Kompendium

Derivasjon og differensiallikninger

Anton Bjartnes

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Kompendium

Steinkjer 2005

Derivasjon og differensiallikninger

Anton Bjartnes

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Kompendium
Avdeling for sykepleier-, ingeniør- og lærerutdanning
ISBN 82-7456-442-1
Steinkjer 2005

Forord

Denne boka omhandler for det meste sentralt stoff innenfor fagområdene derivasjon, integrasjon og differensiallikninger. I tillegg er det innledningsvis et kapittel om komplekse tall samt en del repetisjonsstoff fra videregående skole.

Etter hvert kapittel kommer to sider med oppsummerende oppgaver. Den første siden er oppgaver som inngår i de obligatoriske øvingene. Fasitsvar til disse står bakerst i boka. Den andre siden består av ekstraoppgaver som det foreløbig ikke foreligger fasit på.

Sidetallet i boka er forholdsvis lavt, det er tross alt begrenset hvor mye en rekker å skrive i løpet av kort tid. Men det er også lettere å få fram det som er viktig om en hopper over det som ikke er så viktig! Hvis dere likevel ønsker tilleggslitteratur finnes det masse bøker som omhandler mye av det samme stoffet, både norske og utenlandske. Det er bare å spørre om dere vil ha råd angående valg av tilleggslitteratur.

Levanger, 6. desember 2005

Anton Bjartnes

Innholdsfortegnelse

1 Komplekse tall

Andregradslikninger

En andregradslikning kan alltid skrives på formen $ax^2 + bx + c = 0$. Slike likninger kan løses ved hjelp av abc-formelen. Den ser slik ut: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, og bør være kjent fra tidligere. Tegnet $\pm$ betyr at vi kan få to løsninger på denne typen likninger.

Eksempel 1.1:

Løs andregradslikningen $3x^2 + 5x - 2 = 0$ ved hjelp av abc-formelen.

Løsning: Her er $a = 3, b = 5$ og $c = -2$

Vi får da: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - (-24)}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}} \vee \mathbf{-2}$

Vi kan sette prøve på likningen for å være helt sikker på at vi har regnet riktig:

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 = 0$ OK!

$x = -2 \Rightarrow 3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 2 = 12 - 10 - 2 = 0$ OK!

Det er innholdet i rotuttrykket i abc-formelen som bestemmer hvor mange løsninger vi får:

Vi får to løsninger når $b^2 - 4ac > 0$

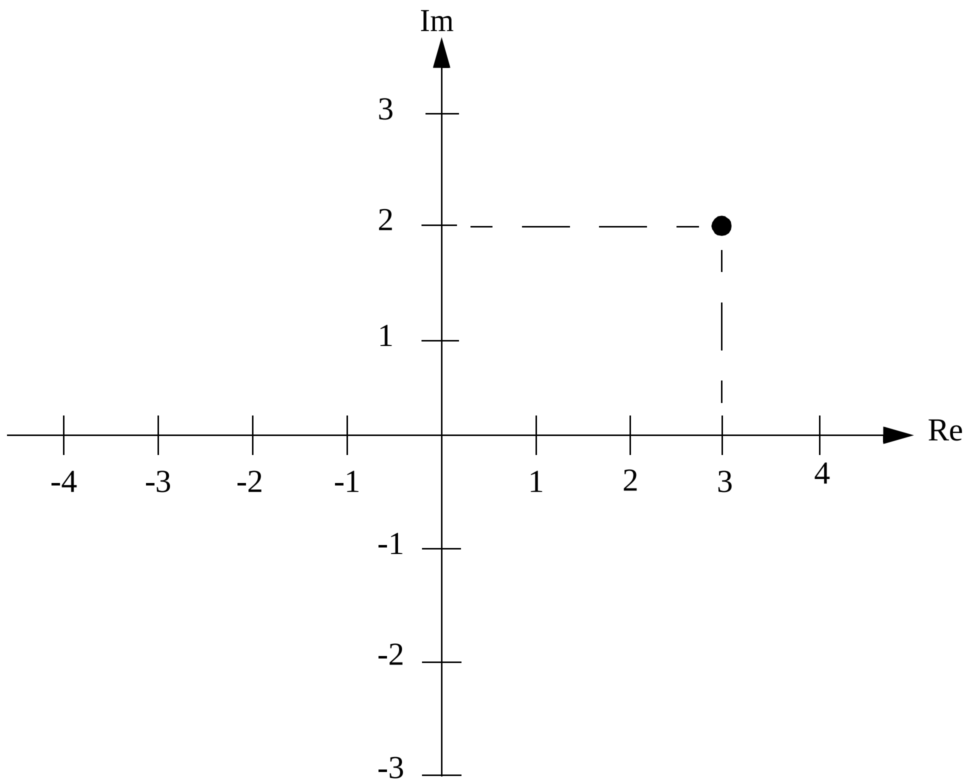
Vi får én løsning når $b^2 - 4ac = 0$

Vi får ingen løsninger når $b^2 - 4ac < 0$

Vi skal i dette kapitlet utvide vår tallverden slik at vi også kan finne løsninger når $b^2 - 4ac < 0$. Vi må da ty til den tallmengden som er kjent som de *komplekse* tallene.

