Kompendium

Diskret matematikk og lineær algebra

3. utgave

Anton Bjartnes

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Kompendium

Steinkjer 2004

Diskret matematikk og lineær algebra

3. utgave

Anton Bjartnes

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Kompendium
Avdeling for sykepleier,- ingeniør- og lærerutdanning
ISBN 82-7456-370-0
Steinkjer 2004

Forord

Denne boka dekker de mest sentrale emnene innenfor fag G010 Diskret matematikk og lineær algebra i rammeplan for ingeniørutdanning.

Sidetallet er forholdsvis lavt, noe som skyldes at teorien er forsøkt beskrevet med få ord, i håp om at stoffet skal være lettere å tilegne seg for studentene. Boka inneholder derimot mange eksempler fra de ulike fagområdene, så det skal være mulig å ha bra utbytte av å lese boka selv om en ikke følger et konkret undervisningsopplegg. Hvert kapittel avsluttes med et antall oppgaver som skal kunne løses dersom en har fått med seg det viktigste fra kapitlet. Fasit til disse oppgavene er plassert bakerst i boka.

Det som er endret fra 2. utgave er at kapitlene om komplekse tall og differensialliknings-systemer er fjernet, og erstattet av z-transformen og differenslikninger. Boka bærer et visst preg av å være skrevet primært for elektronikkstudenter. Dette kommer spesielt fram gjennom at elektroniske kretser er viet stor oppmerksomhet i kapittel 1. Til tross for dette mener jeg at boka utmerket godt kan benyttes av ingeniørstudenter på andre linjer og studieretninger.

For at framtidige utgivelser skal være tilnærmet feilfrie, ber jeg om at de som finner feil i boka sier fra om dette, for eksempel ved å sende en mail til anton.bjartnes@hint.no Send gjerne synspunkter på innhold og presentasjonsform også, både ris og ros mottas med takk.

Da ønsker jeg lykke til med bruken av boka og håper at dere lærer mye nyttig av å lese den.

Levanger, 16. august 2004

Anton Bjartnes

Innholdsfortegnelse

Diskret matematikk

Lineær algebra

1 Boolsk algebra og elektroniske porter

Tallsystemer

All kommunikasjon i en datamaskin og annet digitalt utstyr foregår på binær form, dvs. ved hjelp av 0-ere og 1-ere. Et binært tall (0 eller 1) kalles et bit og er den minste enheten i et datasystem.

En rekke med binære tall (f.eks. 1011001) representerer et tall i det binære tallsystem (2-tall-systemet) akkurat som 2984 gjør i 10-tallsystemet.

Fordelen med 10-tallsystemet er at vi ikke trenger så mange sifre for å beskrive store tall. Fordelen med 2-tallsystemet er at det fungerer veldig godt i elektroniske kretser.

For å unngå misforståelser når vi regner med tall i forskjellige tallsystemer, må vi alltid være nøye med å angi hvilket tallsystem vi opererer med. Tallet 11 betyr f.eks. elleve i 10-tallsystemet, men bare tre i 2-tallsystemet. Derfor må vi huske på å bruke 10 som indeks når vi bruker 10-tallsystemet og 2 som indeks når vi bruker 2-tallsystemet.

Ut fra dette kan vi derfor skrive: $11_2 = 3_{10}$ (Tallet 11 i 2-tallsystemet tilsvarer tallet 3 i 10-tallsystemet.)

Konvertering fra 2-tallsystemet til 10-tallsystemet

Hvor stort er egentlig tallet 1011001_2?

For å finne svaret på dette, kan vi begynne med å se på et tall i 10-tallsystemet (f.eks. 2984_{10}). Dersom vi begynner bakfra, kan vi si at dette tallet består av 4 enere, 8 tiere, 9 hundre og 2 tusen, eller mer matematisk: $2984_{10} = 4 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$

Vi kan gjøre akkurat det samme med et hvilket som helst binært tall, men da må vi naturligvis huske på å bytte ut tierpotensene med toerpotenser.

Tallet 1011001_2 skulle dermed bli: $1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6$

En kjapp summasjon gir 1+8+16+64=89. Vi kan derfor skrive $1011001_2=89_{10}$

Grunnen til at vi alltid begynner bakerst er at vi da slipper å telle antall sifre for å finne hvilken potens vi skal begynne med.

Eksempel 1.1:

Konvertèr følgende tall fra 2-tallsystemet til 10-tallsystemet:

i) 10010_2

ii) 1110001_2

iii) 110011001_2

Løsning: i) $10010_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 2 + 16 = \mathbf{18_{10}}$

ii) $1110001_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = 1 + 16 + 32 + 64 = \mathbf{113_{10}}$

iii) $110011001_2 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^7 + 2^8 = 1 + 8 + 16 + 128 + 256 = \mathbf{409_{10}}$

Konvertering fra 10-tallsystemet til 2-tallsystemet

Dersom vi nå skal gå den andre veien, nemlig å konvertere et tall fra 10-tallsystemet (f.eks. 52_{10}) til 2-tallsystemet, kan vi bruke følgende framgangsmåte:

Vi starter med tallet 52 og foretar gjentatt heltallsdivisjon med 2 helt til vi er nede på null. Resten fra hver enkelt divisjon utgjør nå det binære tallet lest bakfra.

Stadig forvirret? Her er denne framgangsmåten benyttet og presentert i en tabell:

52	26	13	6	3	1	0
	0	0	1	0	1	1

Tallene i den nederste raden leses nå fra høyre mot venstre, dermed blir $52_{10}=110100_2$

Eksempel 1.2:

Benytt nå metoden beskrevet på foregående side til å konvertere følgende tall fra 10-tallsystemet til 2-tallsystemet:

i) 74_{10}

ii) 321_{10}

iii) 2984_{10}

Løsning: i)

74	37	18	9	4	2	1	0
	0	1	0	1	0	0	1

Derfor kan vi skrive 74_{10}=$\mathbf{1001010_2}$

ii)

321	160	80	40	20	10	5	2	1	0
	1	0	0	0	0	0	1	0	1

Altså er 321_{10}=$\mathbf{101000001_2}$

iii)

2984	1492	746	373	186	93	46	23	11	5	2	1	0
	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1

Vi konkluderer da med at 2984_{10}=$\mathbf{101110101000_2}$

Vi ser av dette at vi kan være glad for at vi slipper å benytte 2-tallsystemet i det daglige liv. Tenk deg mynter og sedler med tallene 10 (2-krone), 100 (4-krone), 1000 (8-krone) og helt opp til 10 000 000 000 (1024-kronen)!
Nei, 10-tallsystemet er nok mer fornuftig praktisk sett.

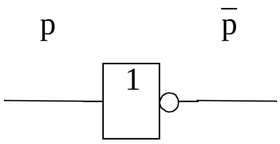
Vi har også andre tallsystemer enn de to vi har fokusert på her. Blant annet er 8-tallsystemet og 16-tallsystemet mye brukt.

Når det gjelder konvertering mellom 10-tallsystemet og andre tallsystemer, kan imidlertid de metodene vi har benyttet for 2-tallsystemet lett overføres til de andre systemene.

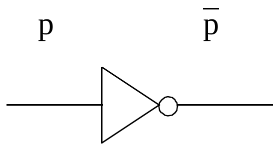
Vi skal nå vende tilbake til datamaskinen og dens behandling av de binære tallene. Et bit (0 eller 1) passerer gjennom et antall elektroniske kretser på sin ferd gjennom maskinen. I disse kretsene blir flere bit satt sammen til ett eller flere nye.

De minste av disse kretsene kalles elektroniske porter, og vi skal først se på hvordan noen av disse fungerer.

Inverter



Européisk standard



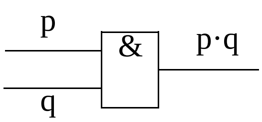
Amerikansk standard

En *inverter* har én inngang og én utgang, dvs. at den må ha ett bit inn for å gi ett bit ut. Denne elektroniske porten endrer (inverterer) alltid det bitet som kommer inn: 0 inn gir 1 ut, mens 1 inn gir 0 ut. p er her det inngående bitet, mens $\overline{p}$ (les: ikke-p) er det utgående.

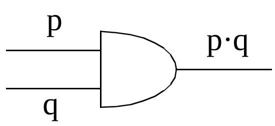
Vi kan ut fra dette lage følgende enkle *sannhetstabell* for inverteren:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

OG-port



Européisk standard

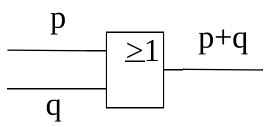


Amerikansk standard

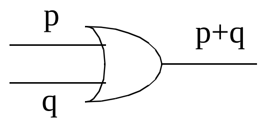
En *OG-port* har to innganger og én utgang, dvs. at den må ha to bits inn for å gi et bit ut. Dersom de to inngangene betegnes p og q, blir utgangen p·q (les: p og q). Dette betyr at vi får en 1-er på utgangen når *både p og q* er en 1-er. Sannhetstabellen for en OG-port blir da seende slik ut:

p	q	p·q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ELLER-port



Européisk standard



Amerikansk standard

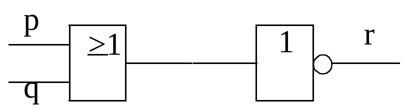
En *ELLER-port* har også to innganger og én utgang, men utgangen framkommer nå som p+q (les: p <u>eller</u> q), som betyr at vi får en 1-er på utgangen når *enten p eller q* er en 1-er. Sannhetstabellen blir derfor slik:

p	q	p+q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vi ser at 1+1=1 i Boolsk algebra. Dette vil vi raskt venne oss til i og med at tallet 2 ikke eksisterer i den binære tallverden.

Eksempel 1.3:

Sett opp sannhetstabellen for følgende krets:



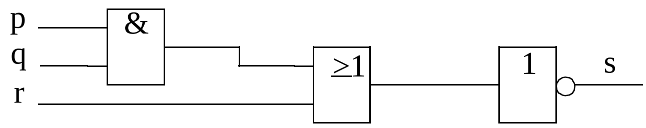
Løsning: For å finne et uttrykk for utgangsvariabelen i en logisk krets, kan det ofte være hensiktsmessig å benytte hjelpevariable. I dette tilfellet kan vi kalle utgangen fra ELLER-porten for s, og ta denne med i sannhetstabellen for kretsen.

Sannhetstabellen blir da slik:

p	q	s=p+q	$r=\bar{s}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Eksempel 1.4:

Sett opp sannhetstabellen for følgende krets:



Løsning: Her har vi tre innganger. Sannhetstabellen må derfor bestå av 2^3=8 linjer for at alle mulige kombinasjoner skal komme med.

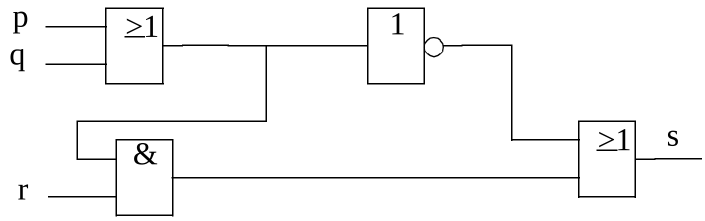
Videre ser vi at det vil være hensiktsmessig å benytte to hjelpevariable: t som utgang på OG-porten og u som utgang på ELLER-porten. Sannhetstabellen blir da slik:

p	q	r	$t=p\cdot q$	$u=t+r$	$s=\overline{u}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

I eksemplet ovenfor kan vi godt tenke oss at inngangen er et binært tall bestående av tre sifre p, q og r, altså et tall fra 0 til 7. Utgangen er bare et bit, altså 0 eller 1. Denne utgangen kan f.eks. være koblet til en lampe som vil tenne dersom utgangen er 1 og forbli mørk dersom utgangen er 0. Kretsen øverst på siden er altså en krets som kan tenne en lampe hvis inngangsvariabelen er enten 0, 2 eller 4.

Eksempel 1.5:

Sett opp sannhetstabellen for følgende krets:



Løsning: I tillegg til de tre inngangsvariablene p, q og r benytter vi tre hjelpevariable: t som er utgangen på den første ELLER-porten, u som er utgangen på OG-porten og v som er utgangen på inverteren. Sannhetstabellen blir slik:

p	q	r	t=p+q	u=t·r	$v = \overline{t}$	s=u+v
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1

Sannhetstabellen er et greit hjelpemiddel når det gjelder å finne utgangen av små logiske kretser. Vi skjønner imidlertid av disse eksemplene at sannhetstabellene fort blir veldig store og uoversiktlige når antall porter blir høyt. I slike kretser er vi nødt til å begrense arbeidsmengden, og dette blir vi i stand til når vi har lært oss noen regneregler innenfor temaet Boolsk algebra.

Boolsk algebra

Vi har først noen relativt innlysende regler:

$p \cdot 0 = 0$ $\quad$ $p \cdot 1 = p$ $\quad$ $p \cdot p = p$ $\quad$ $p \cdot \bar{p} = 0$

$p + 0 = p$ $\quad$ $p + 1 = 1$ $\quad$ $p + p = p$ $\quad$ $p + \bar{p} = 1$

Bearbeid disse reglene i hodet til du finner dem logiske og innlysende. Du vil snart få bruk for dem.

Før vi går videre, kan det være greit å innføre noen forenklete skrivemåter for å unngå unødig mange tegn og parenteser når vi har med lange uttrykk å gjøre.

Vi har tidligere skrevet $p \cdot q$, vi kan heretter skrive pq som vi er vant med fra tradisjonell algebra.

Likeledes kan vi i stedet for $p + (q \cdot r)$ skrive $p + qr$. Parentesen kan sløyfes når den bare inneholder multiplikasjon. Multiplikasjonen skal uansett utføres før addisjonen. Vi har f.eks. lært at 2+3·6=20 (og ikke 30 som vi får dersom addisjonen utføres før multiplikasjonen).

Men uttrykket $(p + q) \cdot r$ kan bare skrives $(p + q)r$ eller evt. $pr + qr$. (Se nedenfor)

Distributive lover

Det forekommer to distributive lover i Boolsk algebra:

1: $a(b + c) = ab + ac$

2: $a + bc = (a + b)(a + c)$

Nr. 1 er velkjent fra tidligere, mens nr. 2 er ny (rett og slett fordi den ikke gjelder i tradisjonell algebra).

Eksempel 1.6:

Vis ved hjelp av sannhetstabell at distributiv lov nr. 2 i Boolsk algebra er gyldig.

Løsning:

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

a	b	c	bc	a+b	a+c	a+bc	(a+b)(a+c)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Vi ser at de to kolonnene ytterst mot høyre ble like for alle kombinasjoner av a, b og c. Det er dermed bevist at den distributive loven $a + bc = (a + b)(a + c)$ er gyldig i Boolsk algebra.

Eksempel 1.7:

Bruk de regnereglene du har lært til å forenkle det logiske uttrykket $pq + p\bar{q}$

Løsning: $pq + p\bar{q} \;=\; p(q + \bar{q}) \;=\; p \cdot 1 \;=\; \boldsymbol{p}$

Etter som p er felles for de to leddene kan den trekkes utenfor en parentes (distributiv lov nr. 1 motsatt vei), og da er veien fram til svaret enkel.

Eksempel 1.8:

Forenkle uttrykket $(pq + pr)r$

Løsning: Starter med å multiplisere ut parentesen og trekker deretter ut den største felles faktor vi kan finne:

$$(pq + pr)r \;=\; pqr + pr \;=\; pr(q + 1) \;=\; pr \cdot 1 \;=\; \boldsymbol{pr}$$

Eksempel 1.9:

Forenkle uttrykket $(p + q)(p + r)\bar{q}$

Løsning: Satser på samme framgangsmåte som i eksempel 1.8 og multipliserer ut hele uttrykket:

$$(p + q)(p + r)\bar{q} \;=\; p\bar{q} + pr\bar{q} + qp\bar{q} + qr\bar{q}$$

De to siste leddene må være null fordi at $q\bar{q} \;=\; 0$

$$p\bar{q} + pr\bar{q} \;=\; p\bar{q}(1 + r) \;=\; p\bar{q} \cdot 1 \;=\; \boldsymbol{p\bar{q}}$$

de Morgans lover

Vi trenger nå bare å lære oss to enkle lover til for å beherske Boolsk algebra bra. Disse lovene kalles de Morgans lover etter den engelske matematikeren Augustus de Morgan (1806-1871).

de Morgans to lover brukes når vi har et produkt eller en sum som skal inverteres.

1. $\overline{xy} \;=\; \bar{x} + \bar{y}$

2. $\overline{x + y} \;=\; \bar{x}\bar{y}$

Det er vel ingen overdrivelse å påstå at de Morgans lover er svært enkle å huske.

Eksempel 1.10:

Benytt sannhetstabeller til å bevise de Morgans lover.

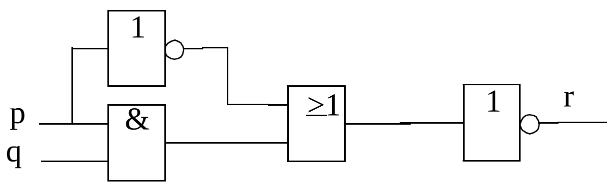
Løsning: Vi bruker en stor sannhetstabell for å bevise begge lovene under ett:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	xy	$\overline{xy}$	$\bar{x}+\bar{y}$	$x+y$	$\overline{x+y}$	$\bar{x}\,\bar{y}$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Etter som kolonne nr. 6 og 7 ble identiske har vi bevist de Morgans 1. lov. Og når de to kolonnene ytterst til høyre ble helt like, er også hans 2. lov bevist.

Eksempel 1.11:

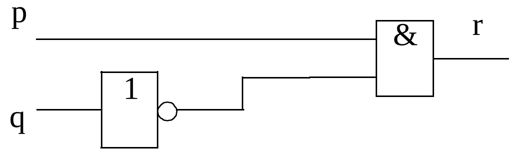
Forenkle følgende elektroniske krets så mye som mulig ved hjelp av Boolsk algebra:



Løsning: Ser at utgangen er $r = \overline{pq + \bar{p}}$

de Morgans lover gir: $r = \overline{pq} \cdot p = (\bar{p} + \bar{q})p = p\bar{p} + p\bar{q} = p\bar{q}$

Dette betyr at kretsen over kan forenkles til denne:



Vi har nå fått fjernet en inverter og en ELLER-port fra den opprinnelige kretsen.

Vi har flere ganger benyttet oss av distributiv lov nr. 1 i Boolsk algebra, blant annet i eksemplet ovenfor: $(\bar{p} + \bar{q}) \cdot p \;=\; p\bar{p} + p\bar{q}$

Distributiv lov nr. 2 er derimot noe tyngre å venne seg til å bruke. Men denne kan også være ekstremt nyttig. Se bare her: $r \;=\; pq + \bar{p}$

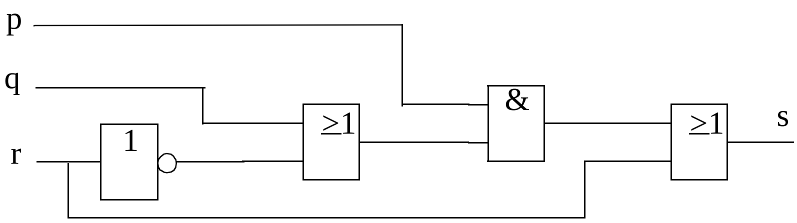
Dette uttrykket lar seg ikke forenkle uten bruk av distributiv lov nr. 2:

$$r \;=\; pq + \bar{p} \;=\; (p + \bar{p})(q + \bar{p}) \;=\; 1 \cdot (\bar{p} + q) \;=\; \bar{p} + q$$

Kanskje ikke så dumt å venne seg til denne loven også?

Eksempel 1.12:

Benytt Boolsk algebra til å forenkle følgende elektroniske krets:

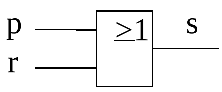


Løsning: Utgangen blir $s \;=\; (q + \bar{r})p + r \;=\; pq + p\bar{r} + r$

Her kan det se ut som at vi ikke kommer lenger, men husk distributiv lov nr. 2! Dersom vi benytter denne på de to siste leddene, kan vi komme et langt steg videre:

$$s \;=\; pq + (p + r)(\bar{r} + r) \;=\; pq + p + r \;=\; p(q + 1) + r \;=\; p + r$$

Her kan altså q-inngangen og hele 3 av 4 elektroniske porter fjernes:



Fantastisk, ikke sant? (Og alt takket være distributiv lov nr. 2!)

Eksempel 1.13:

Forenkle kretsen i eksempel 1.5 mest mulig ved hjelp av Boolsk algebra.

Løsning: Utgangen er gitt ved $s \;=\; \overline{p+q} + (p+q)r$

Her er det veldig fristende å bruke de Morgan på det første leddet og distributiv lov nr. 1 på det andre leddet. (Prøv dette!) Men da blir det veldig vanskelig å komme videre.

Den smarte løsningen ligger i å se på p+q som ett uttrykk for seg og benytte distributiv lov nr. 2:

$$s \;=\; [(\overline{p+q}) + (p+q)] \cdot [(\overline{p+q}) + r]$$

Den første parentesen må være 1 slik at $s \;=\; \boldsymbol{\bar{p}\bar{q} + r}$

Eksemplene vi har sett på så langt har for det meste gått på analyse av logiske kretser.

Vi skal til slutt i dette kapitlet forsøke å lage logiske kretser ut fra gitte spesifikasjoner. Denne typen oppgaver er mer i tråd med hva som forventes av en ingeniør.

Eksempel 1.14:

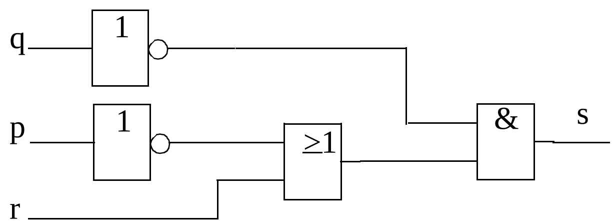
Lag en logisk krets der inngangen består av et tresifret binært tall pqr der utgangen skal være 1 dersom inngangen har verdi 0, 1 eller 5. Utgangen skal være 0 dersom inngangen er 2, 3, 4, 6 eller 7.

Løsning: Her observerer vi at de kombinasjonene på inngangen som gir 1 på utgangen er 000, 001 og 101. Dette må bety at vi kan skrive utgangen slik: $s \;=\; \bar{p}\bar{q}\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r + p\bar{q}r$

Forenkling av uttrykket gir: $s \;=\; \bar{q}(\bar{p}\bar{r} + \bar{p}r + pr) \;=\; \bar{q}[\bar{p}(\bar{r}+r) + pr] \;=\; \bar{q}(\bar{p} + pr)$

Distributiv lov nr. 2: $s \;=\; \bar{q}(\bar{p}+p)(\bar{p}+r) \;=\; \bar{q}(\bar{p}+r)$

Den logiske kretsen som oppfyller de spesifiserte krav ser derfor slik ut:



Eksempel 1.15:

Lag en logisk krets med tre inngangsvariable der utgangen skal være 1 dersom inngangen er 1, 2, 3, 5 eller 7, og 0 dersom inngangen er 0, 4 eller 6.

