Når studenter lærer plangeometri i dag, arbeider de med et område av matematikken som i det alt vesentlige har vært uforandret i mer enn 2000 år. Emnet er ofte kjent som "Euklidsk geometri" etter den greske matematikeren Euklid (ca. 300 f.Kr.) som i boken "Elementa" utviklet en aksiomatisk oppbygget teori for å systematisere det som til da var kjent av resultater innen plangeometrien. ([Euklid – 300])

Redskaper når en skal lære Euklidsk geometri består av papir, blyant, linjal, passer, tavle og kritt. Geometriske konstruksjoner laget ved hjelp av denne typen redskaper har to bemerkelsesverdige karakteristika:

1. De er *statiske*:

   Enhver illustrasjon tegnet på papir eller tavle forblir i en fast posisjon og kan ikke endres uten at noe viskes ut.

2. De er *spesialtilfeller*:

   F.eks. representerer ethvert kvadrat som er konstruert et spesielt kvadrat med en valgt sidelengde.

   Et kvadrat kan pr. definisjon ha en *hvilken som helst* sidelengde, men ingen enkeltstående, stasjonær figur kan inneha generaliteten i denne definisjonen.

Fra slutten av 1980-årene har det funnes et nytt redskap for å bygge geometriske konstruksjoner ved siden av de klassisk tilgjengelige. En type PC-programmer vanligvis kjent som *dynamisk geometri programvare* (DGP) har etablert seg i skolen, i tidsskriftartikler om undervisning og i matematikkforskning på flere nivå som et attraktivt alternativ til linjal og passer. ([Olive.1998]) Av de DGP-pakker som er mest brukt i Norge er kanskje Cabri Geométre mest kjent.

3.2 Cabri-prosjektet

Cabri-prosjektet (fransk: **CA**hier de **BR**ouillom **I**nformatique, eller på norsk "skissebok på data") begynte ved Université Joseph Fourier of Grenoble i 1980-årene. *Målet med prosjektet var å lage et program i form av en slags skisseblokk der elever og studenter kunne utforske egenskaper til – og sammenhenger mellom plangeometriske objekter*.

Jean-Marie Laborde framsatte ideen og sammen med Philippe Cayet, Yves Baulac, begge vitenskaps-menn innen datateknologi, og Franck Bellemain har han utviklet programmet.

Fra 1990 stod Cabri i sentrum for et stort internasjonalt prosjekt ved Institute d'Informatique et de Mathematiques Appliquée of Grenoble, IMAG. Her samarbeidet forskere fra mange ulike kompetansefelt , fra matematikk-didaktikk, matematikk, kunstig intelligens, datateknologi og psykologi så vel som lærere. De samarbeidet om teoretiske og tekniske problemer, og *målet var å finne fram til et miljø som kan gi hjelp for å lære geometri. Forskningen dreier seg hovedsakelig om å finne modeller av elevenes kunnskap, og om hvordan samhandling foregår i undervisningssituasjoner*.

Forskning som allerede er gjort, har vært varierende med hensyn på tema. Colette Laborde har vært ansvarlig for den didaktiske siden, men det er også blitt forsket på andre områder.

Forskning de senere år (se bl.a. [Edwards.1991], [Strässer, Capponi.1991], [Capponi, Sutherland1992],

[Healey, Hölzl, Hoyles, Noss. 1994], [Hölzl, Healey, Hoyles, Noss.1994], [Hoyles, Noss.1994],

[Schumann, Green.1994], [Capponi.1995], [Ippolito.1995], [Laborde.1995], [Laborde, Laborde.1995],

[Sutherland, Ippolito, Porcaro, Healy.1995], [Balacheff, Kaput.1996], [Goldstein, Povey, Winbourne.1996], [Hölzl.1996], [Johnsen.1996], [Dixon.1997] og [Schattschneider, King.1997])

har fokusert på det *visuelle* aspektet av PC-basert læring kombinert med de læringsmessige kvaliteter dynamisk programvare kan tilby og påvist at dette betyr en ny måte å lære på.