Komplekse tall på rektangulær form

På barneskolen lærte vi om tall-linjen, en uendelig lang linje som inneholder alle reelle tall. Nå skal vi utvide tallbegrepet til også å omfatte tall som ligger utenfor tall-linjen. Det er disse tallene som kalles komplekse tall.



I figuren over er den horisontale aksen den gode gamle tall-linjen. Den skal nå hete *den reelle aksen*. Den vertikale skal vi kalle *den imaginære aksen*. Hele koordinatsystemet er *det komplekse plan*.

Punktet som er avmerket i koordinatsystemet ligger to enheter over tallet 3 på den reelle aksen. Dette punktet representerer derfor det komplekse tallet $3 + j2$, der 3 er *realdelen* og 2 *imaginærdelen* til tallet. Denne skrivemåten for komplekse tall kalles *rektangulær form*. Operatoren j skal vi matematisk behandle som $\sqrt{-1}$, et komplekst tall, noe som altså medfører at vi fjerner oss fra den reelle aksen og beveger oss vertikalt i koordinatsystemet.

Innføringen av tallet j gjør oss i stand til å løse andregradslikninger der innholdet i rottegnet blir negativt.

Eksempel 1.2:

Løs andregradslikningen $x^2 - 4x + 13 = 0$ ved bruk av $j = \sqrt{-1}$.

Løsning: Ved bruk av abc- eller pq-formel for andregradslikninger fås følgende løsning på ligningen: $x = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = \mathbf{2 \pm j3}$. Vi får altså to svar, begge med realdel 2, mens imaginærdelen er henholdsvis 3 og -3.

Eksempel 1.3:

Forenkle uttrykket $j^3 - 2j^2 + 2j - 1$ mest mulig.

Løsning: I og med at $j = \sqrt{-1}$ blir $j^2 = -1$ (altså reelt) og $j^3 = j^2 \cdot j = -j$ (komplekst igjen). Uttrykket blir da: $-j + 2 + 2j - 1 = \mathbf{1 + j}$

Kompleks konjugert

Anta at vi har et komplekst tall $z = a + jb$. Det kompleks konjugerte tallet til z skrives $\bar{z}$ og er definert som $\bar{z} = a - jb$, altså samme realdel, men motsatt fortegn på imaginærdelen. Når vi løser en andregradslikning og får komplekse løsninger er alltid de to løsningene kompleks konjugerte av hverandre (jfr. eksempel 1.2).

Eksempel 1.4:

Beregn summen og produktet av de komplekse løsningene fra eksempel 1.2.

Løsning: Summen: $(2 + j3) + (2 - j3) = 2 + 2 + j3 - j3 = \mathbf{4}$

Produktet: $(2 + j3) \cdot (2 - j3) = 4 - j6 + j6 - j^2 9 = 4 + 9 = \mathbf{13}$

I dette eksemplet så vi at begge svarene ble reelle tall. Dette var ingen tilfeldighet. Summen og produktet av kompleks konjugerte tall blir *alltid* reelle tall.

I addisjons- og subtraksjons-beregninger må vi addere/subtrahere realdelene for seg og imaginærdelene for seg. Ved multiplikasjon følges vanlige regler for multiplikasjon av paranteser. Divisjon er noe verre. Her løser vi problemet med å multiplisere både teller og nevner med den konjugerte av nevneren. Med dette oppnår vi, som tidligere nevnt, at nevneren blir reell og det blir da enkelt å finne svaret.

Eksempel 1.5:

Gitt de to komplekse tallene $z_1 = 3 + j2$ og $z_2 = 2 - j$.

Beregn a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

Løsning: a) $(3 + j2) + (2 - j) = 3 + 2 + j2 - j = \mathbf{5 + j}$

b) $(3 + j2) - (2 - j) = 3 - 2 + j2 + j = \mathbf{1 + j3}$

c) $(3 + j2) \cdot (2 - j) = 6 - j3 + j4 - j^2 2 = \mathbf{8 + j}$

d) $$\frac{3 + j2}{2 - j} = \frac{(3 + j2) \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} = \frac{6 + j3 + j4 + j^2 2}{4 + j2 - j2 - j^2} = \mathbf{\frac{4 + j7}{5}}$$

Eksempel 1.6:

Gitt det komplekse tallet $z = -2 + j5$

Beregn a) z^2 b) $\frac{1}{z}$ c) $z^3 - 2\bar{z}$ d) $\frac{\overline{z + 1}}{z}$