Løsning: Etter som det er så mye som 5 forskjellige kombinasjoner som gir 1 ut og bare 3 som gir 0 ut, kan det være hensiktsmessig å sette opp et uttrykk for $\bar{s}$ i stedet for s.

De kombinasjonene som gir 0 ut er 000, 100 og 110. Vi får da:

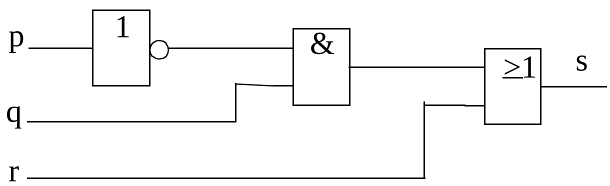
$$\bar{s} = \bar{p}\bar{q}\bar{r} + p\bar{q}\bar{r} + pq\bar{r} = \bar{r}(\bar{p}\bar{q} + p\bar{q} + pq) = \bar{r}[\bar{q}(\bar{p} + p) + pq] = \bar{r}(pq + \bar{q})$$

Distributiv lov nr. 2: $\bar{s} = \bar{r}(p + \bar{q})(q + \bar{q}) = \bar{r}(p + \bar{q})$

Da er det på tide å invertere uttrykket:

$$s = \overline{\bar{r}(p + \bar{q})} = r + \overline{(p + \bar{q})} = r + \bar{p}q$$

Den logiske kretsen skulle dermed bli slik:



Oppgaver

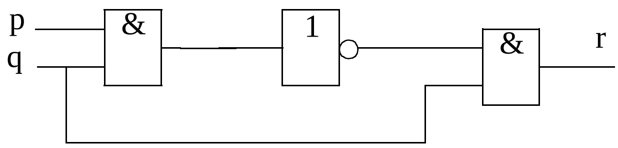
1. Konvertèr følgende binære tall til 10-tallsystemet:

a) 100110_2 b) 1100110_2 c) 10101101_2

2. Konvertèr følgende tall til 2-tallsystemet:

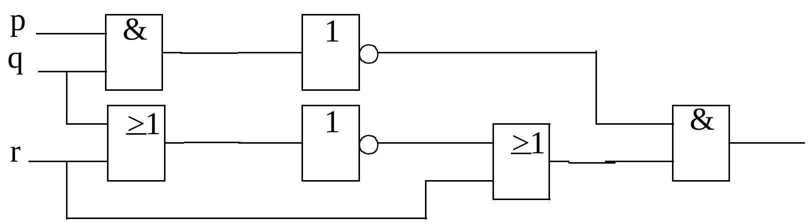
a) 70_{10} b) 222_{10} c) 1011_{10}

3. Sett opp sannhetstabellen for følgende logiske krets:



Forenkle deretter kretsen ved bruk av Boolsk algebra og sjekk at sannhetstabellen stemmer.

4. Sett opp sannhetstabellen for følgende logiske krets:



Forenkle deretter kretsen ved bruk av Boolsk algebra og sjekk at sannhetstabellen stemmer.

5. Forenkle følgende logiske uttrykk mest mulig:

a) $(p+q)(p+r)$ b) $(p+q)p\bar{q}$ c) $\overline{p+q}\cdot\overline{pq}$

d) $pqr + p\bar{q}r + pq\bar{r}$ e) $(\overline{p+q})(\bar{p}r + p\bar{q}r)$ f) $(p+q+r)(p+\bar{q})$

6. Lag en “primtallsindikator” med inngangsvariabelen pqr. Utgangen skal altså være 1 dersom inngangen er 2, 3, 5 eller 7. Det skal være tilstrekkelig med fire elektroniske porter.

2 Mengdelære

Mengder

Begrepet mengde benyttes om en størrelse som kan inneholde ett eller flere elementer. En mengde kan bestå av et endelig antall elementer (som f.eks. mengden uke som består av 7 ukedager) eller et uendelig antall elementer (som f.eks. mengden Z som inneholder alle hele tall).

Mengden A som består av de fire tallene 1, 2, 3 og 4 kan enten skrives på listeform: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ eller ved hjelp av mengdebyggeren: $A = \{x | x \in N, x < 5\}$

Listeformen er veldig enkel, men blir uhåndterlig dersom antall elementer i mengden overskrider 10. Da kan mengdebyggeren være å foretrekke. Mengden $A = \{x | x \in N, x < 5\}$ kan vi lese/forstå på følgende måte: Mengden A består av alle tall x som oppfyller følgende krav: i) $x \in N$ og ii) $x < 5$ Alle tall som oppfyller begge disse kravene er med i mengden A.

Eksempel 2.1:

Skriv mengden $A = \{x | x^2 - x - 6 = 0\}$ på listeform.

Løsning: $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -2$, noe som gir oss $A = \{\mathbf{-2}, \mathbf{3}\}$

Eksempel 2.2:

Skriv mengden $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$ ved hjelp av mengdebyggeren.

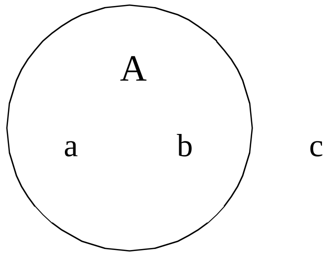
Løsning: Vi ser at B inneholder alle hele tall fra 10 til 20 med unntak av tallet 15.

Vi kan da skrive: $B = \{x | x \in N, x > 9, x < 21, x \neq 15\}$

Venn-diagram

For å holde oversikten når det blir mange mengder (og enda flere elementer) å holde styr på, kan vi tegne et Venn-diagram over hele problemstillingen. Det var den engelske matematikeren John Venn som ga navn til dette diagrammet i 1880, men både Leibniz og Euler hadde benyttet tilsvarende diagrammer langt tidligere.

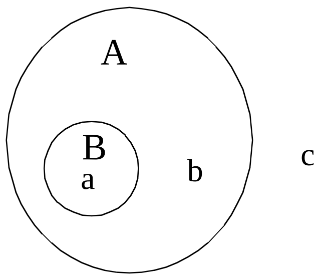
Mengdene i et Venn-diagram framstilles vanligvis som sirkler og skrives med store bokstaver. For å unngå misforståelser bør vi derfor skrive elementene med små bokstaver.



Ut fra denne figuren ser vi at a og b er elementer i mengden A, mens c ikke er det.

Vi skriver dette slik: $a \in A, b \in A$ og $c \notin A$

En mengde kan, i tillegg til å inneholde elementer, også inneholde andre mengder. Vi skjønner f.eks. at mengden N (alle naturlige tall) blant annet inneholder mengden B fra eksempel 2.2. På figuren nedenfor har vi et eksempel på en mengde som inneholder en annen mengde:



Her har vi fremdeles $a \in A, b \in A$ og $c \notin A$, men nå har vi i tillegg $a \in B, b \notin B$ og $c \notin B$.

Videre ser vi at mengde B er en del av mengde A. Dette skriver vi $B \subset A$ og leser: B er en *ekte delmengde* av A. Med skrivemåten $B \subseteq A$ menes nesten det samme. Dette leses: B er en *delmengde* av A, og den eneste forskjellen er at de to mengdene A og B nå <u>kan</u> være like.

Grunnmengden U er en mengde som inneholder alle mulige mengder. U trenger ikke omfatte hele universet av den grunn, den må heller tilpasses det problemet det arbeides med. Dersom vi tar for oss strykprosenter blant førsteårsstudentene bør U bestå av samtlige førsteårsstudenter. Dersom vi skal lage statistikk over utdelte røde og gule kort i Tippeligaen, bør U bestå av samtlige spillere i Tippeligaen osv.

Den tomme mengden Ø inneholder derimot ingen elementer. Dersom ingen studenter stryker til eksamen til jul, kan vi angi mengden av studenter som strøk som Ø, men dette er selvsagt mer ønsketenkning enn realitet?

Eksempel 2.3:

Vurdér hvilke av følgende påstander som er riktige:

a) $a \in U$ b) $b \in \varnothing$ c) $\varnothing \in U$ d) $A \subseteq U$ e) $U \subset B$

Løsning: a) Riktig. Grunnmengden inneholder alle mulige elementer.

b) Galt. Den tomme mengden inneholder ingen elementer.

c) Galt skrevet. I og med at Ø er en mengde blir riktig skrivemåte $\varnothing \subset U$

d) Riktig. Grunnmengden inneholder alle mulige mengder.

e) Galt. ($U \subseteq B$ kan derimot godtas dersom $B = U$)

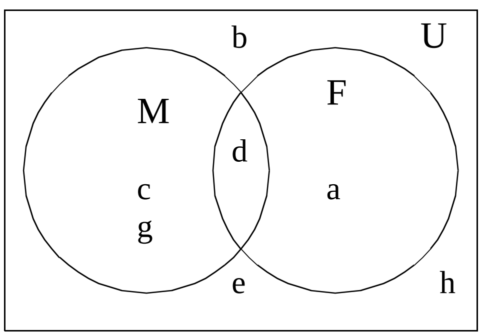
Eksempel 2.4:

Karakterutskriften for noen høyskolestudenter viser følgende karakterer i fagene matematikk og fysikk:

Navn	Matematikk	Fysikk
Albert	E	F
Bernhard	A	C
Civert	F	D
Dankert	F	F
Eilert	B	B
Gerhard	F	E
Hagbart	C	E

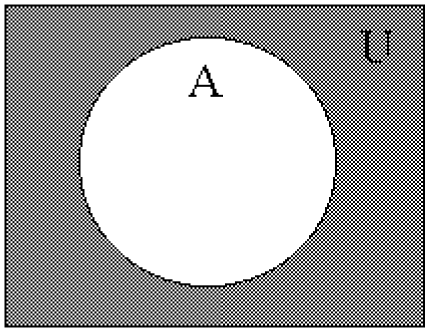
Bare F er strykkarakter. Lag et Venn-diagram med mengdene M (de som strøk i matematikk) og F (de som strøk i fysikk), og plassér de 7 studentene i diagrammet.

Løsning: Vi ser av tabellen at noen studenter strøk bare i matematikk, noen strøk bare i fysikk, mens noen strøk i begge fagene. Mengdene M og F må derfor overlappe hverandre, og Venn-diagrammet blir dermed seende slik ut:



Komplement

De elementene i grunnmengden som <u>ikke</u> er med i mengden A utgjør en egen mengde, $\bar{A}$. Dette leses: komplementet til A eller ikke-A. Den siste formen er best fordi den er kortest og fri for fremmedord. Mengden $\bar{A}$ utgjør altså den skraverte delen i figuren nedenfor:



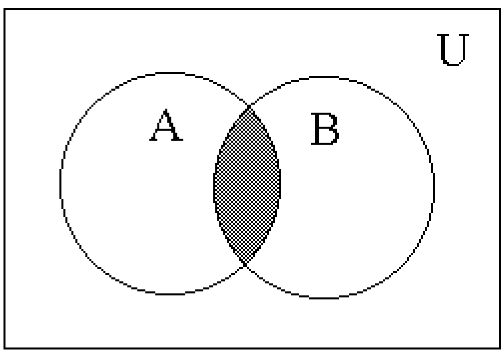
Ut fra mengdene M og F i eksempel 2.4 er det nå enkelt å definere de nye mengdene $\bar{M}$ (de som sto i matematikk) og $\bar{F}$ (de som sto i fysikk). Men hva om vi f.eks. er interessert i de som strøk i begge fagene eller de som sto i begge fagene? Kan vi uttrykke også disse mengdene ved hjelp av M og F?

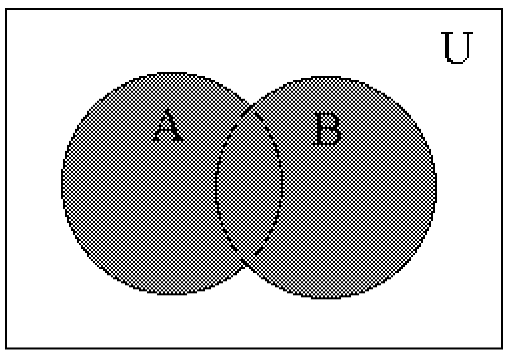
Svaret er ja, men da må vi først innføre to nye begrep.

Snitt og union

Mengden $A \cap B$ leses "A snitt B" og omfatter de elementene som finnes <u>både</u> i A og i B.

Mengden $A \cup B$ leses "A union B" og omfatter de elementene som finnes <u>enten</u> i A eller i B. (eller i begge)





$A \cap B$ $\qquad\qquad$ $A \cup B$

Eksempel 2.5:

Benytt mengdene M og F fra eksempel 2.4 til å lage uttrykk for mengdene

a) P=de som strøk i begge fagene

b) Q=de som sto i begge fagene

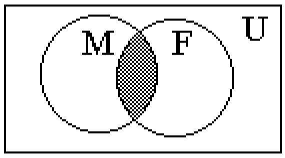
c) R=de som strøk i matematikk, men sto i fysikk

d) S=de som strøk i fysikk, men sto i matematikk

e) T=de som strøk i ett fag, men sto i det andre

Løsning: a) De som strøk i begge fagene må være med både i mengde M og mengde F.

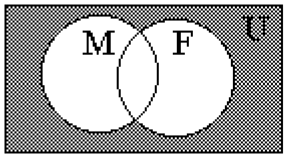
Derfor blir $P = \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{F}$



b) De som sto i begge fagene kan verken være med i mengde M eller mengde F.

Dette kan uttrykkes som

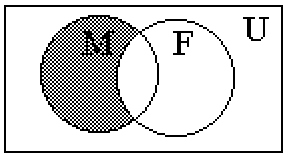
$Q = \overline{\boldsymbol{M}} \cap \overline{\boldsymbol{F}}$ eller $Q = \overline{\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{F}}$



(Vi ser her at de Morgans lover også gjelder for mengder)

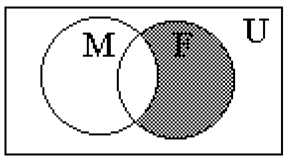
c) De som strøk i matematikk, men sto i fysikk, må være med i M, men kan ikke være med i F.

Dermed blir $R = \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{F}$



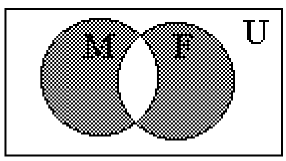
d) De som strøk i fysikk, men sto i matematikk, må altså være med i F, men ikke i M.

$S = \boldsymbol{F} \cap \overline{\boldsymbol{M}}$



e) De som strøk i ett fag, men sto i det andre, må bli unionen av mengdene i c) og d).

$T = R \cup S = (\boldsymbol{M} \cap \overline{\boldsymbol{F}}) \cup (\boldsymbol{F} \cap \overline{\boldsymbol{M}})$



Mengdealgebra

Først kan vi sette opp følgende elementære regler for regning med mengder:

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $\quad$ $A \cap U = A$ $\quad$ $A \cap A = A$ $\quad$ $A \cap \bar{A} = \varnothing$

$A \cup \varnothing = A$ $\quad$ $A \cup U = U$ $\quad$ $A \cup A = A$ $\quad$ $A \cup \bar{A} = U$

Var du med på alle åtte?

For å finne eventuelle likheter mellom mengdealgebra og Boolsk algebra kan vi forsøke å erstatte mengden A med den binære variabelen p, snittoperatoren med multiplikasjonstegn, unionoperatoren med addisjonstegn, den tomme mengden Ø med tallet 0 og grunnmengden U med tallet 1.

Resultatet blir da slik:

$p \cdot 0 = 0$ $\quad$ $p \cdot 1 = p$ $\quad$ $p \cdot p = p$ $\quad$ $p \cdot \bar{p} = 0$

$p + 0 = p$ $\quad$ $p + 1 = 1$ $\quad$ $p + p = p$ $\quad$ $p + \bar{p} = 1$

Du finner igjen nøyaktig det samme oppsettet dersom du blar tilbake til s.7! Dette tyder på at vi kan bruke de samme regnereglene i mengdealgebra som i Boolsk algebra.

Det er her spesielt viktig å huske at SNITT = OG og at UNION = ELLER. For å huske dette kan vi f.eks. tenke oss at $A \cap B$ inneholder bare de elementene som er med både i A OG B, mens $A \cup B$ inneholder de elementene som er med enten i A ELLER B.

Når det gjelder regneregler i Boolsk algebra, så hadde vi i tillegg til reglene ovenfor også to distributive lover og de Morgans to lover. Disse var slik:

$a(b + c) = ab + ac$ $\quad$ $a + bc = (a + b)(a + c)$

$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$ $\quad$ $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$

"Oversatt" til mengdealgebra skulle dette bli:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

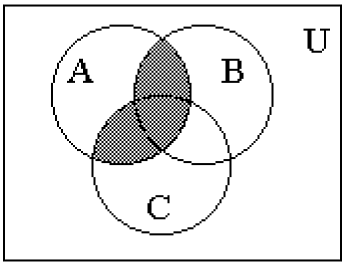
$\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$ $\quad$ $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}$

Eksempel 2.6:

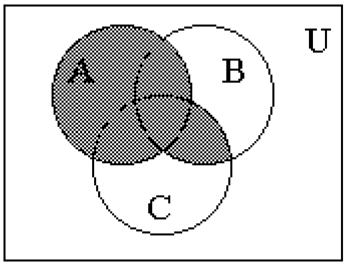
Tegn Venn-diagram som beviser de distributive lovene og de Morgans lover.

Løsning: Vi kan tegne et Venn-diagram for hver av de fire lovene og kontrollere at diagrammet beskriver begge sider av likhetstegnet.

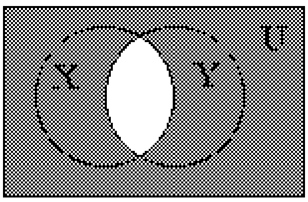
Distributiv lov 1: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



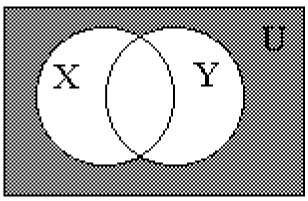
Distributiv lov 2: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



de Morgans lov 1: $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$



de Morgans lov 2: $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$



Eksempel 2.7:

Forenkle følgende uttrykk så mye som mulig ved hjelp av Boolsk algebra:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B)$ b) $\overline{(A \cap B)} \cup (\bar{A} \cup B)$

c) $(\overline{A \cap \bar{B}}) \cup (A \cap B)$ d) $(A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup B) \cap C$

Løsning: a) Skriver om til Boolsk uttrykk: $(A + \bar{B})(A + B) \;=\; A + \bar{B}B \;=\; A + 0 \;=\; \boldsymbol{A}$

Legg merke til bruk av distributiv lov 2.

b) $(\overline{AB}) + (\bar{A} + B) \;=\; (\bar{A} + \bar{B}) + (\bar{A} + B) \;=\; \bar{A} + \bar{B} + B \;=\; \mathbf{1}$

Etter som vi er ute etter en mengde, må svaret være U.

c) $\overline{A\bar{B}} + AB \;=\; (\bar{A} + B) + AB \;=\; \bar{A} + (A + 1)B \;=\; \bar{A} + B$

Svaret blir da: $\boldsymbol{\bar{A}} \cup \boldsymbol{B}$

d) $(A + B + C)(\bar{A} + B)C \;=\; [B + (A + C)\bar{A}]C \;=\; [B + A\bar{A} + C\bar{A}]C$

$(B + \bar{A}C)C \;=\; BC + \bar{A}C \;=\; (\bar{A} + B)C$

Svaret blir altså: $(\boldsymbol{\bar{A}} \cup \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C}$

Nå har vi forhåpentligvis blitt litt mer fortrolig med mengdebegrepet og hvordan vi kan behandle mengder ved hjelp av Boolsk algebra og Venn-diagram. På de neste sidene skal vi bruke Venn-diagram til å løse praktiske problemstillinger fra hverdagen.

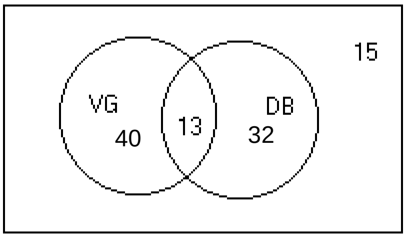
Eksempel 2.8:

En undersøkelse angående avislesing blant 100 ungdommer ga følgende resultat:

85 leste minst en løssalgsavis (VG eller Dagbladet) daglig. 53 av disse leste VG. 13 leste begge avisene daglig. Hvor mange av ungdommene leste Dagbladet hver dag?

Løsning: Oppgaven løses enklest ved å tegne et Venn-diagram med to mengder, VG og DB, som overlapper hverandre. Deretter må riktig tall fylles inn i riktig rom, og det er ikke sikkert at vi kan begynne med den første opplysningen fra teksten.

I denne oppgaven kan vi f.eks. ikke begynne med å plassere tallet 85, fordi at dette tallet er summen av tre tall som skal stå i hvert sitt rom. Vi kan derimot starte med å plassere tallet 15 (100-85) utenfor begge mengdene. Videre er tallet 53 summen av tallene i to rom, og må derfor vente. Tallet 13 kan heldigvis plasseres direkte i sitt rom, nemlig rommet for de som leste begge avisene daglig.



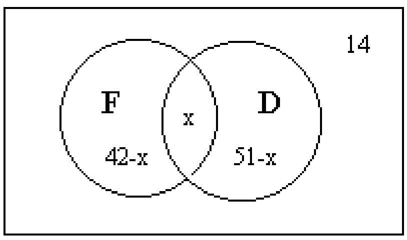
Når tallet 13 er på plass, kan vi sette 40 (53-13) inn i rommet for de som bare leste VG, og deretter kan vi plassere 32 (85-40-13) i rommet for de som bare leste Dagbladet.

Da har vi plassert tall i alle rommene, og vi kan dermed finne svaret på oppgaven: 32+13 =**45**

Eksempel 2.9:

En restaurant hadde i løpet av en dag 74 middagsgjester hvorav 42 spiste forrett og 51spiste dessert. 14 spiste hverken forrett eller dessert. Hvor mange av middagsgjestene spiste både forrett og dessert?

Løsning: Tallet 14 kan plasseres utenfor begge mengdene F og D. Ingen av de resterende tallene kan plasseres direkte i Venn-diagrammet. En måte å løse problemet på er å innføre en ukjent x. Denne kan i prinsippet representere hva som helst, men etter som det er spurt etter hvor mange som spiste både forrett og dessert, kan vi la x representere disse. :



Tallene i de ledige rommene blir dermed også funksjoner av x, og vi må derfor løse en likning for å komme fram til svaret:

$$(42 - x) + x + (51 - x) + 14 = 74 \Rightarrow 107 - x = 74 \Rightarrow x = \mathbf{33}$$

Det var 33 av middagsgjestene som spiste både forrett og dessert.

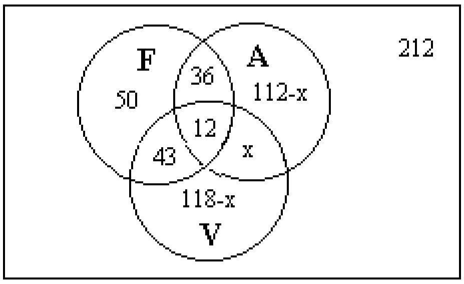
Eksempel 2.10:

En undersøkelse i regi av Norges Idrettsforbund viste at 288 av 500 spurte 14-åringer drev med aktiv idrett.