Internasjonalt har det de siste 30 årene kommet både kvalitative studier og kvantitativt målte studier der en forsøker å påvise i det minste en læringsmessig relevans for bruk av IKT i undervisningen og i noen tilfeller også om undervisningen kan tilføres noe nytt ved bruk av IKT.

En betegnelse begynte etter hvert å opptre i artikler om forskning på dette fagfeltet, såkalt *dynamisk programvare*. Det ble henvist til ulike typer programvare som i større eller mindre grad fortjente denne betegnelsen og etter hvert kom programvaren på det norske markedet også.

Et eksempel er den første versjonen av geometriprogrammet "Cabri I" som var DOS-basert og noe tungvint i utformingen, men som likevel viste seg å ha en lav brukerterskel og som i stor grad var et interaktivt utformet konstruksjonsprogram som holdt hva programskaperne lovet.

The techniques of computational geometry developed through `computer aided design' (CAD) were applied in industry using what would have been state-of-the-art computers of the 1960s and 1970s but which were less powerful than many of todays `personal data assistants' (PDAs) found in high-street stores. One of the earliest applications of these techniques to a package for educational 2D geometry was Judah Schwarz's *The Geometric Supposer* of the early 1980s from MIT. This ran on one of the earliest personal computers, the Apple II, using one of its `game paddles' as the analog input for `dragging' points and other objects and displaying results on a monitor or TV screen with a palette of just a few colours and a resolution of around 300 by 200 pixels. *Cabri Géomètre* was developed by Jean-Marie Laborde at the IMAG laboratories of the University of Grenoble, initially as a tool for graph theory. In the early 1990s it was developed as a tool for `pure' plane geometry using the original Apple Mac with its one-button mouse for analog input and its built-in monochrome monitor for display. Now there are versions of *Cabri Géomètre* for Texas Instrument hand-held devices such as for the TI-92/Voyage 200 (which uses the same Motorola 68000 chip as the original Apple Mac) and for the TI-83/84 Plus graphical calculators (which use the same Z80 chip as the original RM 380Z classroom computer of the 1980s). Modern packages such as *Cabri Geometry II Plus* and the *Geometer's Sketchpad* have many more mathematical and graphical features which make them suitable for a much wider range of modelling and analytic approaches. Both packages qualify for the current `E-learning credits' available to schools in England. The *Cabri 3D* software for exploring solid geometry was launched at CabriWorld2004 in Rome this month. It promises to revolutionise computer assisted visualisation and reasoning in 3D geometry in much the same way as the earlier `dynamic geometry software' (DGS) has done for plane geometry.

Senere kom Windows-versjonen av programmet og etter hvert utviklet også Høgskolen i Agder norske språkfiler til programmet slik at det i dag fremstår som et program som er fullt ut mulig å bruke i undervisningen i norsk grunnskole.

3.3 Faglig og didaktisk bakgrunn - Induktiv læring av teoremer og begreper

Svakheter ved konvensjonelle konstruksjons-metoder for induktiv læring av setninger om geometriske relasjoner er ofte at

- det tar lang tid å konstruere et stort nok antall passende nøyaktige figurer til å se de relevante sammenhenger setningen viser
- det er bare mulig for setninger basert på enkle konfigurasjoner
- det er ikke enkelt å unngå måle-unøyaktigheter
- bare statiske konfigurasjoner er mulige, unntatt kanskje i de enkleste tilfeller (bevegelse og variasjon er bare mulig gjennom det å tenke seg endringene)

Underliggende mye tradisjonell geometri pedagogikk er hypotesen om at

Mentale bilder av figur-transformasjoner formes (av eleven) analogt med de virkelige transformasjonene av de fysiske modellene av figurene.