Løsning:

a) $$z^2 = (-2 + j5) \cdot (-2 + j5) = 4 - j10 - j10 + j^2 25 = \mathbf{-21 - j20}$$

b) $$\frac{1}{z} = \frac{1}{-2 + j5} = \frac{-2 - j5}{(-2 + j5) \cdot (-2 - j5)} = \frac{-2 - j5}{4 + j10 - j10 - j^2 25} = \mathbf{\frac{-2 - j5}{29}}$$

c) $$z^3 - 2\bar{z} = z^2 \cdot z - 2\bar{z} = (-21 - j20) \cdot (-2 + j5) - 2(-2 - j5)$$

$$= 42 - j105 + j40 - j^2 100 + 4 + j10 = \mathbf{146 - j55}$$

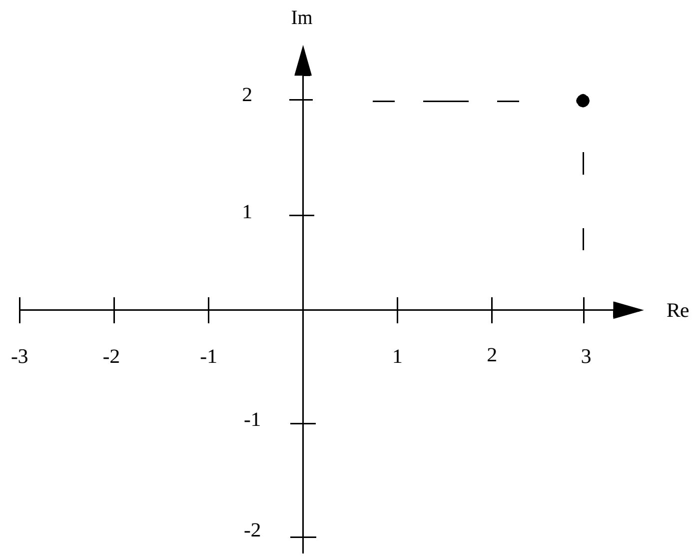
d)

$$\frac{\overline{z + 1}}{z} = \frac{\overline{-1 + j5}}{-2 + j5} = \frac{-1 - j5}{-2 + j5} \cdot \frac{-2 - j5}{-2 - j5} = \frac{2 + j5 + j10 + j^2 25}{4 - j^2 25} = \mathbf{\frac{-23 + j15}{29}}$$

Komplekse tall på formen $z = a + jb$ er som tidligere nevnt skrevet på *rektangulær form*. Vi skal straks lære oss to nye måter å representere komplekse tall på. Dette vil gjøre komplekse tall svært anvendelige innenfor flere grener av matematikken.

Komplekse tall på polar form

Vi tar nå en ny kikk på det komplekse tallet $z = 3 + j2$:



Dette tallet kan (foruten den rektangulære skrivemåten $z = 3 + j2$) også beskrives ved hjelp av tallverdi og fasevinkel. *Tallverdien* til et komplekst tall er avstanden r fra origo og *fasevinkelen* φ måles i forhold til positiv reell akse. Definisjonsområdet for fasevinkelen φ er $D_\varphi = \langle -\pi, \pi]$

Tallet $z = 3 + j2$ har altså tallverdien $r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ og fasevinkelen $\varphi = arc\tan\frac{2}{3} \approx 0{,}588 rad$. Vi kan da slå fast at det komplekse tallet $z = 3 + j2$ like gjerne kan skrives som $z = \sqrt{13} \cdot \cos 0{,}588 + j\sqrt{13} \cdot \sin 0{,}588 = \sqrt{13}(\cos 0{,}588 + j\sin 0{,}588)$. Det er altså denne siste skrivemåten som kalles *polar form*. Komplekse tall på polar form er spesielt nyttig når vi skal regne med sinusformete vekselstrømmer.

Dersom trigonometriske funksjoner har gått mer eller mindre i glemmeboken kan det være en trøst at de aller fleste kalkulatorene er flinke til å regne om mellom rektangulær og polar form. De tastene som benyttes til dette er ofte $R \to P$ og $P \to R$.

I noen lærebøker kalles denne nye skrivemåten $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ for trigonometrisk form. Kanskje ikke direkte ulogisk?

Under beregninger med komplekse tall kan det ofte være en fordel å kjenne til noen eksakte verdier for sinus og cosinus. De nødvendigste verdiene er gitt av denne tabellen:

x(°)	0	30	45	60	90
x(rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sinx	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosx	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tanx	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Når disse er kjent, kan vi finne ytterligere verdier ved hjelp av symmetribetraktninger.

Eksempel 1.7:

Skriv om følgende komplekse tall fra polar til rektangulær form:

a) $z = 3(\cos 1 - j\sin 1)$ b) $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Løsning: a) Her er det bare å multiplisere ut på vanlig måte: $z \approx \mathbf{1,\ 621 - \mathit{j}2,\ 524}$

b) $z = 3\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + j3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{-3 + \mathit{j}3}$

Eksempel 1.8:

Skriv om følgende komplekse tall fra rektangulær til polar form:

a) $z = 2 - j5$ b) $z = -1 - j3$

Løsning: a)$R \to P$ på kalkulatoren gir $r = 5,\ 385$ og $\varphi \approx -1{,}190 rad$

Det er enkelt å finne eksakt verdi for r: $r = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$, slik at vi får:

$z = 2 - j5 = \sqrt{29}[\cos(-1{,}190) + j\sin(-1{,}190)] = \mathbf{\sqrt{29}(\cos 1{,}190 - \mathit{j}\sin 1{,}190)}$

Her ble de trigonometriske setningene $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$ benyttet.

b) $R \to P$ gir svarene $r \approx 3,\ 162$ og $\varphi \approx -1{,}893 rad$. Eksaktverdien for r blir

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ og svaret blir da:

$z = -1 - j3 = \sqrt{10}[\cos(-1,\ 893) + j\sin(-1,\ 893)] = \mathbf{\sqrt{10}(\cos 1,\ 893 - \mathit{j}\sin 1,\ 893)}$

I eksempel 1.7 så vi at omregningen gikk veldig raskt selv om vi ikke benyttet $P \to R$ på kalkulatoren.
Da er det mye større grunn til å benytte $R \to P$ når vi går motsatt vei (eksempel 1.8). Grunnen til dette er at vi får feil vinkel når vi benytter oss av $inv\tan$ dersom vår vinkel ligger i venstre halvplan.
Vi skal nå lære en tredje skrivemåte for komplekse tall (eksponentiell form) som gjør at vi forstår litt mer av poenget med den polare formen(!)

Komplekse tall på eksponentiell form

Den sveitsiske matematikeren Leonhard Euler (1707-1783) fant (i tillegg til andre oppsikts-vekkende resultater) den sammenhengen som vi i dag kjenner som Eulers formel:

$$\boxed{e^{jx} = \cos x + j\sin x} \tag{1.1}$$

Legg merke til at høyresiden er et komplekst tall skrevet på trigonometrisk form. Venstre-siden er det samme komplekse tallet skrevet på *eksponentiell form*.

Denne formelen forenkler multiplikasjon og divisjon med komplekse tall en hel del.

Eksempel 1.9:

Forenkle uttrykket $\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ved å benytte Eulers formel.

Løsning: Begge parentesene kan skrives om ved hjelp av Euler:

$\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = e^{j\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{j\frac{\pi}{2}}$ Vi benytter nå

Euler på nytt for å komme tilbake til trigonometrisk form: $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$

Vi ser nå at dette uttrykket rett og slett blir $0 + j1 = \boldsymbol{j}$

Eksempel 1.10:

Forenkle uttrykket $6\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)/2\left(\cos\frac{\pi}{4}-j\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ved hjelp av Euler.

Løsning: $$\frac{6\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}-j\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{6e^{j\frac{\pi}{6}}}{2e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = 3e^{j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = 3e^{j\frac{5\pi}{12}} = \mathbf{3\left(\cos\frac{5\pi}{12}+j\sin\frac{5\pi}{12}\right)}$$

Eksempel 1.11:

Bruk resultatet fra forrige eksempel til å utlede eksakte verdier for $\cos\frac{5\pi}{12}$ og $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Løsning: Ved hjelp av Eulers formel fant vi at $$\frac{6\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}-j\sin\frac{\pi}{4}\right)} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{12}+j\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

Vi kan forsøke å skrive venstresiden på rektangulær form for å finne eksaktverdiene for $\cos\frac{5\pi}{12}$ og $\sin\frac{5\pi}{12}$:

$$\frac{6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}+j}{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{\sqrt{2}+j\sqrt{2}} = 3\cdot\frac{\sqrt{6}+j\sqrt{6}+j\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2+2}$$

$$= 3\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+j\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

Ut fra dette kan vi konkludere med at $\cos\frac{5\pi}{12} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ og at $\sin\frac{5\pi}{12} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

Eksempel 1.12:

Addér tallene $2e^{j\frac{\pi}{6}} + 3e^{j2}$ og angi svaret på både rektangulær og polar form.

Løsning: Her skal vi addere to komplekse tall. Da er det enklest å skrive tallene på rektangulær form:

$$2e^{j\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + j$$

(Her er det en fordel å kjenne eksaktverdiene til $\cos\frac{\pi}{6}$ og $\sin\frac{\pi}{6}$)

$$3e^{j2} = 3(\cos 2 + j\sin 2) \approx 3(-0,416 + j0,909) \approx -1,248 + j2,728$$

Summen blir da: $\sqrt{3} + j - 1,248 + j2,728 \approx \mathbf{0,484 + j3,728}$

På polar form skulle dette bli tilnærmet $\mathbf{3,759\angle 1,442}$ $(R \to P)$

Eksempel 1.13:

Finn $(1-j)^{10}$ ved hjelp av Euler.

Løsning: Skriver først om til eksponentiell form: $1 - j = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Dette gir:

$$(1-j)^{10} = \left[\sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{10} = \sqrt{2}^{10} \cdot e^{j\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = 2^5 \cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{-j32}$$

Her har vi blant annet benyttet at e^{jx} er periodisk med periode 2π.