Disse ble delt inn i tre kategorier: Fotball: 141, Annen sommeridrett: 160 og Vinteridrett: 173.

Det var 55 som kombinerte fotball og vinteridrett, mens 48 drev med annen sommeridrett i tillegg til fotball. 12 av de spurte var aktive innen alle tre kategorier. Hvor mange kombinerte vinteridrett med sommeridrett?

Løsning: Vi må tegne et Venn-diagram med tre mengder F, A og V. Tallet 12 plasseres i midten, og deretter kan 43 (55-12) og 36 (48-12) plasseres i de riktige rom. De som kun drev med fotball skulle da bli 141-43-12-36=50, som plasseres i F-rommet. Nå ser det ut til at vi må ty til den ukjente x. Denne kan f.eks. være det antallet som kombinerte vinteridrett med sommeridrett (ikke fotball). I A-rommet må vi nå skrive 160-36-12-x=112-x, mens vi i V-rommet kan sette 173-43-12-x=118-x. For ordens skyld kan vi også plassere de ikke-aktive (212)



Da kan vi sette opp likningen:

$$50 + 36 + (112 - x) + 43 + 12 + x + (118 - x) = 288 \Rightarrow 371 - x = 288 \Rightarrow x = 83$$

Det skulle dermed være 43+12+83=**138** som kombinerte vinteridrett med sommeridrett.

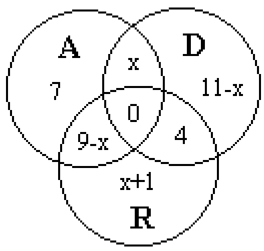
Eksempel 2.11:

I en elektronikklasse ved en ingeniørhøgskole kunne studentene velge ett eller to valgfag innenfor elektrotekniske fag, mens de øvrige valgfagene måtte tas fra andre fagområder.

Det var i alt 13 studenter som valgte to elektrotekniske valgfag.

Fordelingen blant de elektrotekniske valgfagene var slik: 16 valgte analog signalbehandling, 15 valgte digital signalbehandling mens 14 valgte reguleringsteknikk. 7 av de som valgte analog signalbehandling tok ingen av de to andre fagene. Hvor mange studenter var det i klassen?

Løsning: Vi begynner med å tegne et Venn-diagram med de tre mengdene A, D og R. Etter som det ikke var mulig å velge alle tre fagene, kan vi sette 0 i midten. Videre kan vi plassere 7-tallet i riktig rom. Nå blir det vanskelig å komme lengre uten bruk av ukjente. Det er bare å velge fritt hvor vi skal plassere x. Vi kan f.eks. si at x er det antallet som valgte både analog og digital signalbehandling. I så fall blir Venn-diagrammet slik:



Svaret blir dermed $7 + x + (11 - x) + (9 - x) + 4 + (x + 1) \ = \ \mathbf{32}$

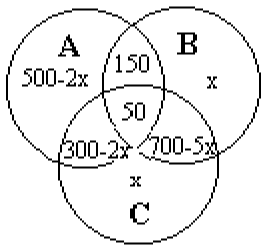
Vi greide altså å løse oppgaven selv om vi ikke hadde nok opplysninger til å finne x.

Eksempel 2.12:

Et lite tettsted har tre frisørsalonger A, B og C. 500 av innbyggerne går alltid til samme salong, mens 50 benytter seg av alle tre salongene. Totalt har salong A 100 flere kunder enn salong B, og det er 200 stykker som går både til salong A og salong B. Det er like mange kunder som benytter <u>bare</u> salong B som <u>bare</u> salong C. Halvparten av kundene på salong A bruker ingen av de to andre salongene. Totalt har salong C 450 kunder. Hvor mange innbyggere benytter seg av frisørsalongene på tettstedet?

Løsning: Dette er et nokså innfløkt problem der vi starter med å tegne opp tre mengder A, B og C. Tallet 50 kan plasseres i midten og deretter kan vi sette tallet 150 (200-50) i det rommet som omfatter kunder som går både til A og B (men ikke C). Nå er det på tide med en ukjent, og det virker naturlig å sette x lik det antallet som benytter bare salong B (og bare salong C). Etter som det er 500 som alltid går til samme salong, kan vi nå sette det antallet som går bare til salong A lik 500-2x. Dette er halvparten av alle kundene på salong A, slik at salong A totalt må ha 1000-4x kunder. Dette kan vi nå bruke til å finne et uttrykk å sette i det siste ledige rommet for kunder som går til salong A. Dette uttrykket må bli (1000-4x)-(500-2x)-50-150=300-2x.

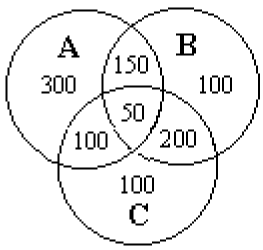
Salong B må på sin side ha totalt 900-4x kunder (100 mindre enn A). Da kan vi finne et uttrykk i det siste ledige rommet i diagrammet: (900-4x)-50-150-x=700-5x.



Til slutt setter vi opp en likning for antall kunder på salong C:

$$x + (300 - 2x) + 50 + (700 - 5x) = 450 \Rightarrow 1050 - 6x = 450 \Rightarrow x = 100$$

Da kan vi sette inn de riktige tallene i diagrammet for å få bedre oversikt:



Vi ser nå at antall innbyggere som benytter seg av frisørsalongene på stedet er:

300+150+100+100+50+200+100=**1000**

Når en er kommet fram til svaret er det veldig fint om en går gjennom oppgaveteksten på nytt og kontrollerer at hver enkelt setning stemmer med Venn-diagrammet.

Oppgaver

7. a) Skriv følgende mengder på listeform:

   $A = \{x | x < 4, x \in N\}$ $B = \{x | x^2 = 9, x \in R\}$ $C = \{x | |x-1| < 3, x \in Z\}$

   b) Bruk mengdene fra a) til å sette opp følgende nye mengder:

   $A \cup B$, $B \cap C$, $\bar{A} \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cap (B \cup C)$ og $B \cap (A \cup C)$

8. Undersøk ved hjelp av Venn-diagram om følgende setninger er riktige:

   a) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cap B}$

   b) $A \subseteq \overline{A \cap B}$

   c) $(\bar{A} \cap B \cap C) \subseteq [B \cap (C \cup \bar{A})]$

9. Forenkle følgende uttrykk så mye som mulig:

   a) $A \cap (\bar{A} \cup B)$

   b) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cap B)$

   c) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$

   d) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cup B)$

   e) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B})$

   f) $(A \cup B \cup C) \cap [A \cup (B \cap C)]$

10. I en klasse med 25 studenter var strykprosenten i fysikk 48 og i matematikk 32. 10 studenter sto i begge fagene. Hvor mange strøk i begge fagene?

11. En undersøkelse blant 300 studenter ved en høgskole viste at 180 av dem kan programmere i Pascal, 120 i C++, 70 i Visual Basic, 35 både i Pascal og Visual Basic, 29 både i C++ og Visual Basic, 7 kan programmere i alle tre språkene, mens 6 av studentene ikke kan programmere i noen av dem.

    a) Hvor mange studenter kan programmere både i Pascal og C++?
    b) Hvor mange studenter kan programmere i bare ett av språkene?
    c) Hvor mange studenter kan verken programmere i Pascal eller Visual Basic?

12. Under NM på ski var det et år tre individuelle øvelser for menn: 3-mil, jaktstart og 5-mil. 60 deltagere startet både på 3-mila og 5-mila og alle disse, med unntak av 2, gikk også jaktstarten. Totalt var det 80 løpere som gikk bare en distanse, og halvparten av disse gikk jaktstarten. Det var 153 startende på jaktstarten, og 88 av disse startet også på 3-mila. Det var 13 flere startende på 3-mila enn på 5-mila.

    Hvor mange startet på 5-mila?

3 Kombinatorikk

Vi skal nå begynne å kikke på fagområdet kombinatorikk som det vil bli mye bruk for i forbindelse med sannsynlighetsregning og statistikk.

Ordnet utvalg med tilbakelegging

Dersom vi skal tippe utfallet av et bestemt antall uavhengige trekninger, kamper eller løp, må vi sette opp et *ordnet utvalg* av tipsene våre. Det er dette vi gjør når vi for eksempel fyller ut en tippekupong (12 kamper med H, U eller B), eller tipper på V6 (6 travløp med et visst antall hester i hvert løp).

Ordnet utvalg vil si at plasseringen av tipsene er svært viktig. Har du tippet B i kamp 1 og H i kamp 2, får du feil på begge dersom det blir H i kamp 1 og B i kamp 2.

Tilbakelegging betyr at det kan bli seier til hest nr. 7 i 2. løp selv om det ble seier til hest nr. 7 i 1. løp. Tenk deg at 7-tallet legges tilbake igjen før neste løp trekkes.

Det som ofte kan være interessant i forbindelse med ordnete utvalg, er å finne ut hvor mange mulige forskjellige ordnete utvalg som finnes i hvert enkelt tilfelle.

Vi kan kikke litt på tippekupongen først: Der har vi 3 muligheter i den første kampen, 3 i den neste osv. Antall mulige ordnete utvalg av de to første kampene blir dermed $3 \cdot 3 = 9$ (HH, HU, HB, UH, UU, UB, BH, BU og BB). På hele kupongen blir det da så mye som $3^{12} = 531441$ muligheter. Ikke rart det går lang tid mellom hver gang en får premie!

Eksempel 3.1:

I V6-spillet skal det tippes vinner i 6 ulike travløp. Hvor mange forskjellige utfall kan vi få dersom det stiller 15 hester til start i hvert løp?

Løsning: 15 hester kan vinne løp 1, 15 hester kan vinne løp 2 osv. Det totale antall utfall skulle da bli

$$15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^6 = \mathbf{11390625}$$

Vi skjønner at det er en fordel å ha litt greie på hester før en gir seg i kast med dette!

Eksempel 3.2:

Du skal velge deg et passord bestående av 5 tegn. Et tegn kan enten være en bokstav (29 muligheter) eller et tall (10 muligheter). Hvor mange passord kan du velge mellom?

Løsning: Du har 39 muligheter for hvert tegn slik at antall mulige passord blir

$$39 \cdot 39 \cdot 39 \cdot 39 \cdot 39 = 39^5 = \mathbf{90224199}$$

Ut fra de foregående eksemplene kan vi konkludere med at antall ordnete utvalg med tilbakelegging blir n^r, der n er antall mulige utfall i hver trekning og r er antall trekninger.

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

Dersom vi skal velge ut et visst antall elementer av en gitt mengde og sette disse i en bestemt rekkefølge må vi sette opp et ordnet utvalg av mengden (uten tilbakelegging). Det er dette vi gjør når vi for eksempel spiller på tvillingoddsen (tipper hest nr. 1 og 2 i et veddeløp). Legg merke til at det her ikke er snakk om tilbakelegging, for dersom hest nr. 8 går seirende ut av løpet, kan ikke den samme hesten ta andreplassen!

Dersom bare fire hester (med nummer fra 1 til 4) stiller til start i et tvillingoddsløp kan vi forholdsvis raskt sette opp alle mulige utfall: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 og 43. Vi får altså 12 ordnete utvalg under de gitte forutsetningene. Hvis det derimot stiller 15 hester til start, vil det ta mye tid og plass å sette opp alle mulige ordnete utvalg bestående av to hester. Men vi kan kanskje greie å bestemme <u>antall</u> ordnete utvalg på en kjapp måte?

Vi kan tenke slik: Det er 15 hester som kan vinne løpet. Dersom hest nr. 9 vinner er det 14 hester som kan ta 2.plassen. Dette gjelder selvfølgelig samme hvilken hest som vinner. Vi kan da konkludere med at det er $15 \cdot 14 = 210$ mulige ordnete utvalg i dette tilfellet.

Eksempel 3.3:

I OL i svømming har 8 utøvere kommet til finalen. Hvor mange forskjellige utfall kan vi da få på seierspallen etterpå?

Løsning: Det er 8 som kan ta gull. Når vinneren er klar, er det 7 som kan ta sølv, og når sølvvinneren er i mål er det 6 som kjemper om bronsen. Totalt blir dette $8 \cdot 7 \cdot 6 = \mathbf{336}$ ulike ordnete utvalg.

Eksempel 3.4:

Den norske Tippeligaen består av 14 lag. Du skal tippe hvilke lag som kommer på 1., 2. og 3.plass ved sesongslutt.

a) Hvor mange muligheter har du å velge mellom?

b) Du er bombesikker på at Rosenborg kommer til å vinne og at verken Sogndal eller Fredrikstad kommer blant de tre beste. Hvor mange muligheter har du nå å velge mellom?

Løsning: a) 14 lag kan vinne. Når vinneren er klar kan 13 lag bli nr. 2 og deretter kan 12 lag bli nr. 3.

Du har derfor $14 \cdot 13 \cdot 12 = \mathbf{2184}$ muligheter.

b) Vinneren er klar. I dine øyne kan 11 lag bli nr. 2 og deretter er det 10 lag som kjemper om tredjeplassen. Du har derfor bare $11 \cdot 10 = \mathbf{110}$ muligheter å velge mellom.

Vi kan lage oss en formel som kan benyttes ved beregning av antall ordnete utvalg uten tilbakelegging også. Dersom vi skal velge ut r elementer i rekkefølge fra en mengde på n, kan dette gjøres på $\frac{n!}{(n-r)!}$ forskjellige måter. Operatoren ! leses fakultet og er definert for alle naturlige tall. Vi har at $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$, altså produktet av alle tall fra 1 opp til n.

Derfor blir $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ mens $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$. Dessuten har vi at $0! = 1$.

Vi kan teste formelen vår på tvillingoddsen med 15 hester. Formelen gir:

$$\frac{15!}{13!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} = 14 \cdot 15 = 210$$

Når det gjelder svømmefinalen får vi $\frac{8!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$

Vi ser at brøker med fakultetstørrelser er svært greie å forkorte. Det anbefales imidlertid sterkt å forstå hvorfor antall ordnete utvalg blir for eksempel $8 \cdot 7 \cdot 6$ i stedet for å pugge formelen.

Eksempel 3.5:

Kulturuke, et dikt av Jan Erik Wold:

ulturkuke tulkuruke ultkuruke ukturulke tlukuruke ukturkule urtukulke turlukuke kulrukute

ultrukuke kuleturuk ruletukuk tulekukur luretukuk kukuterul ruktukule lurekuktu luekuktur

kutlukure rukletuku tuklekuru urukekult kuruketul

I hvor mange forskjellige rekkefølger kan bokstavene i ordet kulturuke skrives?

Løsning: 9 ulike bokstaver kan skrives i $9! = 362880$ forskjellige rekkefølger. I ordet kulturuke har vi derimot 2 k-er og 3 u-er. Dette medfører at flere av de 362880 “ordene” blir helt like.

De tre u-ene kan forekomme i $3! = 6$ forskjellige rekkefølger, mens de 2 k-ene kan skrives i $2! = 2$ forskjellige rekkefølger. Dette medfører for eksempel at ordet ruletukuk vil bli med 12 ganger dersom vi ramser opp alle de 362880 mulighetene. Dette vil selvfølgelig gjelde alle de andre ordene også slik at antall ulike kombinasjoner blir $\frac{9!}{2! \cdot 3!} = \mathbf{30240}$

Uordnet utvalg

Dersom vi skal sette opp et *uordnet utvalg* av en mengde plukker vi bare ut et antall elementer uten å tenke på hvilken rekkefølge de kommer i. Det er dette vi gjør når vi fyller ut en lotto-kupong eller tar ut VM-laget i skiskyting. Når det gjelder uordnete utvalg er det utelukkende snakk om trekning uten tilbakelegging.

Vi skjønner kanskje at det ikke finnes så mange uordnete som ordnete utvalg under de samme forutsetningene. Vi kan bruke Lotto-spillet som eksempel. Dette spillet går ut på å velge 7 tall av 34, men hvilken rekkefølge vi velger tallene i er helt likegyldig (uordnet utvalg). Dersom Lotto hadde vært basert på et ordnet utvalg, hadde vi i tillegg til å velge riktige tall vært nødt til å gjette i hvilken rekkefølge disse tallene ble trukket! Da hadde oppgaven vært helt umulig.

For å illustrere dette kan vi først beregne hvor mange forskjellige ordnete utvalg Lotto-spillet gir muligheter for, og deretter prøve å resonnere oss fram til hvor mange uordnete utvalg det fins å velge mellom (det er det siste som er relevant for Lotto-spillerne).

Først antall ordnete utvalg: Det er 34 muligheter for det første tallet som detter ut av maskinen, 33 for det andre og så videre ned til 28 for det syvende tallet. Dette gir totalt $34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 34!/27! = 27\ 113\ 264\ 640$ muligheter. For å sette dette enorme tallet i perspektiv, kan vi tenke oss at hver eneste nordmann må levere inn cirka 6000 ulike rekker for å dekke opp alle de mulige utfallene!

Så antall uordnete utvalg: Dette er enklest å finne ved først å beregne hvor mange ulike ordnete utvalg som gir samme uordnete utvalg, f.eks. 2, 8, 11, 19, 24, 27, 31. Disse tallene kan ha blitt trukket ut på $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5\ 040$ forskjellige måter. Vi skjønner av dette at det for hvert eneste uordnete utvalg finnes 5 040 ordnete utvalg slik at antall ulike uordnete utvalg blir 27 113 264 640 / 5 040 = 5 379 616. Dette er selvfølgelig også et veldig stort tall, og det er ikke vanskelig å forstå at førstepremien ligger på det nivået den gjør.

Vi har sett at antall ordnete utvalg på r elementer fra en mengde på n er $\frac{n!}{(n-r)!}$

Antall uordnete utvalg blir dermed $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

Legg merke til at antall uordnete utvalg blir nøyaktig det samme enten vi skal velge 7 tall ($\frac{34!}{27! \cdot 7!}$) eller 27 tall ($\frac{34!}{7! \cdot 27!}$). Dette kommer selvfølgelig av at når du har valgt 7 tall, har du 27 igjen som du har "valgt bort".

Etter som formelen for antall uordnete utvalg $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ går igjen ganske ofte har den fått eget navn og egen skrivemåte, nemlig *binomialkoeffisienten* $\binom{n}{r}$. På mange kalkulatorer finner du tastene nPr og nCr. Her er nPr lik $\frac{n!}{(n-r)!}$ (antall ordnete utvalg) mens nCr er binomialkoeffisienten $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ (antall uordnete utvalg).

Eksempel 3.6:

Du trekker tre kort fra en kortstokk bestående av 52 kort. Hvor mange forskjellige kortkombinasjoner er mulig å få?

Løsning: Det er 52 muligheter for det første kortet, 51 for det andre og 50 for det tredje, altså totalt $52 \cdot 51 \cdot 50 = 132\ 600$ mulige ordnete utvalg. Men siden rekkefølgen er uten betydning kan vi trekke de samme tre kortene på 3! = 6 forskjellige måter slik at antall forskjellige kortkombinasjoner er 132 600 / 6 = **22 100**.

Dette kan også settes opp som en binomialkoeffisient: $\binom{52}{3} = 22100$

Eksempel 3.7:

Du skal velge 8 vekttall med valgfag. Du kan velge blant fem 2-vekttallsfag og tre 1-vekttallsfag. Hvor mange mulige kombinasjoner finnes?

Løsning: Du kan enten velge fire 2-vekttallsfag eller tre 2-vekttallsfag og to 1-vekttallsfag. Med fire 2-vekttallsfag har du $\binom{5}{4} = 5$ muligheter. Med tre 2-vekttallsfag og to 1-vekttallsfag har du

$\binom{5}{3} \cdot \binom{3}{2} = 10 \cdot 3 = 30$ muligheter. Tilsammen blir dette **35** kombinasjoner.

Eksempel 3.8:

a) Nils Johan Semb tok ut 22 spillere til EM-troppen i fotball i 2000. I troppen var det tre keepere, sju forsvarere og tolv midtbane/angreps-spillere. Det var forhåndsbestemt at laget skulle ha en keeper, fire forsvarsspillere, fem på midtbanen og en i angrep. Hvor mange forskjellige lag kunne Semb teoretisk sett ha tatt ut til den første kampen mot Spania?

b) Av de seks framme på banen skulle altså bare èn være ren angriper. I praksis var bare fire av de tolv midtbane/angreps-spillerne aktuelle til denne plassen. Beregn ut fra dette antall mulige lagoppstillinger.

Løsning: a) Antall lag blir: $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{12}{5} \cdot \binom{7}{1} = 3 \cdot 35 \cdot 792 \cdot 7 = \mathbf{582120}$, eller dersom vi tar ut angrepsspilleren før midtbanen:

$\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{11}{5} = 3 \cdot 35 \cdot 12 \cdot 462 = 582120$

b) Når vi tar med i betraktningen at bare en av fire kan være enslig angrepsspiller, må vi være lure og ta ut denne spilleren før vi tar ut de fem på midtbanen. Antall mulige kombinasjoner skulle nå bli: $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{11}{5} = 3 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 462 = \mathbf{194040}$

Det går an å vise at vi får samme antall lag dersom vi tar ut midtbanen før angrepsspilleren også. Dette blir imidlertid mye mer omstendelig, fordi antall mulige angrepsspillere nå blir avhengig av om vi benytter 0, 1, 2 eller 3 mulige angripere på midtbanen. Samtidig er det veldig fin trening, så du kan jo prøve det selv?

Oppgaver

13. I en OL-turnering deltar lag fra tolv forskjellige nasjoner. De seks beste scorer poeng i nasjonskampen fra 6 for seier til 1 for 6.plass. Hvor mange forskjellige utfall kan vi få i nasjonskampen?

14. I hvor mange forskjellige rekkefølger kan bokstavene i følgende ord skrives?

    a) POLKA   b) POLAKK

15. Norske bilnumre består av to bokstaver etterfulgt av fem sifre. Alle bokstaver er mulige med unntak av G,I,M,O,Q,W,Æ,Ø og Å. Når det gjelder sifrene er alle mulige bortsett fra at det første sifferet ikke kan være 0. Hvor mange ulike bilnummer finnes?

16. I kortspillet poker får du utdelt fem kort fra en kortstokk på 52.

    a) Hvor mange forskjellige femkortskombinasjoner er teoretisk mulige?

    b) Hvor mange femkortskombinasjoner gir straight (fem tall etter hverandre)? Anta at den minste straighten er 2-6 og den største er 10-A.

    c) Hvor mange gir flush (fem kort av samme sort)?

17. På en speiderleir skal du ta ut ett lag til en tautrekkingskonkurranse. Laget skal bestå av 6 stykker, og du kan velge blant 7 gutter og 9 jenter.

    a) Hvor mange forskjellige lag kan du sette opp?

    b) Du får opplyst at laget skal være et blandingslag med minst to deltakere fra hvert kjønn. Hvor mange kombinasjoner er nå mulig?