Forskning har for så vidt bekreftet dette, men uansett gjenstår problemet at lærere må stole på at elevene er i stand til å se for seg transformasjonene mentalt. Denne antagelsen har vært nødvendig både for grunnleggende former (for eksempel: Hva er et parallellogram?) og grunnleggende setninger (for eksempel ”En diameter til en sirkel er motstående side til en rett vinkel på sirkelperiferien)

3.4 Dynamisk geometri

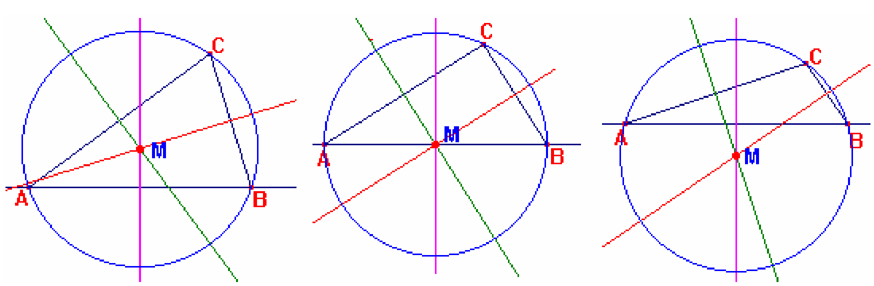
En ny situasjon oppstår med bruk av såkalt dynamisk programvare som har den egenskapen at en kan dra i en konstruert figur og se at forandringen skjer kontinuerlig i ”sann tid” gjennom bruker-kontrollerte bevegelser med muspekeren. På denne måten *kan det å oppnå kunnskap om en figur til en vesentlig grad frikoples fra det å konstruere selve figuren* ved å gi brukeren sammenhenger som lett kan varieres. Med dynamiske geometri-programmer som redskap kan dermed eleven skaffe seg kunnskap om figurer og sammenhenger mellom disse i to steg:

1. *Tegne de frie objektene som grunnlag for figuren og deretter konstruere de avhengige relasjonene som figuren skal bestå av*

2. *Bruke dra-modus til å endre egenskapene til de frie objektene i figuren. De konstruerte relasjonene er da invariante og en kan studere sammenhengen mellom den konstruerte figuren og relasjonene kontinuerlig ettersom figuren endres av eleven.*

Alternativt kan også læreren på forhånd lage en ferdig tegnet figur, som eleven kan konstruere ut fra og deretter studere aktuelle relasjoner som beskrevet ovenfor.

Eks. Posisjonen til om-senteret til en trekant (se fig.)



1. I Cabri II kan trekanten tegnes ved hjelp av menyvalget ”trekant” ved å klikke et

punkt i brukerflaten og dra ut til hvert av de to andre punktene som skal utgjøre trekanten. Punktene er da fritt valgt og kan endres kontinuerlig, mens trekanten som geometrisk objekt fortsetter å være en trekant(eller ei rett linje dersom et av punktene legges på linja gjennom de to andre punktene).
På denne måten kan alle mulige trekanter genereres ved å dra i et av punktene som utgjør trekantens hjørner.

2. Vi kan så konstruere avhengige objekter til den tegnede trekanten, så som f.eks. midtnormalene til sidekantene i trekanten. Dette gjøres ved hjelp av menyvalget "Midtnormal".
Når alle tre midtnormalene er konstruert, kan vi se at de ser ut til å skjære hverandre i ett og samme punkt. Dette kan undersøkes ved å markere skjæringspunktet mellom to av midtnormalene (menyvalget "skjæringspunkt") og deretter undersøke om dette punktet ligger på den tredje midtnormalen (menyvalget "ligger på?").
3. Så kan den tegnede trekantens endres fritt, og vi kan observere at de konstruerte midt-normalene fortsatt er midtnormaler til enhver trekant vi slik genererer..
4. Andre relasjoner kan nå også studeres. F.eks. kan vi slå sirkelen med sentrum i M som går gjennom ett av trekantens hjørner. Denne vil da også gå gjennom de andre to hjørnene, noe vi kan se ved igjen å dra i et av hjørnene og observere.
Videre kan vi se at midtnormalenes skjæringspunkt flytter seg når vi drar i hjørnene og vi kan studere trekantens egenskaper når skjæringspunktet ligger inne i, på eller utenfor trekanten, også dette ved å dra i et av hjørnene og observere vinklene i trekanten alt etter hvor skjæringspunktet M ligger.