Oppgaver

1. Løs likningen $x^2 + 4x + 13 = 0$

2. Forenkle uttrykkene:

a) $(5 + j3) \cdot (2 - j) - (3 + j)$ b) $\dfrac{11 + j2}{3 - j4}$

3. Konvertér følgende komplekse tall fra polar til rektangulær form:

a) $z = \sqrt{3}\angle -2$ b) $z = 6\angle\dfrac{\pi}{3}$

4. Konvertér følgende komplekse tall fra rektangulær til polar form:

a) $z = -3 + j5$ b) $z = -2 - j2\sqrt{3}$

5. Regn ut og skriv svaret på eksakt polar form:

a) $\dfrac{4 - j8}{1 + j3}$ b) $2\angle\dfrac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\angle\dfrac{\pi}{2}$

6. Finn de komplekse løsningene til likningen $2x^2 - 3x + 2 = 0$ og skriv svaret på polar form.

Ekstraoppgaver

E1. Forenkle uttrykket $z = \frac{3+j}{2-j} + \frac{(1-j)(2+j3)}{j5}$ mest mulig på rektangulær form.

E2. Finn tallverdien til det komplekse tallet som har realdel 2 og vinkel $\frac{\pi}{3}$.

E3. Finn det komplekse tallet z som oppfyller likningene:

a) $\frac{2z}{1+j} - \frac{2z}{j} = \frac{5}{2+j}$ b) $\frac{1}{z} = \frac{2}{2+j3} + \frac{1}{3-j2}$ c) $\frac{2+\bar{z}}{2z+\bar{z}} = 1+j2$

E4. Gitt $z_1 = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$ og $z_2 = -j2$.

a) Skriv begge tallene både på polar og eksponentiell form.

b) Benytt den eksponentielle skrivemåten til å beregne kvotienten $\frac{z_2}{z_1}$.

c) Beregn den samme kvotienten på rektangulær form og vis at svaret er det samme som i b).

E5. Gitt $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ og $z_2 = 1 - j$. Bestem $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6$ på rektangulær form!

E6. Skriv det komplekse tallet $z = \frac{6+6j}{(3-j\sqrt{3})^2}$ på

a) Eksakt rektangulær form
b) Eksakt polar form (Gå veien om eksponentiell form)
c) Bruk resultatene fra a) og b) til å bestemme de eksakte verdiene av $\cos\frac{7\pi}{12}$ og $\sin\frac{7\pi}{12}$

E7. Finn tallverdien til det komplekse tallet $z = \frac{(\sqrt{3}-j)^5}{1+j2}$

E8. Finn $\sqrt{j}$ på rektangulær form og kontrollér svaret ved å opphøye i andre.

2 Generelt grunnlag

Tredjegradslikninger

I starten på det første kapitlet så vi at en andregradslikning kan ha ingen, en eller to løsninger. Når likningen er av tredje grad, kan vi ha opp til tre løsninger. Vi er avhengige av at vi ser den ene løsningen for at vi skal kunne greie å finne de to andre.

Vi kan for eksempel se på likningen $x^3 + 4x^2 + x - 26 = 0$ Når vi skal "se" en løsning betyr det at vi setter inn en heltallsverdi i stedet for x og sjekker om likningen stemmer. Det er naturlig å prøve med enkle tall som 1, -1, 2 osv. helt til vi får klaff. Her stemmer det dårlig helt til vi forsøker $x = 2$. Vi får da: $2^3 + 4 \cdot 2^2 + 2 - 26 = 8 + 16 + 2 - 26 = 0$

Vi har da funnet en løsning: $x = 2$. Og siden $x^3 + 4x^2 + x - 26 = 0$ for $x = 2$, må $x - 2$ være en faktor i $x^3 + 4x^2 + x - 26$! Vi kan nå faktorisere $x^3 + 4x^2 + x - 26$ ved å foreta polynomdivisjonen $(x^3 + 4x^2 + x - 26) \div (x - 2)$ Dette er omtrent som et vanlig divisjons-stykke, med den forskjellen at vi må regne med en ukjent størrelse (x).

Når vi dividerte med bare tall, kunne et divisjonsstykke se slik ut:

$$
\begin{array}{l}
22528 : 31 = 726 \\
\underline{217} \\
\,828 \\
\,\underline{62} \\
\,208 \\
\,\underline{186} \\
\,22
\end{array}
$$

Vi fant altså at $22528 \div 31 = 726\frac{22}{31}$

Vi bruker nøyaktig samme prinsipp når vi polynomdividerer. Vi forsøker:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 4x^2 + x - 26) \div (x - 2) = x^2 + 6x + 13 \\
\underline{\;x^3 - 2x^2\;} \\
6x^2 + x - 26 \\
\underline{6x^2 - 12x} \\
\;13x - 26 \\
\underline{13x - 26}
\end{array}
$$

Vi har nå funnet ut at $x^3 + 4x^2 + x - 26 = (x - 2) \cdot (x^2 + 6x + 13)$

Det gjenstår da bare å finne løsningene til likningen $x^2 + 6x + 13 = 0$

abc-formelen gir: $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2}$, som betyr at denne likningen ikke har noen reelle løsninger.