18. Det ligger fem ulike par sokker hulter til bulter på soveromsgolvet. Lyset har gått, så du må famle i blinde etter sokkene, og du får etter hvert tak i fire stykker.

    a) Hvor mange utvalg medfører at du kommer ut med to hele sokkepar?

    b) Hvor mange utvalg gir ikke noe sokkepar i det hele tatt?

    c) Hvor mange prosent sjanse har du for å komme ut med minst ett sokkepar?

4 Sekvenser og rekker

En sekvens (eller tallfølge) er en serie med tall som står plassert etter hverandre. Sekvensen $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ består av fem ledd mens sekvensen $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ består av et uendelig antall ledd. Det er ofte et eller annet system i hver sekvens, vi kan for eksempel enkelt gjette oss til at det neste leddet i den uendelige sekvensen over må være 11.

Det allmenne leddet

For at vi aldri skal være i tvil om hvilket system sekvensen følger, skal vi (dersom mulig) angi sekvensens *allmenne ledd*. Dette er rett og slett en formel for ledd nr. n i sekvensen. Vi skal her venne oss til at det første leddet i sekvensen er ledd nr. 0. (Dette gjelder ikke overalt, men i denne boka skal vi alltid starte med ledd nr. 0.) Det allmenne leddet i sekvensen $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ blir derfor $a_n = 2n + 1$ og hele sekvensen kan dermed skrives $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n + 1, \ldots\}$.

Eksempel 4.1:

Finn de fire første leddene i sekvensene beskrevet av følgende allmenne ledd:

a) $a_i = 4i + 2$ b) $b_i = 3^i$ c) $c_i = 2^i - i$

Løsning: Vi begynner med å sette $i = 0$ inn i det allmenne leddet, deretter $i = 1$ og så videre:

a) $\{2, 6, 10, 14, \ldots\}$ b) $\{1, 3, 9, 27, \ldots\}$ c) $\{1, 1, 2, 5, \ldots\}$

Aritmetiske og geometriske sekvenser

I sekvensen i eksempel 4.1a) ser vi at differansen mellom to påfølgende ledd hele tiden er den samme. Slike sekvenser kalles *aritmetiske sekvenser.* Differansen (i dette tilfelle 4) betegnes med d slik at det allmenne leddet i en aritmetisk sekvens alltid kan skrives $a_n = a_0 + dn$.

I eksempel 4.1b) ser vi at kvotienten mellom to påfølgende ledd hele tiden er den samme. Slike sekvenser kalles *geometriske sekvenser.* Kvotienten (i dette tilfelle 3) betegnes med k slik at det allmenne leddet i en geometrisk sekvens alltid kan skrives $a_n = a_0 \cdot k^n$

Sekvensen i eksempel 4.1c) er sammensatt av en aritmetisk og en geometrisk sekvens med det resultat at vi verken kan finne en fast differanse eller en fast kvotient ved å se på sekvensen.

Eksempel 4.2:

Finn det allmenne leddet i sekvensene som starter på følgende måter:

a) $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$ b) $\{2, -4, 8, -16, 32, \ldots\}$ c) $\{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Løsning: a) Vi ser her at vi har en aritmetisk sekvens der $a_0 = 1$ og $d = 3$. Det allmenne leddet skulle derfor bli $a_m = \mathbf{3}\boldsymbol{m} + \mathbf{1}$

b) Dette er en geometrisk sekvens der $b_0 = 2$ og $k = -2$. Da får vi: $b_m = \mathbf{2} \cdot (\mathbf{-2})^{\boldsymbol{m}}$

c) Dette er en aritmetisk sekvens med $d = 1$. Vi får dermed: $c_m = \boldsymbol{m} - \mathbf{2}$

Vi skjønner nå at det er enkelt å finne hvilket som helst ledd i alle mulige slags sekvenser når vi kjenner det allmenne leddet (eksempel 4.1). Vi har også lyktes bra i å gå den motsatte veien (eksempel 4.2), men i dette tilfellet har vi så langt bare sett på aritmetiske og geometriske sekvenser. Det er for eksempel ikke så lett å finne det allmenne leddet $2^i - i$ ut fra de første leddene $\{1, 1, 2, 5, 12, 27, \ldots\}$ i eksempel 4.1c). Men øvelse gjør mester, så vi prøver noen flere eksempler før vi går videre med nytt stoff:

Eksempel 4.3:

Finn det allmenne leddet i sekvensene som starter på følgende måter:

a) $\{1, 3, 6, 10, 15, \ldots\}$ b) $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ c) $\{0, 2, 8, 26, 80, \ldots\}$

Løsning: a) Dette er ingen aritmetisk sekvens, men *differansen* mellom hvert ledd gir den aritmetiske sekvensen $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Det kan da vises at sekvensen er en andregradssekvens som har det allmenne leddet $a_n = pn^2 + qn + a_0$. Vi kan da sette opp følgende likningssett ut fra ledd nr. 1 og 2 i sekvensen: $\begin{bmatrix} p \cdot 1^2 + q \cdot 1 + a_0 = 3 \\ p \cdot 2^2 + q \cdot 2 + a_0 = 6 \end{bmatrix}$ som gir $\begin{bmatrix} p = 1/2 \\ q = 3/2 \end{bmatrix}$

Det allmenne leddet blir altså $a_n = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}} + \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{n} + \mathbf{1}$

b) Her gjenkjenner vi forhåpentligvis kvadrattallene, men her gjelder det å ikke være for kjapp og sette $b_n = n^2$. Husk at vi begynner med ledd nr. 0, derfor får vi i stedet $b_n = (\boldsymbol{n} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}}$

c) Her er det ikke så enkelt å finne noe annet system enn at leddene øker svært raskt. Vi kan forsøke 2^n som gir $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ som helt opplagt øker for sakte. 3^n gir derimot $\{1, 3, 9, 27, 81, \ldots\}$ som øker akkurat passe, for nå ser vi at $c_n = \mathbf{3}^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}$

Det er naturligvis umulig å gi generelle regler for hvordan en skal finne det allmenne leddet i alle slags finurlige sekvenser. Dersom sekvensen verken er aritmetisk eller geometrisk må en utnytte fantasien og forsøke å finne system i rotet.

Rekker

Dersom vi setter "+" i stedet for "," mellom leddene i en sekvens får vi en rekke. Rekker kan, i likhet med sekvenser, skrives ved hjelp av det allmenne leddet. I tillegg må vi benytte summetegnet Σ (sigma). Rekka 1+3+5+7+9 kan da skrives slik: $\sum_{i=0}^{4} 2i+1$ Denne skrivemåten skal vi forstå på følgende vis: Vi starter med opplysningen under summetegnet og setter dette inn i det allmenne leddet som står bak summetegnet. Vi har da det første leddet i rekka (1). Så øker vi i med 1 (alltid), setter inn i det allmenne leddet og får det andre leddet i rekka (3). Så øker vi i med 1 igjen og slik holder vi på til i har vokst til det tallet som står over summetegnet. Da har vi hele rekka 1+3+5+7+9 og vi kan konkludere med at $\sum_{i=0}^{4} 2i+1 = 25$

Eksempel 4.4:

Beregn summen S av følgende rekker:

a) $\sum_{m=0}^{3} 3m-2$ b) $\sum_{m=0}^{4} m^2$ c) $\sum_{m=2}^{5} 3^m$

Løsning: a) Vi følger oppskriften ovenfor og får S=-2+1+4+7=**10**

b) S=0+1+4+9+16=**30**

c) S=9+27+81+243=**360**

Eksempel 4.5:

Skriv følgende rekker ved hjelp av summetegn og allment ledd:

a) S=5+4+3+2 b) S=1+1/2+1/4+1/8+1/16+...

Løsning: a) Det allmenne leddet er 5-n, som gir $S = \sum_{n=0}^{3} 5-n$

b) Det allmenne leddet er $(1/2)^n$ som gir $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Vi skjønner at det er en relativt enkel jobb å finne summen av rekker med 4-5 ledd. Dersom antall ledd i rekka overskrider 10 øker arbeidsmengden (og sannsynligheten for å gjøre feil) drastisk. Dersom rekka blir uendelig lang (eksempel 4.5b) er det umulig å summere ledd for ledd. Vi skal nå se hvordan vi kan beregne summen av aritmetiske og geometriske rekker av vilkårlig lengde.

Summen av aritmetiske rekker

Eksempel 4.6:

Finn $S_{17} = \sum_{i=0}^{16} 4i + 2$ (Indeksen 17 angir antall ledd i rekka)

Løsning: Her er det selvfølgelig mulig å begynne å summere 2+6+10+14+... til vi har fått med 17 ledd, men dette er arbeidskrevende (og grenser til idioti dersom antall ledd er f.eks. 170). Vi får heller prøve å pønske ut en lurere metode.

Vi har som kjent en aritmetisk rekke, noe som tilsier at leddene øker lineært. Dette gir oss mulighet til å beregne hvor stort gjennomsnittet av alle leddene er. Dette må bli $\frac{a_0 + a_{16}}{2}$ og dersom vi multipliserer dette med antall ledd må vi få summen av rekka. Dette gir

$$S_{17} = 17 \cdot \frac{a_0 + a_{16}}{2} = 17 \cdot \frac{2 + 66}{2} = \mathbf{578}.$$

Eksempel 4.7:

Finn $S = \sum_{m=12}^{21} m - 6$

Løsning: Her blir a_{12}=6 og a_{21}=15. Gjennomsnittet blir 10.5 og $S = 10 \cdot 10,5 = \mathbf{105}$

Eksempel 4.8:

Finn summen av alle tall fra 1 til 100.

Løsning: a_0=1 og a_{99}=100 gir middelverdien 50.5. Dersom vi multipliserer dette med antall ledd (100) får vi summen $S_{100} = \mathbf{5050}$

Eksempel 4.9:

Et firma som skal bore en 40 meter dyp brønn opplyser at kostnadene er 500,- for den første meteren, 575,- for den neste og at kostnadene øker med 75,- for hver meter de borer seg nedover. Hvor store blir de totale kostnadene?

Løsning: Kostnadene utgjør en aritmetisk rekke der a_0=500 og a_{39}=500+39·75=3425. Hver meter koster dermed i gjennomsnitt 1962.50 og hele brønnen vil da koste 1962.50·40=**78500,-**

I alle eksemplene fra 4.6 til 4.9 hadde vi med aritmetiske rekker å gjøre. Framgangsmåten vi har benyttet gjelder *bare* for aritmetiske rekker og kan *ikke* benyttes på andre typer rekker! Vi skal nå lære oss å summere geometriske rekker.

Summen av geometriske rekker

I en geometrisk rekke er kvotienten mellom to påfølgende ledd alltid den samme. Denne egenskapen kan vi utnytte når vi skal finne summen av rekka. Vi kan forsøke å summere de 20 første leddene (a_0 til a_{19}) av rekka i eksempel 4.1b), altså $S_{20} = \sum_{n=0}^{19} 3^n$

Vi benytter følgende framgangsmåte:

i) Skriv opp rekka: $S_{20} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{18} + 3^{19}$

ii) Skriv opp k·rekka: $3 \cdot S_{20} = 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots + 3^{19} + 3^{20}$

iii) Subtrahér den ene rekka fra den andre. Etter som rekke ii) er større enn rekke i) er det i dette tilfelle naturlig å ta rekke ii) - rekke i). På grunn av egenskapene til den geometriske rekka vil nesten alle leddene falle bort under subtraksjonen:

$$3 \cdot S_{20} - S_{20} = 3^{20} - 1$$

iv) Det er nå en enkel sak å finne summen av rekka: $S_{20} = \dfrac{3^{20} - 1}{2} =$ **1 743 392 200**

Eksempel 4.10:

Beregn $\sum_{i=0}^{10} (-2)^i$

Løsning: Vi starter med å sette opp rekka: $S_{11} = 1 - 2 + 4 - 8 + \ldots - 2^9 + 2^{10}$

Deretter setter vi opp -2·rekka: $-2 \cdot S_{11} = -2 + 4 - 8 + 16 - \ldots + 2^{10} - 2^{11}$

Nå subtraherer vi den andre rekka fra den første: $S_{11} + 2 \cdot S_{11} = 1 + 2^{11}$

Dermed blir summen: $S_{11} = \frac{2^{11}+1}{3} = \mathbf{683}$

Eksempel 4.11:

Beregn (om mulig) $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^m$

Løsning: Vi har rekka: $S = \lim_{m \to \infty} 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{5^{m-1}} + \frac{1}{5^m}$

Multipliserer med1/5: $\frac{1}{5}S = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{5^{m+1}}$

Subtraherer: $S - \frac{1}{5}S = \lim_{m \to \infty} 1 - \frac{1}{5^{m+1}} = 1$ som gir S=**5/4**

Vi ser at summen blir endelig selv om rekka inneholder et uendelig antall ledd.

Eksempel 4.12:

Et forsikringsselskap garanterer deg 5% rente p.a. dersom du starter i dag og sparer 3 000,- årlig i 20 år. Hvor mye penger kan du i så fall få utbetalt ved slutten av det 20. året?

Løsning: Du vil få utbetalt: $S = 3000 \cdot 1{,}05^{20} + 3000 \cdot 1{,}05^{19} + \ldots + 3000 \cdot 1{,}05$

$$1{,}05\,S = 3000 \cdot 1{,}05^{21} + 3000 \cdot 1{,}05^{20} + \ldots + 3000 \cdot 1{,}05^{2}$$

$$1{,}05\,S - S = 3000 \cdot (1{,}05^{21} - 1,05) \Rightarrow S = \frac{3000 \cdot (1{,}05^{21} - 1,05)}{0{,}05} = \mathbf{104\ 157{,}76}$$

Oppgaver

19. Finn det allmenne leddet i følgende sekvenser:

a) $\{12, 10, 8, 6, 4, \ldots\}$ b) $\{32, 48, 72, 108, 162, \ldots\}$

c) $\{1, 3, 7, 13, 21, \ldots\}$ d) $\{0, 1, 3, 7, 15, \ldots\}$

20. Bestem

a) $\sum_{i=5}^{10} 3 - 2i$ b) $\sum_{m=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m$ c) $\sum_{n=0}^{9} 2^n - n$

21. Per skal sykle fra Lindesnes til Nordkapp. Han har bestemt seg for å sykle 100 km den første dagen, 99 km den andre for så å redusere med 1 km for hver dag. Ved å følge denne oppskriften skal han komme nøyaktig fram til Nordkapp etter 29 dagsetapper. Hvor langt er det fra Lindesnes til Nordkapp?

22. Oppfinneren av sjakkspillet var en luring på mer enn en måte. Da han ble spurt om hva han skulle ha i belønning for oppfinnelsen, svarte han: Jeg skal ha ett korn for den første ruten på brettet, to korn for den andre, fire for den tredje og hele tiden dobbelt så mye for hver rute fram til den 64. og siste ruten. Hvor mange korn ble dette? Tror du han fikk det han ba om?

23. I en rekke er $a_0 = 1$, $a_1 = x + 1$ og $a_2 = x^2 - 2$

a) Bestem x slik at rekken blir aritmetisk og stigende og finn summen av de 20 første leddene i rekken.

b) Bestem x slik at rekken blir geometrisk og finn summen av de 20 første leddene i rekken.

5 Matematisk induksjon

Prinsippet med matematisk induksjon kan enklest beskrives ved å studere dominobrikker som står plassert på høykant etter hverandre. Dersom vi skal få alle sammen til å velte, må to betingelser være oppfylt:

Startbetingelsen: Brikke nr. 1 velter.

Induksjonstrinnet: Dersom brikke nr. n velter, velter også brikke nr. n+1.

Dette er induksjonsbeviset i all sin enkelhet. Det er ikke så vanskelig å fatte at beviset holder for alle n: Induksjonstrinnet sier at dersom brikke nr. 1 velter, velter også nr. 2 og dersom brikke nr. 2 velter, velter også nr. 3. Dersom vi skal vise at en påstand er gyldig for alle hele tall, må vi altså først vise at påstanden er gyldig for tallet 1 (startbetingelsen), og deretter vise at *dersom* den er gyldig for tallet n, så er den også gyldig for tallet n+1 (induksjonstrinnet).

Etter som vi nå er blitt vant til sekvenser og rekker, kan vi starte med et rekke-eksempel:

Eksempel 5.1:

Vis at $\sum_{i=1}^{N} 2i = N(N+1)$

Løsning: Dette er en aritmetisk rekke, så vi kan bruke det vi lærte i forrige kapittel, men etter som poenget nå er å lære matematisk induksjon, skal vi prøve å bruke det i stedet:

Vi setter N=1 og får: $\sum_{i=1}^{1} 2i = 1(1+1)$. Begge sider gir 2 til svar, så foreløbig er alt OK. Startbetingelsen er oppfylt.

Dersom vi bytter ut N i formelen øverst med N+1 får vi: $\sum_{i=1}^{N+1} 2i = (N+1)(N+1+1)$ (*)

Venstresiden her er det samme som $\sum_{i=1}^{N} 2i + 2(N+1)$ og dersom vi antar at

$\sum_{i=1}^{N} 2i = N(N+1)$ er riktig, får vi $N(N+1) + 2(N+1) = (N+2)(N+1)$

Dette er det samme som (*) og dermed er også induksjonstrinnet oppfylt. Vårt aller første induksjonsbevis er vel i havn!

Vi skal ikke slippe eksempel 5.1 riktig ennå. Selv om regningen kan virke komplisert i starten, er prinsippet veldig enkelt:

Først sjekker vi om den gitte formelen stemmer for N=1. Dette er som regel lett.

Så skal vi sjekke at *dersom* formelen stemmer for N, så stemmer den også for N+1.

Da må vi tenke på hva som skjer når N øker med 1. Det som skjer er at vi får et ledd til i rekka (og det leddet er i dette tilfellet N+1). Da gjenstår bare å kontrollere om summen av de N første leddene (gitt i formelen) pluss dette leddet gir summen av de N+1 første leddene. Egentlig ganske logisk, ikke sant?

Eksempel 5.2:

Vis at $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

Løsning: Denne rekka er verken aritmetisk eller geometrisk, så vi kan ikke benytte noen av de metodene vi lærte i forrige kapittel. Vi får prøve å vise at de to betingelsene i induksjonsbeviset er oppfylt og vi begynner med startbetingelsen:

Vi setter N=1 og får $\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

Begge sider av likhetstegnet gir 1 til svar og dermed er i hvert fall startbetingelsen oppfylt.

Hvordan blir påstanden i oppgaven seende ut for tallet N+1? Vi bytter ut N med N+1 på begge sider av likhetstegnet og får: $\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \frac{(N+1)(N+1+1)[2(N+1)+1]}{6}$ (*)

Venstresiden her kan skrives som $\sum_{k=1}^{N} k^2 + (N+1)^2$ og det første leddet her er jo gitt i oppgaven. Vi får da: $\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}$ (*)

Multipliserer nå med 6/(N+1): $N(2N+1) + 6(N+1) = (N+2)(2N+3)$

Dette gir: $2N^2 + N + 6N + 6 = 2N^2 + 3N + 4N + 6$ som stemmer. Da har vi vist at begge betingelsene er oppfylt og kan konkludere med at $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

Matematisk induksjon er ikke bare velegnet for rekker. De neste eksemplene går på helt andre anvendelser:

Eksempel 5.3:

Vis at $4^m - 1$ er delelig med 3 for alle naturlige tall m.

Løsning: Startbetingelsen gir her at $4^1 - 1$ er delelig med 3, og det ser vi stemmer.

Induksjonstrinnet gir oss at $4^{m+1} - 1$ må være delelig med 3. Her må det litt omskriving til:

$$4^{m+1} - 1 = 4 \cdot 4^m - 1 = 3 \cdot 4^m + (4^m - 1)$$

Det første leddet her er utvilsomt delelig med 3, og etter som vi har lov til å anta at $4^m - 1$ er delelig med 3, er induksjonstrinnet oppfylt, og vi har vist at $4^m - 1$ er delelig med 3 for alle naturlige tall m.

Eksempel 5.4:

Vis at siste siffer i tallet $n^5 - n$ er 0 for alle naturlige tall n.

Hint: $(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

Løsning: Vi begynner med startbetingelsen n=1 som gir $1^5 - 1 = 0$, altså OK.

Dersom vi setter inn n+1 i stedet for n i uttrykket $n^5 - n$ får vi

$$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1$$

$$= n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n$$

Her har vi lov til å anta at $n^5 - n$ har siste siffer lik 0, og både $10n^3$ og $10n^2$ har selvfølgelig siste siffer lik 0. Da gjenstår bare å vise at $5n^4 + 5n = 5n(n^3 + 1)$ har siste siffer lik 0.

Dersom n er et partall har 5n siste siffer lik 0 og dermed har produktet $5n(n^3 + 1)$ også siste siffer lik 0.

Dersom n er et oddetall er $n^3 + 1$ et partall og da har også $5n(n^3 + 1)$ siste siffer lik 0.

Dermed har hele tallet siste siffer lik 0 for alle naturlige tall n og påstanden er bevist.

Eksempel 5.5:

I en fotballturnering skal alle lag spille mot hverandre én gang (enkel serie). Vis at det totale antall kamper blir $\frac{p(p-1)}{2}$ dersom p lag deltar i turneringen.

Løsning: Vi begynner med startbetingelsen som går ut på at bare to lag deltar. Da blir det selvfølgelig spilt bare en kamp. Dette ser vi at stemmer. ($\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$)

Dersom p+1 lag deltar blir antall kamper $\frac{(p+1)p}{2}$. Kan dette stemme?

Før det siste laget kom med var antall kamper $\frac{p(p-1)}{2}$. Men det siste laget må jo få spille mot de p første lagene, og dette medfører p kamper i tillegg.

Vi får da: $\frac{p(p-1)}{2} + p = \frac{p^2 - p}{2} + \frac{2p}{2} = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$ som stemmer.

Oppgaver

24. Vis at $\sum_{i=1}^{N} 6i - 2 = N(3N+1)$

25. Vis at summen av alle oddetall fra 1 til 2N-1 er N^2.

26. Vis at $11^m - 4^m$ er delelig med 7 for alle $m \in N$.

27. Vis at siste siffer i tallet $7^n - 2^n$ er 5 for alle $n \in N$.

28. I en firkant er det 2 og i en femkant 5 diagonaler.

a) Hvor mange diagonaler er det i en sekskant og en sjukant?

b) Finn ut fra de foregående resultatene en formel for antall diagonaler i en p-kant.

c) Benytt induksjon til å vise at formelen du fant i b) stemmer.

6 Z-transformen

Definisjon

I kapittel 8 introduseres en ny likningstype, nemlig differenslikninger. Det fins flere måter å løse denne typen likninger på, men vi skal lære å benytte z-transformen til dette, fordi denne viser seg å bli svært nyttig for elektronikkstudenter i høyere årskurs.

Z-transformen til en vilkårlig sekvens $\{a_n\}$ er definert som

$$Z\{a_n\} = A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

Vi skal i dette faget konsentrere oss om *kausale* sekvenser, dvs. sekvenser der $a_n = 0$ for $n < 0$. Definisjonen blir da i stedet

$$\boxed{Z\{a_n\} = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}} \qquad (6.1)$$

Eksempel 6.1:

Finn z-transformen til de endelige kausale sekvensene $\{a_n\}= \{1,2,3\}$ og $\{b_n\}= \{0,1,2,1,0\}$.