3.5 Prinsippet om konfigurativ mobilitet

Dette prinsippet (se [Schumann, Green.1994] sier at det å induktivt finne sammenhenger mellom geometriske objekter gjøres lettere ved å tilby et interaktivt system som støtter kontinuerlig variasjon av konfiguransjoner (objekt-egenskaper). Et system som oppfyller dette prinsippet skal tillate brukeren å:

- produsere mange isomorfe konfigurasjoner fra en konfigurasjon (i "sann-tid")
- produsere spesialtilfeller av konfigurasjonen fra et generelt tilfelle
- produsere spesialtilfeller av konfigurasjonen fra andre spesialtilfeller
- produsere grensetilfeller av konfigurasjonen

Det operative spørsmålet blir:

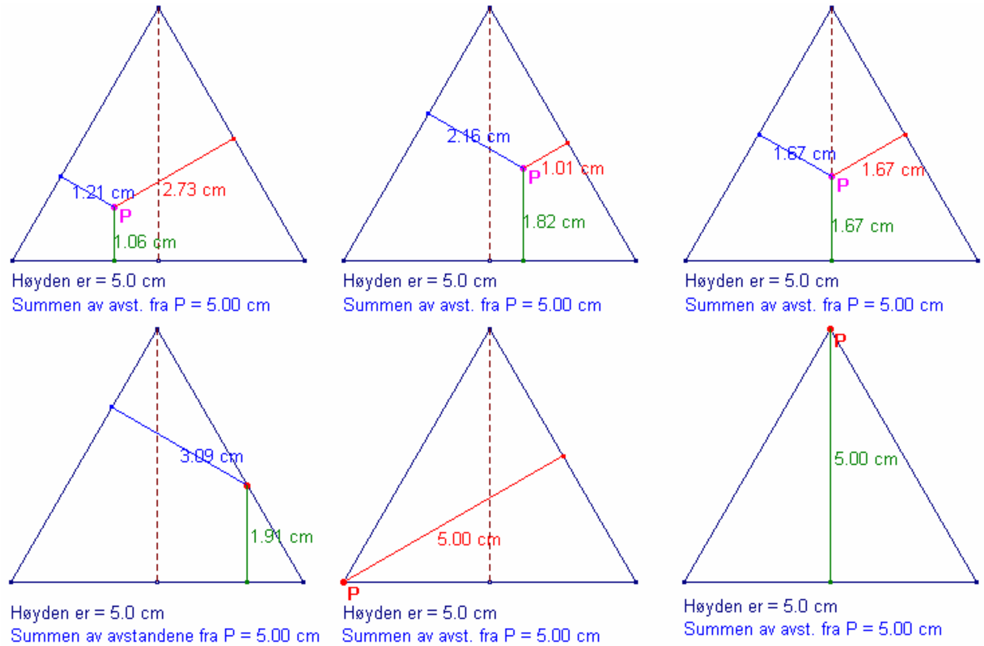
"Hvilke egenskaper ved figuren forblir invariant og hvilke forandres ved kontinuerlige transformasjoner?"

Vi vet at

Grunnleggende geometriske setninger oppstår som påstander om invarians når en studerer slike transformasjoner.

Dynamiske geometriprogrammer så som Cabri muliggjør studiet av slike transformasjoner på en helt annen måte enn med klassisk Euklidske metoder.

Eks.2. I en likesidet trekant vil summen av avstandene fra et punkt (P) inne i (eller på) trekanten være lik trekantens høyde.



Figuren viser 6 ulike konfigurasjoner etter bruk av "dra-modus" og spesialtilfellene (når punktet P ligger på an av sidekantene eller i et av hjørnene) trer tydelig fram. Problemet kan klassifiseres som "open ended problem" bl.a. fordi figuren og konstruksjonene av avstandene kan danne grunnlag for å studere hvor P ligger når de tre avstandene alle er like og hva som skjer når P ligger utenfor trekanten.

4. Stikkordregister

T

U

V

W

Å