Vi må da konkludere med at $x^3 + 4x^2 + x - 26 = 0$ har bare en reell løsning, nemlig $x = 2$

Eksempel 2.1:

Finn alle løsningene til tredjegradslikningen $4x^3 - 21x^2 + 2x + 15 = 0$

Løsning: Først må vi prøve å “se” en løsning. $x = 1$ gir $4 - 21 + 2 + 15 = 0$ Bingo!

Vi må derfor polynomdividere med $x = 1$ for å få faktorisert uttrykket:

$$
\begin{array}{l}
(4x^3 - 21x^2 + 2x + 15) \div (x - 1) = 4x^2 - 17x - 15 \\
\underline{\;\; 4x^3 - 4x^2 \;\;} \\
-17x^2 + 2x + 15 \\
\underline{-17x^2 + 17x} \\
\;\; -15x + 15 \\
\underline{-15x + 15}
\end{array}
$$

Da vet vi at $4x^3 - 21x^2 + 2x + 15 = (x - 1) \cdot (4x^2 - 17x - 15)$

Må nå finne løsningen til $4x^2 - 17x - 15 = 0$:

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 240}}{8} = \frac{17 \pm 23}{8} = 5 \vee -\frac{3}{4}$$

Da har vi alle tre løsningene: $\mathbf{x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -\frac{3}{4}}$

Merk at framgangsmåten er den samme dersom vi skal *faktorisere* $4x^3 - 21x^2 + 2x + 15$, men vær klar over at tallet foran x^3-leddet da må være med i tillegg. Vi har altså at

$$4x^3 - 21x^2 + 2x + 15 = 4(x-1)(x-5)\left(x + \frac{3}{4}\right) = (x-1)(x-5)(4x+3)$$

Delbrøksoppspalting

Dette er en teknikk som ofte benyttes i forbindelse med integrasjon eller transformasjon av brøkuttrykk. I faget Diskret matematikk og lineær algebra brukte vi den såkalte kjappmetoden når vi skulle foreta invers z-transform. Denne metoden kan alltid benyttes når nevneren består av et antall ulike førstegradsfaktorer. Dersom kjappmetoden har gått i glemmeboka, må den repeteres umiddelbart!

Dersom brøkuttrykket som skal spaltes opp består av andregradsuttrykk, blir oppspaltingen noe mer arbeidskrevende. Vi kan se på uttrykket $\dfrac{19x+9}{(x-4)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

Legg merke til at telleren over andregradsuttrykket blir et førstegradsuttrykk og ikke bare et enkelt tall!

Konstanten A kan finnes ved hjelp av kjappmetoden fordi den står over en førstegradsfaktor:

$$A = \frac{19 \cdot 4 + 9}{4^2 + 1} = \frac{85}{17} = 5$$

Ved å sette hele uttrykket på felles brøkstrek får vi nå

$$\frac{5x^2 + 5 + Bx^2 - 4Bx + Cx - 4C}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{19x+9}{(x-4)(x^2+1)}$$

Vi kan nå finne konstantene B og C ved å sette opp en likning for x^2-leddene, en likning for x-leddene og en likning for konstantleddene. Vi får da: $\begin{bmatrix} 5 + B = 0 \\ C - 4B = 19 \\ 5 - 4C = 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B = -5 \\ C = -1 \end{bmatrix}$

(Første likning gir $B = -5$ og den siste $C = -1$. Den midtre likningen må selvfølgelig også stemme, og vi bruker derfor denne som kontroll på at vi har regnet riktig: $-1 + 20 = 19$)

Da kan vi puste lettet ut og konkludere med at

$$\frac{19x+9}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{5}{x-4} + \frac{-5x-1}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{5}{x-4} - \frac{5x+1}{x^2+1}}$$

Eksempel 2.2:

Delbrøksoppspalt uttrykket $\dfrac{2x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 10x}$

Løsning: Må først faktorisere nevneren: $x^3 + 3x^2 + 10x = x(x^2 + 3x + 10)$

Det er ikke mulig å faktorisere $x^2 + 3x + 10$, og vi kan derfor ikke benytte kjappmetoden på denne del-brøken.

Vi får da: $\dfrac{2x^2 - 5}{x(x^2 + 3x + 10)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 3x + 10}$

Husk for all del på at det blir førstegradsuttrykk i teller når vi har andre grad i nevner!

Vi kan også her finne konstanten A ved hjelp av kjappmetoden: $A = \dfrac{-5}{10} = -\dfrac{1}{2}$

Så setter vi hele uttrykket på felles brøkstrek og får:

$$\frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 5 + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 3x + 10)} = \frac{2x^2 - 5}{x(x^2 + 3x + 10)}$$

Likningene blir slik: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + B = 2 \\ -\frac{3}{2} + C = 0 \\ -5 = -5 \end{bmatrix}$

(Den siste likningen sier oss ikke så mye, men hvis den ikke stemmer har vi gjort en feil!)