Løsning: Vi tar det for gitt at det første tallet i sekvensen er a_0 hhv. b_0. Bruker definisjonen (ligning 6.1) og får:

$$Z\{a_n\} = A(z) = \frac{1}{z^0} + \frac{2}{z^1} + \frac{3}{z^2} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2}$$

og

$$Z\{b_n\} = B(z) = \frac{0}{z^0} + \frac{1}{z^1} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{0}{z^4} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^3} = \frac{(z+1)^2}{z^3}$$

Eksempel 6.2:

Finn z-transformen til den uendelige kausale sekvensen $\{a_n\}$ gitt ved det allmenne leddet $a_n = 3$

Løsning: Skriver først opp de første leddene i sekvensen: $\{a_n\} = \{3,3,3,3,3...\}$ som gir

$$Z\{a_n\} = A(z) = \frac{3}{z^0} + \frac{3}{z^1} + \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \dots$$

Da ser vi at dette er en geometrisk rekke med $k = \frac{1}{z}$.

Først setter vi opp rekka: $A(z) = 3 + \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \dots$ (i)

Så setter vi opp *kA(z):* $\frac{1}{z}A(z) = \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \frac{3}{z^5} + \dots$ (ii)

(i)-(ii) gir nå:

$\left(1 - \frac{1}{z}\right)A(z) = 3$ forutsatt at det siste leddet i (ii) går mot null.

(Vi regner alltid med at z er så stor at dette oppfylles.)

Vi får da: $A(z) = \dfrac{3}{1 - \frac{1}{z}} = \dfrac{3z}{z-1}$

Eksempel 6.3:

Finn z-transformen til den uendelige kausale sekvensen $\{a_n\}$ gitt ved $a_n = 2^n$

Løsning: Skriver først opp de første leddene i sekvensen: $\{a_n\} = \{1,2,4,8,16,...\}$ som gir:

$$Z\{a_n\} = A(z) = \frac{1}{z^0} + \frac{2}{z^1} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \dots$$

Vi ser at rekken er geometrisk med $k = \frac{2}{z}$ og vi bruker derfor samme framgangsmåte som i eksempel 6.2:

$A(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \dots$ (i)

$\frac{2}{z}A(z) = \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \frac{32}{z^5} + \dots$ (ii)

(i)-(ii) gir nå:

$\left(1 - \frac{2}{z}\right)A(z) = 1$ som gir $A(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \dfrac{z}{z-2}$

Enhetspulsen

Enhetspulsen δ_n er en sekvens som har verdien 1 for n = 0 og verdien 0 for alle andre n, dvs:

$$\boxed{\delta_n = \{1,0,0,0,0\ldots\}} \tag{6.2}$$

Z-transformen til δ_n blir i følge definisjonen (likning 7.1) lik

$$Z\{\delta_n\} = \frac{1}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \frac{0}{z^2} + \frac{0}{z^3} + \frac{0}{z^4} + \ldots = 1$$

Vi kan skrive en tidsforsinket enhetspuls som δ_{n-k} , der heltallet k angir tidsforsinkelsen. Vi har da f.eks. at $\delta_{n-1} = \{0, 1, 0, 0, 0\ldots\}$. Følgelig kunne vi ha skrevet de to endelige sekvensene fra eksempel 6.1 på denne måten:

$$\{1, 2, 3\} = \delta_n + 2\delta_{n-1} + 3\delta_{n-2}$$

og

$$\{0, 1, 2, 1, 0\} = \delta_{n-1} + 2\delta_{n-2} + \delta_{n-3}$$

Z-transformen til δ_{n-k} blir

$$Z\{\delta_{n-k}\} = \frac{0}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \frac{0}{z^2} + \ldots + \frac{0}{z^{k-1}} + \frac{1}{z^k} + \frac{0}{z^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{z^k}$$

Vi ser at det har avgjørende betydning for z-transformen hvilket nummer i rekken tallene har. Dette skal vi straks kikke nærmere på.

Før vi går videre kan vi sette opp en tabell over de z-transformene vi har utledet (og noen til):

	$\{a_n\}$	$Z\{a_n\}$
Enhetspuls	$\delta_n = \{1, 0, 0, 0, 0, \ldots\}$	1
Forsinket enhetspuls	$\delta_{n-k} = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$	$\frac{1}{z^k}$
Konstant sekvens	$\{k\} = \{k, k, k, k, k, \ldots\}$	$\frac{kz}{z-1}$
Aritmetisk sekvens	$\{n\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
Geometrisk sekvens	$\{k^n\} = \{1, k, k^2, k^3, k^4, \ldots\}$	$\frac{z}{z-k}$
	$\{nk^n\} = \{0, k, 2k^2, 3k^3, 4k^4, \ldots\}$	$\frac{kz}{(z-k)^2}$

Eksempel 6.4:

Finn z-transformen til sekvensene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ gitt ved de allmenne leddene $a_n = \delta_n - 3\delta_{n-2}$ og $b_n = 1 - \delta_{n-1}$.

Løsning: Sekvensen $\{a_n\}$ kan skrives på følgende måte: $\{a_n\} = \{1, 0, -3, 0, 0, \ldots\}$ og z-transformen blir da ut fra definisjonen $Z\{a_n\} = A(z) = 1 - \frac{3}{z^2} = \frac{z^2 - 3}{z^2}$

Sekvensen $\{b_n\}$ kan skrives slik: $\{b_n\} = \{1, 0, 1, 1, 1, \ldots\}$

Denne z-transformen er greiest å finne ut fra sekvensens allmenne ledd gitt i oppgaveteksten:

$$Z\{b_n\} = B(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{z^2 - z + 1}{z(z-1)}$$

Når vi kjenner det allmenne leddet i en sekvens, kan vi lett finne z-transformen til sekvensen ved å benytte tabellen øverst på denne siden.

Tidsforsinkelse

Vi har tidligere sett at $Z\{\delta_n\} = 1$ og at z-transformen til den tidsforsinkete enhetspulsen δ_{n-k} er $\frac{1}{z^k}$, altså $\frac{1}{z^k} \cdot Z\{\delta_n\}$. Vi skal nå se at dette gjelder for alle tidsforsinkete sekvenser.

Vi tar utgangspunkt i den endelige kausale sekvensen $\{a_n\} = \{1, 2, 3\}$ og den tidsforsinkete $\{b_n\} = \{a_{n-2}\} = \{0, 0, 1, 2, 3\}$.

(Skrivemåten $\{b_n\} = \{a_{n-2}\}$ sier oss at $b_0 = a_{-2} = 0$, $b_1 = a_{-1} = 0$, $b_2 = a_0 = 1$ osv.)

I følge definisjonen (ligning 6.1) blir

$$Z\{a_n\} = A(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}, \text{ mens}$$

$$Z\{a_{n-2}\} = Z\{b_n\} = B(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4}, \text{ dvs}$$

$$Z\{a_{n-2}\} = \frac{1}{z^2} \cdot Z\{a_n\}$$

Vi kan ut fra dette sette fram følgende regel for tidsforsinkete kausale sekvenser:

$$\boxed{Z\{a_{n-k}\} = \frac{1}{z^k} \cdot Z\{a_n\}} \tag{6.3}$$

Eksempel 6.5:

Finn z-transformen til sekvensen $\{a_n\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ og bruk deretter likning 6.3 til å finne z-transformen til $\{b_n\} = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Løsning: Ser at $a_n = n$, bruker tabellen på side 49 og finner $Z\{a_n\} = A(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Ser videre at $b_n = a_{n-1}$, bruker ligning 6.3 og får:

$$Z\{b_n\} = Z\{a_{n-1}\} = \frac{1}{z} \cdot Z\{a_n\} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

Eksempel 6.6:

Finn z-transformen til sekvensen $\{a_n\} = \{0, 0, 1, -2, 4, -8, \ldots\}$

Løsning: Definerer først

$$\{b_n\} = \{1, -2, 4, -8, 16, \ldots\} \Rightarrow b_n = (-2)^n \Rightarrow Z\{b_n\} = \frac{z}{z+2}$$

Ser at $\{a_n\} = \{b_{n-2}\}$, og dermed blir $Z\{a_n\} = \frac{1}{z^2} \cdot Z\{b_n\} = \frac{1}{z(z+2)}$

Eksempel 6.7:

Finn z-transformen til sekvensen $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, 4, -8, \ldots\right\}$

Løsning: Her må en ikke la seg lure til å tro at $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, 4, -8, \ldots\right\}$ er en tidsforsinket utgave av sekvensen $\{b_n\} = \{1, -2, 4, -8, 16, \ldots\}$. Rene tidsforsinkete sekvenser starter alltid med èn eller flere nuller! (Jfr. eksempel 6.5 og eksempel 6.6).

Her har vi i stedet at $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{4} b_n\right\} \Rightarrow Z\{a_n\} = \frac{1}{4} Z\{b_n\} = \frac{z}{4(z+2)}$

Eksempel 6.8:

Finn z-transformen til sekvensen $\{a_n\} = \{0, 0, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$

Løsning: Her ser vi at $\{a_n\} = \{b_{n-2}\}$ der $\{b_n\} = \{4, 8, 16, 32, \ldots\} = 4 \cdot 2^n$

Vi får da: $Z\{a_n\} = \frac{1}{z^2} \cdot Z\{b_n\} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{4z}{z-2} = \frac{4}{z(z-2)}$

Oppgaver

29. Skriv opp de fem første leddene i de sekvensene som er gitt av følgende allmenne ledd og bruk deretter tabellen på side 49 til å utlede z-transformen til hver enkelt sekvens.

a) $a_n = \delta_n + \delta_{n-1}$

b) $b_n = n - \delta_{n-1}$

c) $c_n = 2^n - n\delta_{n-2}$

d) $d_n = (n-1) \cdot 3^n$

e) $e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

f) $f_n = n(\delta_n - 3\delta_{n-2})$

30. Finn det allmenne leddet og bruk deretter tabellen på side 49 til å finne z-transformen til følgende kausale sekvenser:

a) $\{a_n\} = \{0, 1, 0, -1, 0\}$

b) $\{b_n\} = \{1,2,4,8,16\ldots\}$

c) $\{c_n\} = \left\{8, 12, 18, 27, 40\frac{1}{2}, \ldots\right\}$

d) $\{d_n\} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$

e) $\{e_n\} = \{0, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

f) $\{f_n\} = \{0, 0, 0, -2, -4, -8, \ldots\}$

g) $\{g_n\} = \{2, 1, -1, -2, -3, \ldots\}$

h) $\{h_n\} = \{0, 2, 8, 26, 80, 242, \ldots\}$

Hint: 3^n

7 Invers z-transform

Vi har til nå konsentrert oss om å finne z-transformen til kausale sekvenser. I dette kapitlet skal vi forsøke å gå motsatt vei: Vi skal finne kausale sekvenser $\{a_n\}$ når deres z-transform *A(z)* er gitt! Vi kan skrive dette slik:

$$\boxed{\{a_n\} = Z^{-1}[A(z)]} \qquad (7.1)$$

Operatoren Z^{-1} kalles invers z-transform. Tabellen på side 49 blir et bra hjelpemiddel også til denne operasjonen.

Eksempel 7.1:

Finn den kausale sekvensen $\{a_n\}$ som har z-transform $A(z) = \dfrac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^3}$

Løsning: $A(z) = 1 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z^3}$ gir $\{a_n\} = \delta_n + 2\delta_{n-1} + \delta_{n-3} = \{1, 2, 0, 1\}$

Eksempel 7.2:

Finn den kausale sekvensen $\{b_n\}$ som har z-transform $Y(z) = \dfrac{1}{z-2}$

Løsning: De fleste z-transformene i tabellen på side 49 har z i telleren.

Vi skriver derfor om $Y(z)$ slik: $Y(z) = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{z}{z-2}$

I og med at $Z^{-1}\left[\dfrac{z}{z-2}\right] = \{2^n\}$ (fra tabellen) blir $Z^{-1}[Y(z)]$ også $\{2^n\}$, bortsett fra at vi er nødt til å tidsforsinke med 1 p.g.a. faktoren $\dfrac{1}{z}$.

Svaret blir altså: $\{y_n\} = \{0, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$ eller $y_n = \begin{cases} 0 & \text{for n=0} \\ 2^{n-1} & \text{for } n \geq 1 \end{cases}$

Legg merke til hva som skjer når vi tidsforsinker med 1: For det første må vi naturligvis sette y_0=0, og for det andre må vi huske å bytte ut alle n i det allmenne leddet med n-1.
Dersom vi skal tidsforsinke med 2, blir både y_0 og y_1 lik 0, og alle n i det allmenne leddet må skiftes ut med n-2.

Delbrøksoppspalting

Dette er en teknikk vi ofte får bruk for når vi skal integrere eller transformere brøkuttrykk. Dersom nevneren er et polynom av andre grad eller mer, kan vi som regel "spalte opp" brøken i flere delbrøker. Dette går veldig raskt hvis nevneren kun består av et antall førstegradsfaktorer. Vi benytter da kjappmetoden som er beskrevet nedenfor.

Vi kan ta utgangspunkt i uttrykket $\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{5x+3}{(x-1)(x+3)}$ (*)

Denne brøken kan spaltes til to delbrøker, nemlig $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$. Problemet blir å finne konstantene A og B. Når vi skal finne A, setter vi $x = 1$ inn i (*) samtidig som vi holder hånda over $x-1$ (som ville gitt null i nevner). Vi får da $A = \frac{5 \cdot 1 + 3}{1+3} = 2$

Når vi skal finne B, setter vi $x = -3$ inn i (*) samtidig som vi holder hånda over $x+3$ (som ville gitt null i nevner). Vi får da $B = \frac{5 \cdot (-3) + 3}{-3-1} = 3$

Altså er $\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}$

Eksempel 7.3:

Delbrøksoppspalt uttrykket $\frac{4x+13}{x^2-x-2}$ i henhold til metoden beskrevet ovenfor.

Løsning: Først må nevneren faktoriseres. abc-formelen gir $x_1 = 2 \vee x_2 = -1$, slik at vi får

(*) $\frac{4x+13}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$

Men da er $A = \frac{4 \cdot 2 + 13}{2+1} = 7$ og $B = \frac{4 \cdot (-1) + 13}{-1-2} = -3$

Vi får da $\frac{4x+13}{(x-2)(x+1)} = \frac{7}{x-2} - \frac{3}{x+1}$

Vi kan kontrollere at svaret er riktig ved å skrive det siste uttrykket på felles brøkstrek.

Det viser seg at delbrøksoppspalting er et anvendelig hjelpemiddel når det gjelder invers z-transform. Vi skal imidlertid ikke delbrøksoppspalte z-transformen (f.eks. $A(z)$) i sin helhet. Vi skal i stedet dividere med en faktor z først for så å delbrøksoppspalte $A(z)/z$. Når delbrøksoppspaltingen er avsluttet, multipliserer vi med z og alt er i orden igjen. Grunnen til at vi "tar vare på" z-en er at alle høyresidene i tabellen på side 49 (bortsett fra enhetspulsene) har z i telleren, og inverstransformeringen vil dermed gå mye greiere.

Dette var kanskje forvirrende, så noen eksempler kan vel neppe gjøre det verre?

Eksempel 7.4:

Finn den kausale sekvensen $\{x_n\}$ som har z-transform $X(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$

Løsning: $X(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2} = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$

Vi dividerer med z og får: $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

Så var det delbrøksoppspaltingen: $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z-2}$

Her kan vi benytte kjappmetoden som gir $A = \dfrac{1}{-1} = -1$ og $B = \dfrac{1}{1} = 1$

Vi får da at $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1} \Rightarrow X(z) = \dfrac{z}{z-2} - \dfrac{z}{z-1}$

Da gjenstår bare å inverstransformere v.h.a. tabellen på side 49.

Vi får da: $x_n = 2^n - 1$ som gir $\{x_n\} = \{0, 1, 3, 7, 15, \ldots\}$

Eksempel 7.5:

Benytt delbrøksoppspalting til å løse eksempel 7.2.

Løsning: $Y(z) = \frac{1}{z-2} \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2}$

Kjappmetoden gir: $A = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ og $B = \frac{1}{2}$

Dette gir $\frac{Y(z)}{z} = \frac{-\frac{1}{2}}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2}$

Da er det bare å inverstransformere: $Y(z) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}z}{z-2} \Rightarrow y_n = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{2} \cdot 2^n}$

Svaret vi fant i eksempel 7.2 så slik ut: $y_n = \begin{cases} 0 & \text{for n=0} \\ 2^{n-1} & \text{for } n \geq 1 \end{cases}$

Kontroller selv at dette svaret er det samme som det vi fant i dette eksemplet!

Eksempel 7.6:

Finn den kausale sekvensen $\{y_n\}$ som har z-transform $Y(z) = \frac{2z+1}{z^2 - 2z - 3}$

Løsning: $Y(z) = \frac{2z+1}{z^2 - 2z - 3} = \frac{2z+1}{(z+1) \cdot (z-3)}$

Her kan vi ikke dele med z i telleren, men vi kan likevel delbrøksoppspalte $\frac{Y(z)}{z}$:

$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z+1}{z(z+1)(z-3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-3}$ som går greit med kjappmetoden.

Vi får $A = \frac{1}{1 \cdot (-3)} = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{-1}{(-1) \cdot (-4)} = -\frac{1}{4}$ og $C = \frac{7}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12}$

Da blir $Y(z) = -\frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{4}z}{z+1} + \frac{\frac{7}{12}z}{z-3}$ og dermed

$$y_n = -\frac{1}{3}\delta_n - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{7}{12} \cdot 3^n = \boldsymbol{\frac{7 \cdot 3^n - 3(-1)^n - 4\delta_n}{12}}$$

Når vi får to like faktorer i nevneren, for eksempel $(x-2)^2$, fungerer ikke kjappmetoden. Vi blir da nødt til å bruke det vi kan kalle for tungmetoden. Denne metoden baserer seg på at vi må finne en delbrøk for faktoren i andre og en for faktoren i første, altså $\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}$.

Hvordan dette skal gjøres i praksis, er vist i eksemplet nedenfor.

Eksempel 7.7:

Delbrøksoppspalt uttrykket $\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x-2)^2}$

Løsning: Her har vi en dobbel førstegradsfaktor i nevneren, og i følge oppskriften øverst på siden må delbrøksoppspaltingen da bli slik: $\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$

Når vi skal sette dette uttrykket på felles brøkstrek, må vi være litt på vakt. Husk at fellesnevneren skal være $(x-1)(x-2)^2$!

Vi får da:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2)^2+B(x-1)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)^2} =$$

$$\frac{Ax^2-4Ax+4A+Bx-B+Cx^2-3Cx+2C}{(x-1)(x-2)^2}$$

Dette gir disse likningene: $\begin{bmatrix} A+C = 1 \\ -4A+B-3C = 1 \\ 4A-B+2C = 3 \end{bmatrix}$

Det kan være litt arbeid med å løse slike likninger, men et godt kjerringråd kan være å addere alle tre likningene. I dette tilfellet blir vi da stående igjen med $A = 5$. (Flaks!)

Setter vi inn dette i den øverste likningen får vi $C = -4$, og da blir $B = 9$.

Svaret blir altså: $\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x-2)^2} = \mathbf{\frac{5}{x-1}+\frac{9}{(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}}$

Eksempel 7.8:

Finn den kausale sekvensen $\{x_n\}$ som har z-transform $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$

Løsning: Vi delbrøksoppspalter $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ ved hjelp av tungmetoden:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} = \frac{A + Bz - B}{(z-1)^2}$$

For at dette skal stemme må vi ha $\begin{bmatrix} B = 1 \\ A - B = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = 1 \\ B = 1 \end{bmatrix}$

Vi har altså: $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1} \Rightarrow X(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} + \dfrac{z}{z-1}$

Det allmenne leddet blir da $x_n = n + 1$

Sekvensen ser slik ut: $\{x_n\} = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$

Eksempel 7.9:

Finn den kausale sekvensen $\{y_n\}$ som har z-transform $Y(z) = \dfrac{8z^2 + 10z - 4}{(z-2)^2}$

Løsning: Vi må nok bruke tungmetoden her også: $\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{8z^2 + 10z - 4}{z(z-2)^2} =$

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{(z-2)^2} + \frac{C}{z-2} = \frac{Az^2 - 4Az + 4A + Bz + Cz^2 - 2Cz}{z(z-2)^2}$$

Vi får da: $\begin{bmatrix} A + C = 8 \\ -4A + B - 2C = 10 \\ 4A = -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = -1 \\ B = 24 \\ C = 9 \end{bmatrix}$

Da blir $Y(z) = -1 + \dfrac{24z}{(z-2)^2} + \dfrac{9z}{z-2}$ og

$$y_n = 12n \cdot 2^n + 9 \cdot 2^n - \delta_n = (\mathbf{12n + 9}) \cdot \mathbf{2^n} - \delta_{\boldsymbol{n}}$$

De første leddene i sekvensen blir da: $\{8,\ 42,\ 132,\ 360\ldots\}$

Oppgaver

31. Finn det allmenne leddet i den kausale sekvensen som har følgende z-transform:

a) $A(z) = \dfrac{3z + z^2 + 5z^5}{z^5}$

b) $B(z) = \dfrac{z}{3z + 1}$

c) $C(z) = \dfrac{z - 2}{z + 1}$

d) $D(z) = \dfrac{z}{z^2 + z - 2}$

e) $E(z) = \dfrac{z - 3}{z^2 - 3z + 2}$

f) $F(z) = \dfrac{2z^2 + 6z + 5}{z(2z + 1)}$

8 Differenslikninger

Differenslikninger (eller rekursjonslikninger) er en type likninger som angir sammenhengen mellom de forskjellige leddene i en sekvens. F.eks. angir likningen $a_n = a_{n-1} + 4$ at ledd nr. n i sekvensen (a_n) skal være 4 mer enn det foregående leddet.

Dersom vi antar at $\{a_n\}$ i likningen over er kausal, skjønner vi at $a_0 = a_{-1} + 4 = 4$, $a_1 = a_0 + 4 = 8$, $a_2 = a_1 + 4 = 12$ osv. slik at sekvensen $\{a_n\} = \{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\} \Rightarrow a_n = 4(n+1)$ er løsningen til differenslikningen.

Vi kan sette prøve på dette ved å sette den a_n vi har funnet inn i differenslikningen:

Venstre side: $a_n = 4(n+1)$

Høyre side: $a_{n-1} + 4 = 4(n-1+1) + 4 = 4n + 4 = 4(n+1)$

Vi ser at de to sidene ble like for alle n og løsningen må derfor være riktig.

Eksempel 8.1:

Finn de fire første leddene i den kausale sekvensen $\{a_n\}$ som oppfyller differenslikningen

$$a_n = 2a_{n-1} - 3.$$

Løsning: $a_0 = 2a_{-1} - 3 = -3$, $a_1 = 2a_0 - 3 = -9$, $a_2 = 2a_1 - 3 = -21$ og $a_3 = 2a_2 - 3 = -45$

Svaret blir altså: $\{a_n\} = \{-3, -9, -21, -45, \ldots\}$

Eksempel 8.2:

Vis at det allmenne leddet i sekvensen i eksempel 8.1 er $a_n = 3 - 6 \cdot 2^n$

Løsning: Vi kan enkelt vise at $a_n = 3 - 6 \cdot 2^n$ stemmer for de fire første leddene i sekvensen, men for å vise at a_n stemmer for *alle n* må vi sette prøve på differenslikningen:

Venstre side: $a_n = 3 - 6 \cdot 2^n$

Høyre side: $2a_{n-1} - 3 = 2(3 - 6 \cdot 2^{n-1}) - 3 = 6 - 6 \cdot 2^n - 3 = 3 - 6 \cdot 2^n$

Sidene ble like for alle n og dermed må det allmenne leddet være riktig.

Differenslikningen $a_n = a_{n-1} + 4$ er en førsteordens differenslikning fordi et vilkårlig ledd i sekvensen er bestemt av det foregående leddet. Tilsvarende er $b_n = (1/2)(b_{n-1} + b_{n-2})$ en andreordens differenslikning fordi et vilkårlig ledd i denne sekvensen er bestemt av de to foregående leddene.

Førsteordens differenslikninger

Allerede på side 46 ble det sagt at z-transformen kan brukes til å løse differenslikninger. (Å løse en differenslikning betyr å finne det allmenne leddet i den ukjente sekvensen.) Nå skal vi se at dette stemmer. Vi tar utgangspunkt i den 1. ordens differenslikningen i eksempel 8.1. Det er her viktig å være klar over at dersom sekvensen $\{a_n\} = \{-3, -9, -21, -45, \ldots\}$, blir sekvensen $\{a_{n-1}\} = \{0, -3, -9, -21, \ldots\}$, altså $\{a_n\}$ tidsforsinket med 1.

Eksempel 8.3:

Finn det allmenne leddet i sekvensen $\{a_n\}$ som oppfyller differenslikningen $a_n = 2a_{n-1} - 3$.

Løsning: Vi begynner med å z-transformere hele differenslikningen. Vi kaller z-transformen til $\{a_n\}$ for $A(z)$ og får da:

$$A(z) = \frac{2A(z)}{z} - \frac{3z}{z-1}$$

Merk at z-transformen til den tidsforsinkete sekvensen er $\dfrac{A(z)}{z}$!

Nå må vi finne $A(z)$:

$$\frac{z-2}{z} \cdot A(z) = -\frac{3z}{z-1} \Rightarrow A(z) = -\frac{3z^2}{(z-1)(z-2)}$$

Når vi kjenner $A(z)$ må vi inverstransformere for å finne $\{a_n\}$.

Delbrøksoppspalting gir: $\dfrac{A(z)}{z} = \dfrac{3}{z-1} - \dfrac{6}{z-2} \Rightarrow A(z) = \dfrac{3z}{z-1} - \dfrac{6z}{z-2}$

Inverstransform ved hjelp av tabellen gir nå: $a_n = 3 - 6 \cdot 2^n$,

noe som vi beviste var riktig i eksempel 8.2.

Eksempel 8.4:

Finn de fire første leddene i sekvensen $\{a_n\}$ som tilfredsstiller differenslikningen $a_n = n - 2a_{n-1}$. Bruk deretter z-transformen til å finne et uttrykk for det allmenne leddet i sekvensen. Hva blir a_{20}?

Løsning: Vi finner greit at $a_0 = 0 - 2a_{-1} = 0$, $a_1 = 1 - 2a_0 = 1$, $a_2 = 2 - 2a_1 = 0$ og at $a_3 = 3 - 2a_2 = 3$. De fire første leddene er altså {0,1,0,3}.

Men hva blir det allmenne leddet?

Z-transformering av differenslikningen gir:

$$A(z) = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2A(z)}{z}$$

$$\frac{z+2}{z} \cdot A(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow \frac{A(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}$$

Delbrøksoppspalting gir nå:

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{1/3}{(z-1)^2} + \frac{2/9}{z-1} - \frac{2/9}{z+2} \Rightarrow A(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{2}{9} \cdot \frac{z}{z+2}$$

Inverstransformerer og får det allmenne leddet:

$$a_n = \frac{1}{3}n + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \cdot (-2)^n = \frac{3n + 2 + (-2)^{n+1}}{9}$$

For å sjekke at vi har regnet riktig kan vi nå kontrollere at $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ og $a_3 = 3$. Eller vi kan bevise at a_n er riktig ved å sette prøve på differenslikningen som vi gjorde i eksempel 8.2:

Venstre side: $a_n = \dfrac{3n + 2 + (-2)^{n+1}}{9}$

Høyre side: $n - 2a_{n-1} = n - 2 \cdot \dfrac{3(n-1) + 2 + (-2)^n}{9} =$

$$\frac{9n - 6n + 6 - 4 - 2(-2)^n}{9} = \frac{3n + 2 + (-2)^{n+1}}{9}$$

Dette stemte jo veldig bra, og vi kan da beregne ledd nr. 20 i sekvensen:

$$a_{20} = \frac{60 + 2 + (-2097152)}{9} = -\frac{2097090}{9} = -233010$$

Andreordens differenslikninger

Som tidligere nevnt er en differenslikning av *andre* orden dersom et vilkårlig ledd i sekvensen er bestemt av de *to* foregående leddene. Framgangsmåten for å løse slike differenslikninger ved hjelp av z-transformen blir nøyaktig lik den vi gjennomgikk for førsteordens differenslikninger.

Når vi skal finne de første leddene i sekvensen ut fra differenslikningen, blir det nå mange flere tall å holde orden på. Det er minst sjanse for å gjøre feil her hvis vi ordner oss en liten tabell. Denne tabellen bør som et minimum inneholde fire kolonner som fra venstre til høyre har betegnelsene n, a_{n-2}, a_{n-1} og a_n. Følgende framgangsmåte bør følges ved utfylling av tabellen:

1. Fyll ut tall for n i venstre kolonne. Start med 0 og fortsett til du har det foreskrevne antall ledd.
   Eks.: Dersom du skal finne de fire første leddene i en sekvens, må du fylle ut n-verdier fra 0 til 3.

n	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
0			
1			
2			
3			

2. Fyll ut tallet 0 i tre av rutene. Dette kan vi alltid gjøre når vi har med kausale sekvenser å gjøre, for da vet vi at $a_{-2} = a_{-1} = 0$. Dette medfører at $a_{n-2} = 0$ for $n = 0$ og $n = 1$, mens $a_{n-1} = 0$ for $n = 0$. Tabellen ser da slik ut:.

n	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
0	0	0	
1	0		
2			
3			

3. Hvis vi nå ser på den øverste linjen i tabellen, oppdager vi at vi mangler bare ett tall her. Dette tallet kan vi finne ved å sette $n = 0$ inn i differenslikningen. La oss si at vi finner $a_0 = 2$. Da kan vi fylle ut tallet 2 i tre av rutene i tabellen: $a_n = 2$ for $n = 0$, $a_{n-1} = 2$ for $n = 1$ og $a_{n-2} = 2$ for $n = 2$.

n	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
0	0	0	2
1	0	2	
2	2		
3			

4. Nå ser vi at det mangler bare et tall i den andre linjen. Dette tallet finnes ved å sette $n = 1$ inn i differenslikningen. Vi kan f. eks. anta at dette tallet blir 5. Da kan vi sette tallet 5 inn i tre nye ruter i tabellen:

n	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
0	0	0	2
1	0	2	5
2	2	5	
3	5		

Legg merke til at vi får en parallellforskyvning av like tall nedover mot venstre hele tiden.

5. Fortsett på samme måte til tabellen er fullstendig utfylt. Den kan da se slik ut:

n	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
0	0	0	2
1	0	2	5
2	2	5	9
3	5	9	14

De fire første leddene i sekvensen finner vi nå i kolonnen a_n ytterst til høyre:

$\{a_n\} = \{2, 5, 9, 14, \dots\}$

Eksempel 8.5:

Finn de fem første leddene i den kausale sekvensen som oppfyller differenslikningen $a_n - 4a_{n-2} = 3\delta_n - 5$. Finn deretter det allmenne leddet i sekvensen ved hjelp av z-transformen.

Løsning: Vi skriver først om differenslikningen til $a_n = 3\delta_n - 5 + 4a_{n-2}$ og regner deretter ut alle tallene i tabellen:

n	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
0	0	0	-2
1	0	-2	-5
2	-2	-5	-13
3	-5	-13	-25
4	-13	-25	-57

De fem første leddene blir altså: $\{a_n\} = \{-2,-5,-13,-25,-57, \ldots\}$

Vi skal nå finne det allmenne leddet i denne sekvensen. Z-transformasjon gir:

$$A(z) - \frac{4A(z)}{z^2} = 3 - \frac{5z}{z-1} = \frac{-2z-3}{z-1}$$ (Legg merke til at $Z\{a_{n-2}\} = \frac{A(z)}{z^2}$!)

$$A(z) \cdot \frac{z^2-4}{z^2} = \frac{-2z-3}{z-1}$$

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{-2z^2-3z}{(z-1)\cdot(z^2-4)} = \frac{-2z^2-3z}{(z-1)\cdot(z+2)\cdot(z-2)}$$

Delbrøksoppspalting gir: $A(z) = \dfrac{\frac{5}{3}z}{z-1} - \dfrac{\frac{1}{6}z}{z+2} - \dfrac{\frac{7}{2}z}{z-2}$

og det allmenne leddet blir: $a_n = \frac{5}{3} - \frac{1}{6}(-2)^n - \frac{7}{2}\cdot 2^n = \dfrac{10 - 21\cdot 2^n - (-2)^n}{6}$

Her kan vi legge merke til at når *n* er et oddetall blir $21\cdot 2^n + (-2)^n = 20\cdot 2^n$ og når *n* er et partall blir $21\cdot 2^n + (-2)^n = 22\cdot 2^n$, slik at svaret kan skrives slik:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{10 - 20\cdot 2^n}{6} & \text{for } n = 1,3,5\ldots \\ \dfrac{10 - 22\cdot 2^n}{6} & \text{for } n = 2,4,6\ldots \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{5(1 - 2\cdot 2^n)}{3} & \text{for } n = 1,3,5\ldots \\ \dfrac{(5 - 11\cdot 2^n)}{3} & \text{for } n = 2,4,6\ldots \end{cases}$$

Eksempel 8.6:

Finn de fire første leddene i den kausale sekvensen som oppfyller differenslikningen $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 1$. Finn deretter det allmenne leddet i sekvensen ved hjelp av z-transformen.

Løsning: Vi skriver først om differenslikningen til $a_n = 1 + 2a_{n-2} - a_{n-1}$ og følger deretter oppskriften fra de foregående sidene. Dersom vi regner riktig, skal tabellen bli seende slik ut:

n	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	3
3	0	3	-2

De fire første leddene blir altså: $\{a_n\} = \{1, 0, 3, -2, \ldots\}$.

Vi skal nå finne det allmenne leddet i denne sekvensen.
Vi tar utgangspunkt i den gitte differenslikningen og får ved z-transformasjon:

$$A(z) + \frac{A(z)}{z} - \frac{2A(z)}{z^2} = \frac{z}{z-1} \Rightarrow A(z) \cdot \frac{z^2 + z - 2}{z^2} = \frac{z}{z-1}$$

Vi får da:

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1) \cdot (z^2 + z - 2)} = \frac{z^2}{(z-1)^2 \cdot (z+2)}$$

Delbrøksoppspalting gir:

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{1/3}{(z-1)^2} + \frac{5/9}{z-1} + \frac{4/9}{z+2} \Rightarrow A(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{4}{9} \cdot \frac{z}{z+2}$$

Det allmenne leddet i sekvensen blir dermed:

$$a_n = \frac{1}{3}n + \frac{5}{9} + \frac{4}{9}(-2)^n = \frac{4(-2)^n + 3n + 5}{9}$$

Nå kan vi sjekke de leddene vi har funnet i tabellen, f.eks.

$$a_3 = \frac{4(-2)^3 + 3 \cdot 3 + 5}{9} = \frac{-32 + 14}{9} = -2$$ som stemmer.

Det er selvfølgelig også mulig å sjekke det allmenne leddet for en vilkårlig n ved å sette inn i differenslikningen. (Prøv dette!)

Oppgaver

32. Finn de fire første leddene i de kausale sekvensene som oppfyller følgende differens-likninger. Benytt deretter z-transformen til å finne det allmenne leddet. Sett til slutt det all-menne leddet inn i differenslikningen og sjekk at likningen stemmer.

a) $a_n = 3a_{n-1} + 4$

b) $b_n = 2b_{n-1} + 2^n$

c) $c_n - 5c_{n-1} + 6c_{n-2} = 1$

33. Nå skal du finne de seks første leddene i hver sekvens før du finner det allmenne leddet. Til slutt skal du sjekke at det allmenne leddet stemmer for $n = 5$.

a) $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 3\delta_{n-1} + 4$

b) $b_n - 4b_{n-2} = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$

9 Matriser

En matrise er en samling tall satt opp i et antall rekker og kolonner. Vi angir ofte matrisens format som f.eks. 2x3-matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (altså 2 rekker og 3 kolonner) eller 3x1-matrisen $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi kan også kalle denne matrisen en *kolonnevektor*.

Transponering av matriser

Dersom vi lar rekkene i 2x3-matrisen over bli til kolonner (og dermed kolonnene til rekker) får vi den *transponerte* matrisen til A, nemlig $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Den transponerte til en 2x3-matrise blir altså en 3x2-matrise. Likeledes blir $B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, altså en *rekkevektor.*

Addisjon og subtraksjon av matriser

For at vi skal kunne addere eller subtrahere flere matriser må alle matrisene være av samme format. Vi kan f.eks. ikke trekke en 2x3-matrise fra en 3x3-matrise. Addisjon og subtraksjon av matriser foregår leddvis.

Eksempel 9.1:

Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ Regn (om mulig) ut:

a) $B + C^T$ b) $B - C$ c) $B^T - C$ d) $A + B$

Løsning: a) $B + C^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $B^T - C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ (b, og d kan ikke løses)

Matrisemultiplikasjon

Multiplikasjon av matriser er en noe mer omstendelig prosess enn addisjon og subtraksjon. Det er heller ikke alle matriser som kan multipliseres med hverandre. Dersom vi skal finne produktet $C = AB$ av de to matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ går vi fram slik:

For å finne det tallet som skal stå i første rekke og første kolonne i matrisen C må vi multiplisere tallene i første *rekke* i A med tallene i første *kolonne* i B på denne måten: $1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = 3 - 4 - 4 = -5$. Dersom antall kolonner i A er forskjellig fra antall rekker i B blir det naturligvis problemer. I så fall må vi konkludere med at matrisene ikke kan multipliseres.

Det er nå vanlig å fortsette med første rekke i A og neste kolonne i B, men i dette tilfellet er B bare en kolonnevektor, så vi kan derfor gå videre til neste rekke.

Dersom vi nå multipliserer tallene i andre rekke i A med tallene i første kolonne i B, får vi: $(-3) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -9 - 2 + 0 = -11$. Dette tallet hører da hjemme i andre rekke og første kolonne i C. Etter som det nå ikke er flere rekker i A, er multiplikasjonen ferdig.

Vi kan derfor konkludere med at $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \end{bmatrix}$

Legg merke til at produktet BA ikke er mulig å beregne. Dette betyr at vi må passe på rekkefølgen nøye når vi skal multiplisere matriser med hverandre.

Eksempel 9.2:

Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Regn (om mulig) ut:

a) $B \cdot C^T$ b) $B \cdot C$ c) $B^T \cdot C$ d) $A \cdot B$

Løsning: Oppgave a og c er ikke løsbare da antall rekker i den første matrisen ikke er det samme som antall kolonner i den andre.

b) Første rekke, første kolonne: $0 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 0 - 9 - 1 = -10$

Første rekke, andre kolonne: $0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 0 + 0 + 4 = 4$

Andre rekke, første kolonne: $3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = 15 + 6 + 2 = 23$

Andre rekke, andre kolonne: $3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 = 3 + 0 - 8 = -5$

Vi har altså at $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 23 & -5 \end{bmatrix}$

d) Første rekke, første kolonne: $2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 = 0 - 3 = -3$

Første rekke, andre kolonne: $2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = -6 - 2 = -8$

Første rekke, tredje kolonne: $2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 2 + 2 = 4$

Andre rekke, første kolonne: $4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 0 + 9 = 9$

Andre rekke, andre kolonne: $4 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -12 + 6 = -6$

Andre rekke, tredje kolonne: $4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2$

Dermed blir $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 9 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

I denne oppgaven brukte vi lang tid på å finne produktet av to matriser. Etter hvert som en blir vant til å multiplisere på denne måten, vil arbeidet gå mye raskere (og forhåpentligvis feilfritt).

Diagonalmatriser og enhetsmatriser

Vi vil etter hvert oppdage at det er kvadratiske matriser vi kommer til å jobbe mest med. Vi skal derfor nå introdusere noen nye begreper som angår denne typen matriser.

I en kvadratisk matrise er *hoveddiagonalen* den diagonalen som går fra øvre venstre hjørne til nedre høyre hjørne. I 2x2-matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ består altså hoveddiagonalen av tallene 1 og 4. Dersom alle tallene utenfor hoveddiagonalen er 0, som f.eks. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, kalles matrisen en *diagonalmatrise*. Hvis alle tallene på hoveddiagonalen i tillegg er 1, altså $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, har vi den matrisen som kalles *enhetsmatrisen*.

Vi lar enhetsmatrisen få betegnelsen I. Husk at I kan være enten 2x2-matrise, 3x3-matrise eller 7x7-matrise. Eneste krav er at den er kvadratisk. Denne spesielle matrisen har den egenskapen at når vi multipliserer den med en hvilken som helst matrise A, blir produktet A.

Eksempel 9.3:

Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Undersøk om $I \cdot A = A \cdot I = A$

Løsning: $I \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$A \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette så jo ut til å stemme veldig bra. For å kunne utføre multiplikasjonene måtte vi benytte 2x2-matrisen I første gang og 3x3-matrisen I andre gang. Legg også merke til at multiplikasjonsrekkefølgen ikke spiller noen rolle når enhetsmatrisen er involvert.

Determinanter

Determinanten er en tallstørrelse som er veldig sentral når vi regner med kvadratiske matriser. Vi skal nå lære hvordan vi beregner determinanten til 2x2- og 3x3-matriser.

I en 2x2-matrise finner vi determinanten på følgende måte:

1. Finn produktet av de to tallene på hoveddiagonalen.

2. Subtrahér produktet av de to tallene på den andre diagonalen.

Determinanten til matrisen A skrives $detA$.

Eksempel 9.4:

Finn determinanten til 2x2-matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

Løsning: Vi følger oppskriften ovenfor og får:

$$detA = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

$$detB = 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 6 + 5 = 11$$

$$detC = (-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$$

I en 3x3-matrise finner vi determinanten på følgende måte:

1. Skriv opp hele matrisen etterfulgt av de to første kolonnene i matrisen en gang til.

2. Multiplisér tallene på hoveddiagonalen og gjør det samme med de to andre "diagonalene" som er parallelle med hoveddiagonalen.

3. Gjør det samme med de tre "diagonalene" som ikke er parallelle med hoveddiagonalen.

4. Determinanten er nå summen av tallene fra pkt. 2 minus summen av tallene fra pkt. 3.

Det er sikkert greiest å lære seg dette gjennom et eksempel.

Eksempel 9.5:

Finn determinanten til 3x3-matrisene $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Løsning: Begynner med å skrive matrisen A etterfulgt av matrisens to første kolonner på nytt:

$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ Multipliserer nå ut hoveddiagonalen og de to andre diagonalene som går i

samme retning: $5 \cdot 1 \cdot 2 = 10$, $3 \cdot (-1) \cdot (-3) = 9$ og $(-2) \cdot 4 \cdot 2 = -16$

Så tar vi de tre diagonalene som går nedenfra og oppover:
$(-3) \cdot 1 \cdot (-2) = 6$, $2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$ og $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

Summen av de tre første blir 10+9-16=3 og de tre siste 6-10+24=20.

Determinanten til matrisen blir derfor $detA = 3 - 20 = -17$

Gjør nå det samme med matrise B, men går litt mer rett på sak: $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

“Nedoverdiagonalene” gir nå 0, 0 og 1, tilsammen 1.

“Oppoverdiagonalene” gir -15, 0 og-4, tilsammen -19.

Vi får da at $detB = 1 - (-19) = 20$

Inverse matriser

Vi har tidligere i dette kapitlet sett hvordan vi adderer, subtraherer og multipliserer matriser med hverandre. Divisjon er derimot ikke nevnt av den naturlige grunn at denne regnearten ikke finnes i forbindelse med matriser.

Det nærmeste vi kommer divisjon er invertering av matriser. Den inverse matrisen til en kvadratisk matrise A skrives A^{-1} og er den matrisen som gir $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Dersom vi multipliserer en matrise med sin inverse matrise blir altså produktet lik enhetsmatrisen. Det er forøvrig bare kvadratiske matriser som kan ha en invers matrise. Vi skal nå lære hvordan vi finner den inverse matrisen til 2x2- og 3x3-matriser.

Vi finner den inverse matrisen til en 2x2-matrise A på følgende måte:

1. Beregn determinanten $detA$ ved hjelp av metoden beskrevet på side 59.

2. *Adjugatmatrisen* skrives $adjA$ og kommer fram ved å la tallene på hoveddiagonalen i A skifte plass mens de øvrige tallene skifter fortegn.

3. Den inverse matrisen A^{-1} er nå $\frac{1}{detA} \cdot adjA$

Eksempel 9.6:

Finn den inverse matrisen til $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

Løsning: I eksempel 9.4 beregnet vi determinanten til disse tre matrisene. Vi trenger derfor ikke gjøre det arbeidet om igjen og går i stedet rett på adjugatmatrisen. $adjA = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ og

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Når et tall skal multipliseres med en matrise skal tallet multipliseres med samtlige tall i matrisen.

Vi kan for ordens skyld sjekke at svaret ble riktig: $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$adjB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ som gir $B^{-1} = \frac{1}{detB} \cdot adjB = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

Kontroll: $B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Når det gjelder matrise C, så vet vi at $detC = 0$. På grunn av at vi ikke kan dele på 0, må vi konkludere med at C^{-1} ikke eksisterer. Vi sier at C er en *singulær* matrise.

Du kan finne den inverse matrisen til 3x3-matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ på følgende måte:

1. Beregn determinanten $detA$. (Dette gjorde vi i eksempel 9.5 og vi fant da at den var -17.)

2. Skriv nå opp de to første rekkene i 3x5-matrisen vi benyttet i pkt. 1 en gang til rett under matrisen slik at du får en 5x5-matrise: $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

3. Stryk første rekke og første kolonne i 5x5-matrisen slik at du får en 4x4-matrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Første rekke i adjugatmatrisen kommer fram ved å starte øverst til venstre i 4x4-matrisen og beregne de tre 2x2-determinantene vi får når vi beveger oss *nedover.* Vi finner andre rekke på tilsvarende måte når vi starter øverst i midten og tredje rekke når vi starter øverst til høyre.

Til venstre: $1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = \mathbf{4}$, $2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 = \mathbf{-10}$ og $3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) = \mathbf{-1}$

Midt i: $(-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 4 = \mathbf{-5}$, $2 \cdot 5 - (-2) \cdot (-3) = \mathbf{4}$ og $(-2) \cdot 4 - (-1) \cdot 5 = \mathbf{-3}$

Til høyre: $4 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = \mathbf{11}$, $(-3) \cdot 3 - 5 \cdot 2 = \mathbf{-19}$ og $5 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = \mathbf{-7}$

Adjugatmatrisen blir $adjA = \begin{bmatrix} 4 & -10 & -1 \\ -5 & 4 & -3 \\ 11 & -19 & -7 \end{bmatrix}$

5. Den inverse matrisen A^{-1} blir da:

$$\frac{1}{detA} \cdot adjA = \frac{1}{-17} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -10 & -1 \\ -5 & 4 & -3 \\ 11 & -19 & -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 10 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ -11 & 19 & 7 \end{bmatrix}$$

Vi kan til slutt kontrollere at vi har regnet riktig ved å sjekke om $A^{-1} \cdot A = I$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 10 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ -11 & 19 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det kommer på det samme om vi sjekker $A^{-1} \cdot A$ eller $A \cdot A^{-1}$. Begge skal gi enhetsmatrisen til svar om vi har regnet riktig.

Eksempel 9.7:

Finn den inverse matrisen til $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Løsning: I eksempel 9.5 fant vi $detB = 20$.

5x5-matrisen blir $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ og etter slankekur: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Fra 4x4-matrisen finner vi etter litt regning $adjB = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ -16 & 20 & 4 \end{bmatrix}$

Vi får da $B^{-1} = \frac{1}{detB} \cdot adjB = \frac{1}{20} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ -16 & 20 & 4 \end{bmatrix}$

Vi kan til slutt sette prøve for å være sikker i vår sak:

$$B^{-1} \cdot B = \frac{1}{20} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ -16 & 20 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgaver

34. Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

    Beregn $A \cdot B$ og $B \cdot A$. Gjelder $A \cdot B = B \cdot A$ for matriser?

35. Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

    a) Finn om mulig følgende matriser:
    $A + B$, $A - C^T$, $B \cdot C$, $A^T \cdot B$ og $B^T \cdot C$

    b) Finn matrisene $(A^T B)C$ og $A^T(BC)$
    Gir uttrykket $A^T BC$ mening uten paranteser?

36. Finn determinantene til følgende matriser:

    a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

    b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

    c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

37. Inverter de tre matrisene i oppg. 36.

10 Lineære likningssystemer

Et *lineært likningssystem* med to ukjente x og y kan alltid skrives $\begin{bmatrix} p_1x + q_1y = r_1 \\ p_2x + q_2y = r_2 \end{bmatrix}$

Alle slike likninger kan dessuten skrives ved hjelp av matriser:

$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B$, der den kvadratiske matrisen A kalles *koeffisient-matrisen*. Multiplisér selv ut for å se at matriselikningen tilsvarer den opprinnelige.

Når likningen er skrevet på matriseform, kan den forholdsvis enkelt løses ved hjelp av matrisealgebra. Vi har likningen $A \cdot X = B$ der vi ønsker å finne den ukjente matrisen X. For å få denne alene på venstre side av likhetstegnet må vi formultiplisere med A^{-1} på begge sider: $A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ Nå vet vi at $A^{-1} \cdot A = I$ og at $I \cdot X = X$ slik at vi får $X = A^{-1} \cdot B$.

Her er det viktig å merke seg at vi må *formultiplisere* med A^{-1} for å få X alene. Dersom vi *ettermultipliserer* med A^{-1} får vi $A \cdot X \cdot A^{-1}$ som blir umulig å ha med å gjøre.

Eksempel 10.1:

Løs det lineære likningssettet $\begin{bmatrix} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{bmatrix}$ ved bruk av matrisealgebra.

Løsning: Skriver likningen på matriseform: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$ Vi må altså invertere koeffisientmatrisen.

$$detA = [1 \cdot (-1)] - (3 \cdot 2) = -1 - 6 = -7$$

$$adjA = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA = \frac{1}{-7} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Da blir $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

I eksemplet på foregående side kom vi altså fram til svaret $\begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 2 \end{bmatrix}$ ved matriseregning.

Denne metoden kan selvfølgelig også benyttes dersom vi har tre likninger med tre ukjente:

Eksempel 10.2:

Løs likningssettet $\begin{bmatrix} 3x - y + z = 4 \\ x + y - z = 8 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{bmatrix}$ ved hjelp av matrisealgebra.

Løsning: Vi skriver om likningen til matriseform: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Må finne A^{-1}. Starter med å finne $detA$: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ gir

$$detA = (-6 - 1 + 3) - (-1 - 9 + 2) = -4 - (-8) = 4$$

Så var det $adjA$: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Vi får nå $adjA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ og $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} \cdot adjA = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

Da blir $X = A^{-1} \cdot B = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$

Svaret ble altså $\begin{bmatrix} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -7 \end{bmatrix}$

Likningssettene gitt i eksempel 10.1 og eksempel 10.2 kan også løses på noenlunde avanserte kalkulatorer. Kalkulatoren får derimot problemer når variable størrelser inntreffer i koeffisientmatrisen eller når koeffisientmatrisen er singulær.

Eksempel 10.3:

Løs likningssettet $\begin{bmatrix} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \end{bmatrix}$ ved bruk av matrisealgebra.

Løsning: På matriseform: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

$$detA = (1 \cdot 4) - [(-2) \cdot (-2)] = 4 - 4 = 0$$

Når $detA = 0$ kan ikke matrisen inverteres. (Singulær matrise)

Dette betyr at vi ikke kan løse dette likningssettet på denne måten og at heller ikke kalkulatoren er i stand til å hjelpe oss.

Dette behøver imidlertid <u>ikke</u> bety at likningssettet ikke har noen løsning. Ved innsetting ser vi f.eks. at $\begin{bmatrix} x = 5 \\ y = 1 \end{bmatrix}$ er en løsning av likningen.

Gauss-eliminasjon

Dette er en løsningsmetode som fungerer selv om koeffisientmatrisen er singulær. Metoden har sitt navn etter den tyske matematikeren Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Vi innfører først *totalmatrisen* som inneholder både koeffisientmatrisen og kolonnevektoren på høyresiden. Likningssettet $\begin{bmatrix} x + y - 4z = 0 \\ 2x - 3y + z = 5 \\ y - 2z = -1 \end{bmatrix}$ gir altså totalmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Vi kan nå følge denne oppskriften for å finne løsningen på likningssettet:

Trinn 1. Divider rekke I med det første tallet i rekka slik at det første tallet i rekka blir 1. (Ikke nødvendig her.) Den nye rekke II kommer fram på følgende måte: Ta rekke II og subtrahér fra denne den nye rekke I multiplisert med det første tallet i rekke II. Det første tallet i den nye rekke II blir nå 0. Utfør samme operasjon med rekke III slik at det første tallet i denne rekka også blir 0.

Det var sannsynligvis ikke helt enkelt å følge med på dette, så vi går gjennom regningen på dette trinnet på det konkrete eksemplet vi har:

Vi dividerer først rekke I med det første tallet i rekka, i dette tilfelle 1. Dette medfører ingen endring. Så må vi ta rekke II minus 2 ganger rekke I fordi det første tallet i rekke II er 2. Vi får da $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

Til slutt må vi ta rekke III minus 0 ganger rekke I fordi det første tallet i rekke III er 0. Dette medfører selvfølgelig heller ingen endring i matrisen.

På dette trinnet har vi altså brukt rekke I til å eliminere det første tallet i rekkene nedenfor, og totalmatrisen ser nå slik ut: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Trinn 2. Rekke I beholdes uforandret. Divider rekke II med det andre tallet i rekka slik at de to første tallene i rekka blir 0 og 1. Den nye rekke III kommer fram på følgende måte: Ta rekke III og subtrahér fra denne den nye rekke II multiplisert med det andre tallet i rekke III. De to første tallene i rekke III blir nå 0.

I eksemplet vårt blir dette slik: Først må rekke II divideres med -5 slik at vi får $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -1 \end{bmatrix}$. Så må vi ta rekke III minus 1 ganger rekke II fordi det andre tallet i rekke III er 1. Vi får da $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$

På dette trinnet har vi altså brukt rekke II til å eliminere det andre tallet i rekken(e) nedenfor, og totalmatrisen ser nå slik ut: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$

Nå har vi eliminert tilstrekkelig mange tall til å løse likningen:

I nederste rekke står det $-\frac{1}{5}z = 0 \Rightarrow z = 0$

I midtre rekke står det $y - \frac{9}{5}z = -1 \Rightarrow y = -1 + \frac{9}{5} \cdot 0 = -1$

I øverste rekke står det $x + y - 4z = 0 \Rightarrow x = 0 - (-1) + 4 \cdot 0 = 1$

Eksempel 10.4:

Benytt Gauss-eliminasjon til å løse likningene

a) $\begin{bmatrix} 2x - 3y & = & 5 \\ x + 2y & = & 6 \end{bmatrix}$ og b) $\begin{bmatrix} x - 2y & = & 3 \\ -2x + 4y & = & -6 \end{bmatrix}$

Løsning: a) Totalmatrisen blir her $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

I trinn 1 må vi da først dele rekke I på 2 og deretter ta rekke II - 1 ganger rekke I.

Resultatet blir da slik: $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

I nederste rekke har vi nå $\frac{7}{2}y = \frac{7}{2} \Rightarrow y = 1$

I øverste rekke har vi $x - \frac{3}{2}y = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot 1 = 4$

b) Totalmatrisen blir $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

I trinn 1 trenger vi ikke dele rekke I på 1, men vi må ta rekke II + 2 ganger rekke I.

Vi får da: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Bare nullere i nederste rekke er et tegn på at koeffisientmatrisen i likningssettet er singulær.

I nederste rekke har vi nå $0x + 0y = 0$. Dette stemmer selvfølgelig uansett hvilke verdier vi velger for x og y.

I øverste rekke har vi $x - 2y = 3$. Det beste vi kan gjøre ut fra dette er å si at y kan velges fritt og at $x = 2y + 3$. Vi får dermed et uendelig antall løsninger på dette likn-ingssettet, f.eks. $x = 3, y = 0$, $x = 5, y = 1$ eller $x = 2001, y = 999$.

Svaret skal imidlertid oppgis slik: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x = 2y + 3} \\ \boldsymbol{y} \textbf{ velges fritt} \end{bmatrix}$

Eksempel 10.5:

Benytt Gauss-eliminasjon til å løse likningssettet $\begin{bmatrix} x + 3y + 4z = 0 \\ -2x + 2y + z = 3 \\ 8x + 5z = -1 \end{bmatrix}$

Løsning: Vi får her totalmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

I trinn 1 må vi først ta rekke II + 2 ganger rekke I og deretter rekke III - 8 ganger rekke I. Resultatet blir slik: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 3 \\ 0 & -24 & -27 & -1 \end{bmatrix}$

I trinn 2 blir det først å dele rekke II med 8 før vi tar rekke III + 24 ganger rekke II. Vi står da igjen med dette: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

I nederste rekke står det nå $0x + 0y + 0z = 8$ Denne likningen har ingen løsning og da kan heller ikke likningssettet gitt i oppgaven ha noen løsning.

Merk at $0x + 0y + 0z = 8$ ikke har noen løsninger, mens $0x + 0y + 0z = 0$ har uendelig mange løsninger.

Dette er de eneste mulige utfallene vi kan få når koeffisientmatrisen er singulær.

Vi kan sammenfatte dette slik:

Ikke-singulær koeffisientmatrise: Likningssettet har én (og bare én) løsning. Løsningen kan finnes ved invertering av koeffisientmatrisen eller ved Gauss-eliminasjon. En avansert kalkulator greier også å løse disse likningssettene.

Singulær koeffisientmatrise: Likningssettet har enten ingen eller uendelig mange løsninger. Eventuelle løsninger finnes ved hjelp av Gauss-eliminasjon. Kalkulatoren kan ikke gi svar på disse likningssettene.

Eksempel 10.6:

Benytt Gauss-eliminasjon til å løse likningssettet $\begin{bmatrix} x - 9y - 7z = 2 \\ 3x + 5y - z = 2 \\ -x + y + 2z = -1 \end{bmatrix}$

Løsning: Totalmatrisen blir $\begin{bmatrix} 1 & -9 & -7 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

I trinn 1 må vi først ta rekke II - 3 ganger rekke I og deretter rekke III + rekke I. Vi får da:

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 & -7 & 2 \\ 0 & 32 & 20 & -4 \\ 0 & -8 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

I trinn 2 deler vi først rekke II med 32 før vi tar rekke III + 8 ganger rekke II. Vi står da igjen med:

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den nederste likningen har uendelig mange løsninger slik at z kan velges fritt. Likningen i midten blir $y + \frac{5}{8}z = -\frac{1}{8} \Rightarrow y = -\frac{5z+1}{8}$ Setter vi dette inn i den øverste likningen får vi

$$x - 9\left(-\frac{5z+1}{8}\right) - 7z = 2 \Rightarrow x = 2 - \frac{45z}{8} - \frac{9}{8} + 7z = \frac{11z+7}{8}$$

Løsningen på likningssettet blir derfor slik: $\begin{bmatrix} x = \frac{11z+7}{8} \\ y = -\frac{5z+1}{8} \\ z \text{ velges fritt} \end{bmatrix}$

Vi får altså uendelig mange løsninger, en av dem er $\begin{bmatrix} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{bmatrix}$

Likningssett med ukjente koeffisienter

Av og til kommer vi ut for problem der vi ikke kjenner alle koeffisientene i likningssettet. Vi kan da sette inn bokstaver i stedet for disse og regne som vanlig. Noen ganger må vi i tillegg ta hensyn til at koeffisientmatrisen blir singulær for enkelte verdier av disse bokstavene.

Likningssettet $\begin{bmatrix} x + 2y = 0 \\ 3x + \alpha y = 0 \end{bmatrix}$ har helt opplagt en *triviell løsning* $\begin{bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{bmatrix}$. Men kan det være andre løsninger i tillegg?

Vi har altså likningssettet $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dersom koeffisientmatrisen er ikke-singulær kan vi finne svaret ved invertering: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, altså den trivielle løsningen.

Eneste mulighet for andre løsninger er derfor at koeffisientmatrisen er singulær, det vil i dette tilfellet si at $\alpha = 6$. Gauss-eliminasjon gir da: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og vi ser at vi får uendelig mange løsninger. Svaret blir i dette tilfellet: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x = -2y} \\ \boldsymbol{y} \textbf{ velges fritt} \end{bmatrix}$

Eksempel 10.7:

For hvilken verdi av p har likningssettet $\begin{bmatrix} x - 2y = p \\ -3x + 6y = 2 \end{bmatrix}$ løsninger?

Løsning: Totalmatrisen blir $\begin{bmatrix} 1 & -2 & p \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Gauss-eliminasjon gir $\begin{bmatrix} 1 & -2 & p \\ 0 & 0 & 2 + 3p \end{bmatrix}$

Vi ser av dette at dersom $p = -\dfrac{2}{3}$ har likningssettet uendelig mange løsninger.

Dersom $p \neq -\dfrac{2}{3}$ har ikke likningssettet noen løsninger.

Eksempel 10.8:

Undersøk for hvilke verdier av k likningssettet $\begin{bmatrix} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{bmatrix}$ har andre løsninger enn den tri-

vielle, og finn disse løsningene.

Løsning: Etter som vi skal finne løsningene er det like greit å bruke Gauss-eliminasjon med en gang. Ellers kunne vi bare sjekket determinanten til koeffisientmatrisen.

For å få enklest mulig regning lar vi de to øverste likningene bytte plass.

Vi har nå denne koeffisientmatrisen: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$

Trinn 1 gir oss $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & -4 & k-6 & 0 \end{bmatrix}$ og etter trinn 2 står vi igjen med $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \end{bmatrix}$

Vi ser nå at dersom $k = -4$ kan z velges fritt og vi får uendelig mange løsninger.

Svaret blir i så fall $\begin{bmatrix} x = 2z \\ y = -\frac{5}{2}z \\ z \text{ velges fritt} \end{bmatrix}$

Lineær avhengighet

I matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ser vi at vi kan bruke de to kolonnevektorene til å danne nullvektoren:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi sier da at de to kolonnevektorene er *lineært avhengige*.

Det at <u>to</u> vektorer er lineært avhengige betyr geometrisk at de ligger parallelt med hverandre. To ikke-parallelle vektorer kan selvfølgelig ikke brukes til å danne nullvektoren, og vi sier da at de er *lineært uavhengige*. Vi kan lett se om to vektorer er lineært avhengige eller ikke.

Kolonnevektorene i matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ kan også brukes til å danne nullvektoren:

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det at <u>tre</u> vektorer er lineært avhengige betyr geometrisk at de ligger i samme plan. Tre vektorer som ikke ligger i samme plan er lineært uavhengige og kan naturligvis ikke brukes til å danne nullvektoren. Det er <u>ikke</u> så enkelt å se om tre vektorer er lineært avhengige eller uavhengige.

Heldigvis finnes det en metode for å fastslå om kolonnevektorene i en matrise er lineært avhengige, og denne metoden er rett og slett Gauss-eliminasjon. Dersom vektorene er lineært avhengige avsløres dette ved at en (eller flere) rekker i matrisen består av bare nullere når eliminasjonen er fullført.

Vi har i dette avsnittet snakket bare om lineær avhengighet blant kolonnevektorene uten å si noe om rekkevektorene. Vi trenger egentlig ikke bekymre oss noe for dem heller, fordi at dersom kolonnevektorene i en matrise er lineært avhengige, så er også rekkevektorene lineært avhengige.

Eksempel 10.9:

a) Bruk Gauss-eliminasjon til å bestemme om kolonnevektorene i matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 11 & -5 \end{bmatrix}$ er lineært avhengige.

b) Dersom dette er tilfelle: Finn den lineære sammenhengen mellom dem.

Løsning: a) Setter nedre rekke øverst for å få enklere regning: $\begin{bmatrix} 1 & 11 & -5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Trinn 1 gir $\begin{bmatrix} 1 & 11 & -5 \\ 0 & -29 & 13 \\ 0 & -58 & 26 \end{bmatrix}$ og etter trinn 2 har vi $\begin{bmatrix} 1 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{29} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Nederste rekke består av bare nullere, noe som betyr at kolonnevektorene (og dermed også rekkevektorene) i matrisen er lineært avhengige (ligger i samme plan).

b) Vi ønsker å finne en lineær sammenheng mellom kolonnevektorene på formen

$$a \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Her er det naturlig å benytte Gauss-eliminasjon for å finne a, b og c. Dette arbeidet har vi egentlig allerede gjort. Fra den ferdig-gaussede matrisen over ser vi at

$b - \frac{13}{29}c = 0 \Rightarrow b = \frac{13}{29}c$ og at

$a + 11b - 5c = 0 \Rightarrow a = -11 \cdot \frac{13}{29}c + 5c = \frac{2}{29}c$, der c kan velges fritt.

Dette gir: $\frac{2}{29}c \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{13}{29}c \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vi velger $c = 29$ for å få bare heltall, og den lineære sammenhengen kan dermed skrives: $2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 13 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix} + 29 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, noe som vi ser stemmer.

Rangen til en matrise

I eksempel 10.9 ble vi etter Gauss-eliminasjon stående igjen med de tre rekkevektorene $\begin{bmatrix}1 & 11 & -5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1 & -\frac{13}{29}\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Etter som en av disse består av bare nullere betyr dette at rekkevektorene (og kolonnevektorene) i matrisen $\begin{bmatrix}3 & 4 & -2\\5 & -3 & 1\\1 & 11 & -5\end{bmatrix}$ er lineært avhengige.

Vi kan likevel si at denne matrisen består av to lineært uavhengige rekkevektorer (eller kolonnevektorer) på grunn av at vi ble stående igjen med to rekker som <u>ikke</u> besto av bare nullere.

Vi sier da at *rangen* til matrisen er 2.

(Det er fullstendig likegyldig hvilke av vektorene vi betrakter som lineært uavhengige).

På samme måte har matrisen $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$ bare én lineært uavhengig vektor, og rangen til denne matrisen er følgelig lik 1.

Rangen til en matrise er altså lik antall lineært uavhengige vektorer i matrisen.

For alle kvadratiske matriser kan vi dessuten sette opp følgende setning:

Matrise A har lineært avhengige vektorer $\Leftrightarrow$ *Matrise A er singulær*

(Legg merke til at pilen peker begge veier!)

Ut fra eksempel 10.9 må dette bety at $det\begin{bmatrix}3 & 4 & -2\\5 & -3 & 1\\1 & 11 & -5\end{bmatrix} = 0$. Vi kan sjekke dette:

$$\begin{bmatrix}3 & 4 & -2 & 3 & 4\\5 & -3 & 1 & 5 & -3\\1 & 11 & -5 & 1 & 11\end{bmatrix} \Rightarrow det\begin{bmatrix}3 & 4 & -2\\5 & -3 & 1\\1 & 11 & -5\end{bmatrix} = (45 + 4 - 110) - (6 + 33 - 100) = -61 - (-61) = 0$$

En ikke-singulær 3x3-matrise har derfor rang lik 3, mens en singulær 3x3-matrise høyst kan ha rang 2.

Hva slags betydning har begrepet rang når det gjelder løsning av lineære likningssett? Vi kan for eksempel se på et likningssett bestående av 5 likninger med 5 ukjente. Dersom rangen til koeffisientmatrisen er 5 har likningssettet alltid én løsning. Dersom rangen er mindre enn 5, har likningssettet enten ingen eller uendelig mange løsninger. Hvis vi da har uendelig mange løsninger, kan én ukjent velges fritt dersom rangen er 4, to ukjente kan velges fritt dersom rangen er 3, osv.

Eksempel 10.10:

Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$ Bestem $rangA$ for ulike verdier av α og undersøk deretter hvor mange løsninger likningssettet $AX = B$ har for ulike verdier av α og β.

Løsning: Vi setter opp totalmatrisen og begynner å Gauss-eliminere:

Trinn 1 gir: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 8 & -17 & \beta-4 \\ 0 & -6 & 0 & \alpha-5 & -1 \end{bmatrix}$ og etter trinn 2 har vi: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & \beta+6 \\ 0 & 0 & -3 & \alpha-2 & 5 \end{bmatrix}$

Så tar vi det siste trinnet: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & \frac{\beta+6}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-14 & \beta+11 \end{bmatrix}$

Nå ser vi lett at $\alpha = 14 \Rightarrow rangA = 3$ mens $\alpha \neq 14 \Rightarrow rangA = 4$

Ut fra dette resultatet kan vi konkludere med at likningssettet $AX = B$ har én løsning når $\alpha \neq 14$. Dersom $\alpha = 14$ og $\beta = -11$ har vi uendelig mange løsninger (fordi siste rekke gir oss likningen $0x + 0y + 0z + 0u = 0$). Hvis $\alpha = 14$ og $\beta \neq -11$ har ikke likningssettet noen løsninger.

Oppgaver

38. Noen av disse likningssettene kan løses ved å invertere koeffisientmatrisen. Finn ut hvilke likninger dette gjelder og løs disse.

a) $\begin{bmatrix} x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x + 4y - 2z = 4 \\ 2x + 7y - z = -2 \\ 2x + 9y - 7z = 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2x - 7y + 3z = -5 \\ 3x + y - 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 8x - 9y + 7z = 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} x - 2y + z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = 2 \\ -x + 7y - 2z = -3 \\ 2y + 3z = -4 \end{bmatrix}$

39. Bruk matrisealgebra til å finne X av følgende likninger når $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$:

a) $B^{-1}XA = A^2$

b) $B^T(AX)^{-1} = I$

40. Løs resten av likningssettene fra oppgave 38 ved hjelp av Gauss-eliminasjon.

41. To verdier av α gir andre løsninger enn den trivielle på likningssettet

$$\begin{bmatrix} \alpha x - 3y + (1 + \alpha)z = 0 \\ 2x + y - \alpha z = 0 \\ (\alpha + 2)x - 2y + \alpha z = 0 \end{bmatrix}$$

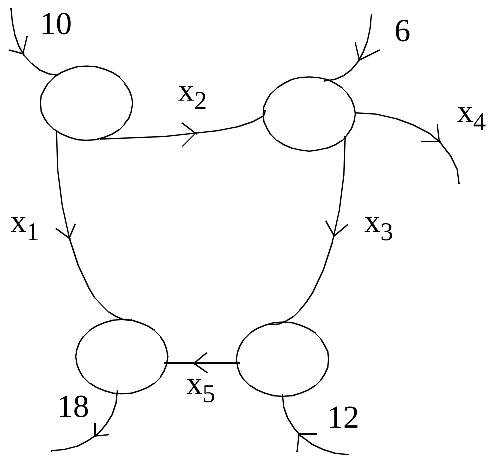
Finn dem og løs likningssettet for disse verdiene av α. Hint: Bruk determinanten!

42. Gitt likningssettet $\begin{bmatrix} x + 3z = -1 \\ 2x + 5y + z = 8 \\ x - 10y + 7z + 6t = 3 \\ 5y - 5z + at = b \end{bmatrix}$, der x,y,z og t er de ukjente mens a og b er variable koeffisienter.

For hvilke verdier av a og b har likningssettet
a) Én løsning?
b) Ingen løsninger?
c) Uendelig mange løsninger?

Oppgaver

43. Figuren viser et nettverk av elver og innsjøer. Tallene angir volumstrømmer i m^3/s. Sett opp et lineært likningssett for de ukjente volumstrømmene $x_1 - x_5$ (en likning for hver innsjø) og løs settet ved hjelp av Gauss-eliminasjon. Angi nedre og øvre skranke for x_5.



44. Undersøk om de tre kolonnevektorene $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}$ er lineært avhengige og bestem i så fall den lineære sammenhengen mellom dem.

45. Gitt matrisen $M = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ -1 & 0 & k-4 & k-1\\ 0 & 1 & -k^2 & 1\end{bmatrix}$

Matrisens rang er avhengig av variabelen k. Benytt Gauss-eliminasjon til å sette opp en fullstendig oversikt over rangen til M for alle verdier av k.

11 Egenverdier og egenvektorer

Definisjon

Vi tar utgangspunkt i en kvadratisk matrise A. Dersom vi kan finne et tall λ og en kolonnevektor v slik at $A \cdot v = \lambda \cdot v$, sier vi at λ er en *egenverdi* til A og v er en *egenvektor* til A.

Hvordan kan vi gå fram for å finne egenverdiene og egenvektorene til en kvadratisk matrise?

Ved å innføre enhetsmatrisen I kan vi gjennomføre følgende resonnement:
$A \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow A \cdot v - \lambda I \cdot v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I) \cdot v = 0$

Det kan vises at denne likningen har ikke-trivielle løsninger bare når $det(A - \lambda I) = 0$

Denne siste likningen kalles den *karakteristiske likningen* til matrisen A og vi tar utgangspunkt i denne når vi skal finne egenverdier og egenvektorer til matrisen.

Dersom A er en 2x2-matrise blir den karakteristiske likningen en andregradslikning som vanligvis vil gi to egenverdier som løsning. Hver av disse egenverdiene har sin egenvektor. Er A derimot en 3x3-matrise, får vi som regel tre egenverdier og tre egenvektorer, én til hver egenverdi.

Det er viktig at de egenvektorene vi finner er lineært uavhengige. Dersom ingen egenverdier er like, vil egenvektorene alltid være lineært uavhengige. Men hvis vi har noen egenverdier som er like, må vi passe på så vi ikke velger egenvektorer som er lineært avhengige. I verste fall må vi da bare kutte ut en egenvektor for å oppfylle kravet om lineær uavhengighet.

Eksempel 11.1:

Finn alle egenverdier og egenvektorer til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

Løsning: Setter først opp matrisen $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 7 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

Den karakteristiske likningen blir $(1-\lambda)(5-\lambda) - 3 \cdot 7 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$

Når vi løser den karakteristiske likningen får vi egenverdiene $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 8$

Må forsøke å finne egenvektoren v_1 til egenverdien $\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda_1 I) \cdot v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Når vi skriver ut likningene får vi $\begin{bmatrix} 3a_1 + 3b_1 = 0 \\ 7a_1 + 7b_1 = 0 \end{bmatrix}$

Begge disse likningene gir samme svar, for eksempel $\begin{bmatrix} a_1 = 1 \\ b_1 = -1 \end{bmatrix}$, noe som betyr at egen-

vektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(Det er egentlig uendelig mange løsninger til likningen, men vi velger alltid en løsning med bare hele tall, og disse tallene skal være så små som mulig.)

Den trivielle løsningen $\begin{bmatrix} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{bmatrix}$ vil alltid være en løsning, men denne er ugyldig fordi $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ikke kan benyttes som egenvektor.

Den andre egenverdien i denne oppgaven var $\lambda_2 = 8$ som gir $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

En løsning på dette er $\begin{bmatrix} a_2 = 3 \\ b_2 = 7 \end{bmatrix}$ som gir egenvektoren $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

Eksempel 11.2:

Finn alle egenverdier og egenvektorer til 3x3-matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Løsning: Setter først opp $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$ og beregner determinanten:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ gir

$$[(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 0 + 2] - [0 + (1-\lambda) - (-1-\lambda)] =$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 - 2 = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

Vi ser dermed lett at egenverdiene er $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \text{ og } \lambda_3 = -1$

$$\lambda_1 = 1 \qquad (A - \lambda_1 I) \cdot v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Øverste og nederste likning gir $b_1 = 2c_1$ og da gir den midtre $a_1 = 3c_1$

Egenvektoren blir dermed $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 2 \qquad (A - \lambda_2 I) \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Midtre likning gir $a_2 = c_2$ og nedre likning gir $b_2 = 3c_2$

Egenvektoren må da bli $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_3 = -1 \qquad (A - \lambda_3 I) \cdot v_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den siste likningen gir $b_3 = 0$ og da gir begge de to andre $a_3 = c_3$ slik at egenvektoren blir $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dersom du har problemer med å se hvordan egenvektorene blir, er det fullt mulig å bruke Gauss-eliminasjon til dette, men det tar selvfølgelig mye lengre tid enn å se det direkte.

Gjentatte egenverdier

I begge eksemplene vi har sett på så langt har vi fått bare ulike egenverdier. Det viser seg at vi må være ekstra forsiktige dersom det skulle vise seg at vi får to like egenverdier.

Eksempel 11.3:

Finn egenverdiene og egenvektorene til 2x2-matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Løsning: Vi starter med å sette opp $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$ som gir

$$det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - (-1) \cdot 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

Den karakteristiske likningen vil i dette tilfelle gi to like λ-verdier til svar: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Vi får da at matrisen $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Likningen $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kan da gi bare én lineært uavhengig løsning, nemlig

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, som da blir den eneste egenvektoren til matrisen A.

Eksempel 11.4:

Finn egenverdiene og egenvektorene til 3x3-matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Løsning: $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -4-\lambda & 3 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ gir $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -6 & -4-\lambda & 3 & -6 & -4-\lambda \\ -4 & -2 & 1-\lambda & -4 & -2 \end{bmatrix}$ og

$$det(A-\lambda I) = [(1-\lambda)^2(-4-\lambda) - 12 - 12] - [4(-4-\lambda) - 6(1-\lambda) - 6(1-\lambda)] =$$

$$[(1 - 2\lambda + \lambda^2)(-4-\lambda) - 24] - [-16 - 4\lambda - 6 + 6\lambda - 6 + 6\lambda] =$$

$$[-4 - \lambda + 8\lambda + 2\lambda^2 - 4\lambda^2 - \lambda^3 - 24] - [8\lambda - 28] = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$$

$$det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ og } \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Her fikk vi altså en enkel og en dobbel egenverdi. Vi prøver å finne en egenvektor for den enkle egenverdien først:

$$(A - \lambda_1 I) \cdot v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det er ikke så enkelt å se hva egenvektorene blir når det ikke er noen 0-ere i $A - \lambda I$-matrisen.

Vi tar derfor en Gauss-eliminasjon først og får $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Så forsøker vi med den doble egenverdien:

$$(A - \lambda_{2,3} I) \cdot v_{2,3} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{2,3} \\ b_{2,3} \\ c_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Her er egentlig alle tre likningene like i og med at Gauss-eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{2,3} \\ b_{2,3} \\ c_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kan vi klare å få to lineært uavhengige egenvektorer ut fra dette likningssettet?

Svaret er JA. En noenlunde sikker måte å finne disse egenvektorene på er først å sette $a_2 = 0$ og deretter $b_3 = 0$. (Hvilke variable som settes lik null kommer vanligvis på ett ut.)

Vi får da følgende egenvektorer: $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

NB! Det er ikke alltid det går an å finne tre lineært uavhengige egenvektorer når to av egenverdiene er like!

Diagonalisering

I kapittel 9 innførte vi bl.a. begrepet diagonalmatrise. En diagonalmatrise er en kvadratisk matrise som har bare nullere utenom hoveddiagonalen. Vi skal fra nå av benytte symbolet D for diagonalmatriser.

Hva vil det si at en matrise kan diagonaliseres? For å forklare dette må vi ta utgangspunkt i en kvadratisk matrise A. Dersom vi kan finne en kvadratisk, ikke-singulær matrise M (modalmatrisen) slik at $M^{-1}AM = D$, har vi diagonalisert matrise A.

De fleste kvadratiske matriser kan diagonaliseres. Kravet for at vi kan diagonalisere en $n \times n$-matrise er at matrisen har n lineært uavhengige egenvektorer. Dette vil si at matrisene i eksempel 11.1, 11.2 og 11.4 kan diagonaliseres, men ikke matrisen i eksempel 11.3.

Men hvordan skal vi greie å finne modalmatrisen M? Dette kan se temmelig håpløst ut, men M er rett og slett den matrisen vi får når vi setter egenvektorene til A etter hverandre!

Dette hørtes kanskje utrolig ut, men vi får teste om det stemmer gjennom noen eksempler.

Eksempel 11.5:

Diagonalisér matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ fra eksempel 11.1.

Løsning: Vi fant i eksempel 11.1 at matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ hadde egenverdiene $\lambda_1 = -2$ med egenvektor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\lambda_2 = 8$ med egenvektor $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

På foregående side ble det påstått at modalmatrisen M består av egenvektorene til A satt etter hverandre. I så fall har vi nå at $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$. Ved å invertere denne får vi at

$$M^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da er tiden inne for å sjekke om de matrisene vi nå har funnet oppfyller likningen $M^{-1}AM = D$, der D er en diagonalmatrise.

$$M^{-1}AM = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -14 & 6 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Det stemte! Og ikke nok med det: Elementene på hoveddiagonalen til D er egenverdiene til A! Dette var heller ingen tilfeldighet, diagonalmatrisen vil alltid ha egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ langs hoveddiagonalen og bare nullere utenom.

Eksempel 11.6:

Kontrollér at likningen $M^{-1}AM = D$ er oppfylt når A er matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ fra eksempel 11.4.

Løsning: I eksempel 11.4 fant vi at A hadde egenverdiene $\lambda_1 = 0$ med egenvektor $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og

$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ med egenvektorene $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Vi får da at $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

For å beregne M^{-1} må vi først finne $detM$:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ gir $detM = (-2+0+3)-(2+0+0) = 1-2 = -1$

Nå føyer vi til de to øverste rekkene nederst og stryker deretter første rekke og første kolonne,

slik at vi står igjen med 4x4-matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ som gir oss $adjM = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Vi får da $M^{-1} = \dfrac{1}{detM} \cdot adjM = \dfrac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(Dersom noe av dette virket litt fjernt, kan du bla tilbake til det som står om inverse matriser i kapittel 9.)

Vi har nå funnet M og M^{-1}, så da gjenstår bare å sjekke om likningen $M^{-1}AM = D$ stemmer:

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Joda, vi fikk en diagonalmatrise, og elementene på hoveddiagonalen er egenverdiene til A.

Eksempel 11.7:

Benytt de matrisene du fant i forrige eksempel til å finne A^{10} når $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Løsning: Vi vet at $M^{-1}AM = D$ og elementær matrisealgebra gir oss da at $A = MDM^{-1}$.

Dermed kan vi sette $A^{10} = MDM^{-1} \cdot MDM^{-1} \cdot \quad \cdot \quad \cdot MDM^{-1} = MD^{10}M^{-1}$ fordi $M^{-1} \cdot M = I$ og derfor kan strykes.

Nå viser det seg at det er veldig greit å beregne D^{10} fordi D er en diagonalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 0^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bare prøv å multiplisere ut selv, så ser du hvorfor!

Vi får nå: $A^{10} = MD^{10}M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Oppgaver

46. Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -6 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

a) Finn rangen til hver av matrisene A, B og C

b) Finn om mulig de inverse matrisene A^{-1}, B^{-1} og C^{-1}

c) Finn egenverdiene til matrisene A, B og C

d) Undersøk om matrisene A, B og C kan diagonaliseres.

47. a) Finn modalmatrisen M til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) Utnytt at A er diagonaliserbar til å vise at $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot 2^n - 3 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

c) Vis at uttrykket for A^n stemmer ved å bruke induksjon. Hint: $A^n \cdot A = A^{n+1}$

48. a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}$

b) Er matrisen A diagonaliserbar? Begrunn svaret.

c) Finn alle egenvektorene til A.

d) Sett opp modalmatrisen M og beregn M^{-1}

e) Kontrollér at $M^{-1}AM = D$

Fasit til oppgavene

Kapittel 1

1. a) 38 b) 102 c) 173

2. a) 1000110 b) 11011110 c) 1111110011

3.

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$r = \bar{p}q$$

4.

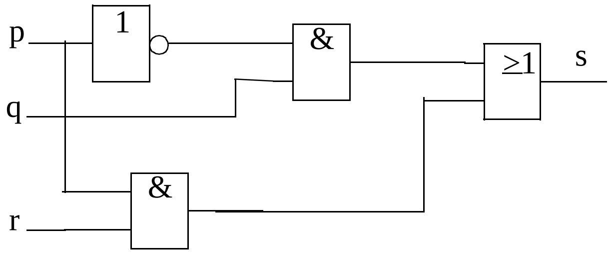
p	q	r	s
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$s = \bar{p}r + \bar{q}$$

5. a) $p + qr$ b) $p\bar{q}$ c) $\bar{p}\bar{q} = \overline{p + q}$

d) $p(q + r)$ e) $\bar{p}\bar{q}r$ f) $p + \bar{q}r$

6.



Kapittel 2

7. a) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{-3, 3\}$ $C = \{-1, 0, 1, 2,3\}$

b) $A \cup B = \{-3, 1, 2, 3\}$ $B \cap C = \{3\}$

$\bar{A} \cap C = \{-1, 0\}$ $A \cap \bar{B} \cap C = \{1,2\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\}$ $\bar{B} \cap (A \cup C) = \{-1,0,1,2\}$

8. a) Riktig b) Galt c) Riktig

9. a) $A \cap B$ b) $\varnothing$ c) A

d) U e) A f) $A \cup (B \cap C)$

10. 5

11. a) 19 b) 225 c) 85

12. 101

Kapittel 3

13.	665280					
14.	a)	120	b)	360		
15.	36000000					
16.	a)	2598960	b)	9216	c)	5148
17.	a)	8008	b)	6846		
18.	a)	10	b)	80	c)	61.9%

Kapittel 4

19.	a)	$12 - 2n$	b)	$32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$	c)	$n^2 + n + 1$	d)	$2^n - 1$
20.	a)	-72	b)	3	c)	978		
21.	2494							
22.	$2^{64} - 1 \approx 1,845 \cdot 10^{19}$							
23.	a)	$x = 3$	590		b)	$x = -\frac{3}{2}$	349525/524288	

Kapittel 5

28.	a)	9	14		b)	$\frac{p^2 - 3p}{2}$

Kapittel 6

29. a) $\{a_n\} = \{1, 1, 0, 0, 0, \dots\} \Rightarrow A(z) = \dfrac{z+1}{z}$

b) $\{b_n\} = \{0, 0, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow B(z) = \dfrac{2z-1}{z(z-1)^2}$

c) $\{c_n\} = \{1, 2, 2, 8, 16, \dots\} \Rightarrow C(z) = \dfrac{z^3-2z+4}{z^2(z-2)}$

d) $\{d_n\} = \{-1, 0, 9, 54, 243, \dots\} \Rightarrow D(z) = \dfrac{z(6-z)}{(z-3)^2}$

e) $\{e_n\} = \left\{8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots\right\} \Rightarrow E(z) = \dfrac{8z}{z-\frac{1}{2}} = \dfrac{16z}{2z-1}$

f) $\{f_n\} = \{0, 0, -6, 0, 0, \dots\} \Rightarrow F(z) = \dfrac{-6}{z^2}$

30. a) $A(z) = \dfrac{z^2-1}{z^3}$ b) $B(z) = \dfrac{z}{z-2}$

c) $C(z) = \dfrac{16z}{2z-3}$ d) $D(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$

e) $E(z) = \dfrac{2}{(z-1)^2}$ f) $F(z) = \dfrac{-2}{z^2(z-2)}$

g) $G(z) = \dfrac{2z^3-3z^2-z+1}{z(z-1)^2}$ h) $H(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z-3)}$

Kapittel 7

31. a) $\{a_n\} = \{5, 0, 0, 1, 3\}$ b) $b_n = \dfrac{1}{3\cdot(-3)^n}$

c) $c_n = \begin{pmatrix} 1 & \text{for } n = 0 \\ 3\cdot(-1)^n & \text{for } n \geq 1 \end{pmatrix}$ d) $d_n = \dfrac{1-(-2)^n}{3}$

e) $e_n = \begin{pmatrix} 0 & \text{for } n = 0 \\ 2-2^{n-1} & \text{for } n \geq 1 \end{pmatrix}$ f) $f_n = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 4\delta_n + 5\delta_{n-1}$

Kapittel 8

32. a) $\{a_n\} = \{4, 16, 52, 160, \dots\} \Rightarrow a_n = 6 \cdot 3^n - 2$

b) $\{b_n\} = \{1, 4, 12, 32, \dots\} \Rightarrow b_n = (n+1)2^n$

c) $\{c_n\} = \{1, 6, 25, 90, \dots\} \Rightarrow c_n = \dfrac{9 \cdot 3^n - 8 \cdot 2^n + 1}{2}$

33. a) $\{a_n\} = \{4, -1, 18, -35, 128, -357, \dots\} \Rightarrow a_n = \dfrac{2n + 5 + 3(-3)^n}{2}$

b) $\{b_n\} = \{0, 0, 1, 1, 5, 5, \dots\} \Rightarrow b_n = \begin{pmatrix} \dfrac{2^n - 1}{3} \text{ for } n = 0, 2, 4, \dots \\ \dfrac{2^n - 2}{6} \text{ for } n = 1, 3, 5, \dots \end{pmatrix}$

Kapittel 9

34. $A \cdot B = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -26 & -28 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ -11 & -41 \end{bmatrix}$

Ut fra dette kan vi si at $A \cdot B = B \cdot A$ ikke gjelder for matriser.

35. a) $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A - C^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B \cdot C = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

$A^T \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad B^T \cdot C$ kan ikke beregnes

b) $(A^T B)C = \begin{bmatrix} 37 & 33 \\ 26 & 36 \\ 29 & 28 \end{bmatrix} \qquad A^T(BC) = \begin{bmatrix} 37 & 33 \\ 26 & 36 \\ 29 & 28 \end{bmatrix}$ Parantesene kan sløyfes.

36. a) $detA = -19$ b) $detB = 130$ c) $detC = -65$

37. a) $A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

b) $B^{-1} = \frac{1}{130}\begin{bmatrix} 22 & 30 & 16 \\ 15 & -15 & 5 \\ 16 & 10 & -12 \end{bmatrix}$

c) $C^{-1} = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} 35 & -5 & 15 \\ -25 & 11 & 6 \\ -10 & 7 & -8 \end{bmatrix}$

Kapittel 10

38. a) $\begin{bmatrix} x = 3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{bmatrix}$

39. a) $X = \begin{bmatrix} 38 & 7 \\ 16 & 3 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

40. b) Ingen løsning d) $\begin{bmatrix} x = \frac{7}{5} - 2z \\ y = \frac{4}{5} - z \\ z \text{ velges fritt} \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} x = \frac{13}{17} \\ y = -\frac{10}{17} \\ z = -\frac{16}{17} \end{bmatrix}$

41. $\alpha = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{1}{7}z \\ y = \frac{5}{7}z \\ z \text{ velges fritt} \end{bmatrix}$ $\alpha = -6 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = -\frac{1}{2}y \\ y \text{ velges fritt} \\ z = 0 \end{bmatrix}$

42. a) $a \neq 0$ b) $a = 0$ $b \neq 10$ c) $a = 0$ $b = 10$

43. $\begin{bmatrix} x_1 = 18 - x_5 \\ x_2 = x_5 - 8 \\ x_3 = x_5 - 12 \\ x_4 = 10 \\ x_5 \text{ velges fritt} \end{bmatrix}$ $\quad x_5 \in [12, 18]$

44. Lineært avhengig: $3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

45. $k \neq \pm 1$: rang=4 $\quad k = 1$: rang=3 $\quad k = -1$: rang=2

Kapittel 11

46. a) $rangA = 2 \quad rangB = 1 \quad rangC = 2$

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

B og C kan ikke inverteres

c) Matrise A: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Matrise B: $\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 7$

Matrise C: $\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = -1 \vee \lambda_3 = -2$

47. a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) A kan ikke diagonaliseres, men B og C kan diagonaliseres.

48. a) $\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -1$

b) Ja. Egenverdiene er forskjellige.

c) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Stikkordregister

H

I

K

L

M

O

R