Vi finner nå at $B = \dfrac{5}{2}$ og $C = \dfrac{3}{2}$, noe som betyr at $\dfrac{2x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 10x} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x} + \dfrac{\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2 + 3x + 10}$

Vi begynner å beherske delbrøksoppspalting ganske bra etter hvert. Det er imidlertid et par ting til vi må kjenne til. Det ene er hvordan vi skal gå fram når vi har gjentatte førstegrads-faktorer i nevneren, for eksempel $(x - 2)^2$. Vi skal da venne oss til å beregne en delbrøk for faktoren i andre og en for faktoren i første, altså $\dfrac{A}{(x - 2)^2} + \dfrac{B}{x - 2}$. Hvordan dette skal gjøres i praksis, er vist i eksemplet på neste side.

Eksempel 2.3:

Delbrøksoppspalt uttrykket $\dfrac{x^2 + x + 3}{(x+1)(x-2)^2}$

Løsning: Her har vi en dobbel førstegradsfaktor i nevneren, og i følge oppskriften nederst på forrige side må delbrøksoppspaltingen da bli slik: $\dfrac{x^2 + x + 3}{(x+1)(x-2)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x-2)^2} + \dfrac{C}{x-2}$

Først beregner vi A ved hjelp av kjappmetoden: $A = \dfrac{1 - 1 + 3}{(-3)^2} = \dfrac{1}{3}$

Når vi nå skal sette hele uttrykket på felles brøkstrek, må vi være litt på vakt. Husk på at fellesnevneren skal være $(x+1)(x-2)^2$!

Vi får da:

$$\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{\frac{1}{3}(x-2)^2 + B(x+1) + C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} + Bx + B + Cx^2 - Cx - 2C}{(x+1)(x-2)^2}$$

Dette gir disse likningene: $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} + C = 1 \\ -\frac{4}{3} + B - C = 1 \\ \frac{4}{3} + B - 2C = 3 \end{bmatrix}$

Den første likningen gir $C = \dfrac{2}{3}$ og da fører den andre til at $B = 1 + \dfrac{4}{3} + C = 3$

Den siste likningen kan vi nå benytte som kontroll: $\dfrac{4}{3} + 3 - \dfrac{4}{3} = 3$ Heldigvis! Da slipper vi å regne alt sammen på nytt!

Svaret blir altså: $\dfrac{x^2 + x + 3}{(x+1)(x-2)^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{1}{3}}{x+1} + \dfrac{3}{(x-2)^2} + \dfrac{\frac{2}{3}}{x-2}}$

Da gjenstår det bare en ting til før vi kan si at vi behersker delbrøksoppspalting til fulle: Når graden i teller er *lik eller større* enn graden i nevner, må vi foreta polynomdivisjon til vi står igjen med et uttrykk der graden i teller er mindre enn graden i nevner.

Eksempel 2.4:

Delbrøksoppspalt uttrykket $\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$

Løsning: Her ser vi at graden i teller er større enn graden i nevner. Vi må da foreta polynomdivisjon før vi delbrøksoppspalter:

$$(x^3 + 2x) \div (x^2 - 5x + 6) = x + 5 + \frac{21x - 30}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 - 5x^2 + 6x} \\ \quad 5x^2 - 4x \\ \underline{5x^2 - 25x + 30} \\ \quad 21x - 30 \end{array}$$

Vi må med andre ord delbrøksoppspalte uttrykket

$$\frac{21x - 30}{x^2 - 5x + 6} = \frac{21x - 30}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Kjappmetoden gir: $A = \dfrac{42 - 30}{2 - 3} = -12$ og $B = \dfrac{63 - 30}{3 - 2} = 33$

Vi kan da konkludere med at $\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \mathbf{x + 5 - \dfrac{12}{x-2} + \dfrac{33}{x-3}}$

Oppgaver

7. Løs likningene:

a) $x^3 - 19x + 30 = 0$ b) $x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$

8. Delbrøksoppspalt uttrykkene:

a) $\dfrac{2x}{x^2 + 4x - 5}$ b) $\dfrac{5x + 6}{(x - 2)(x^2 + 4)}$

c) $\dfrac{3x^2 + 13x - 2}{(x + 1)^2(x - 3)}$ d) $\dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 2x}$

Ekstraoppgaver

E9. Faktorisér uttrykkene:

a) $x^2 - 5x + 4$

b) $3x^2 - 8x - 16$

c) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

d) $5x^3 - 12x^2 + 17$

E10. Delbrøksoppspalt følgende uttrykk:

a) $\dfrac{3x - 2}{x^2 - 5x + 4}$

b) $\dfrac{6x^2}{3x^2 - 8x - 16}$

c) $\dfrac{12x^2 - 1}{x^3 - 7x^2 + 7x + 15}$

d) $\dfrac{x^4 - 3x^2 + 7}{5x^3 - 12x^2 + 17}$

3 Funksjoner

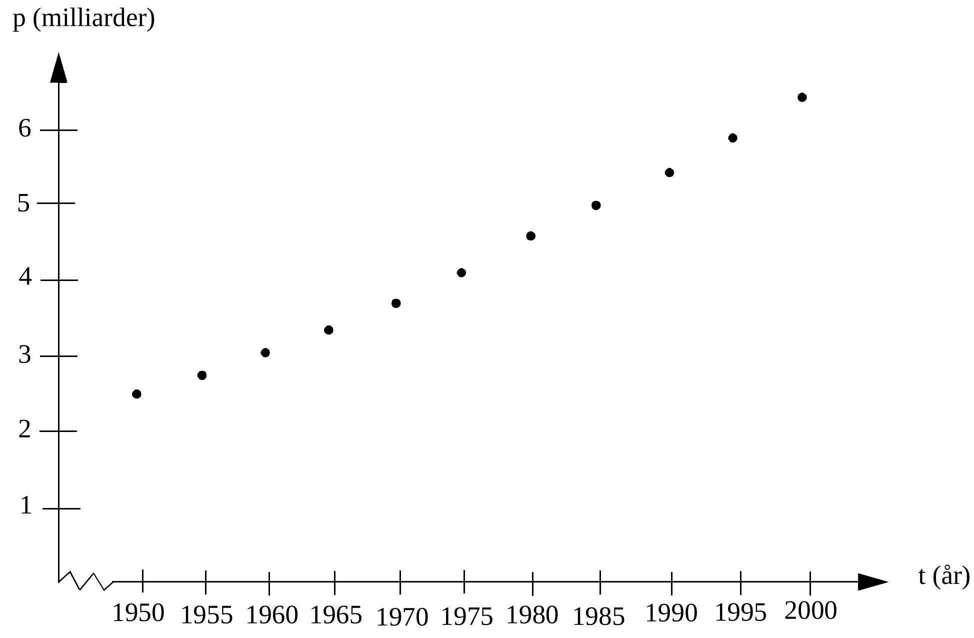
Grafer

En graf er en kurve som angir sammenhengen mellom to størrelser. Det er vanlig å tegne grafer i et koordinatsystem bestående av to akser. Dersom vi ønsker å illustrere jordas befolkningsvekst på siste halvdel av 1900-tallet, kan vi markere årstall på den ene aksen og folketall på den andre. La oss anta at vi har en tabell som viser folketallet på jorda for hvert femte år i denne perioden (folketallet er her angitt i milliarder mennesker):

1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
2.519	2.756	3.021	3.335	3.692	4.068	4.435	4.831	5.264	5.674	6.071

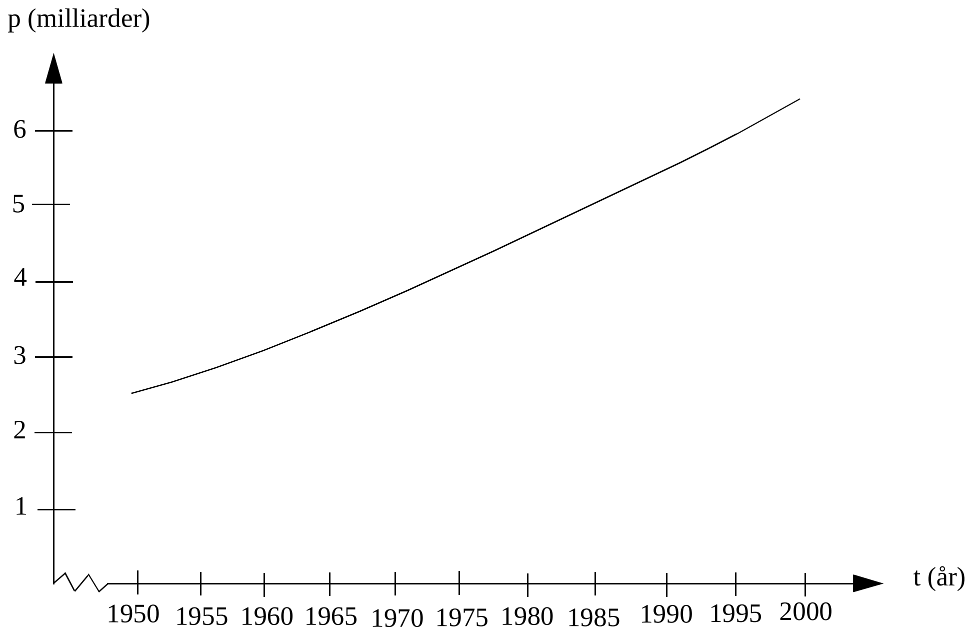
Tabell 3–1: Verdens befolkning fra 1950 til 2000

Vi kan nå plotte disse punktene i et koordinatsystem. Vi må selv velge formatet, dvs bestemme hvor mange år per cm og hvor mange milliarder mennesker pr cm. Her kan det passe med 5 år pr cm og 1 milliard mennesker pr cm. I tillegg må vi bestemme om vi må kutte noen av aksene, og vi finner da ut at tidsaksen må kuttes, da det ikke er hensiktsmessig å tøye denne helt ned til år 0.



Figur 3-1

Når vi kjenner så mange punkter på grafen kan vi skissere hele grafen ved å tegne en forbindelseslinje mellom punktene. Disse linjene må ikke være rette, men de må følge krummingen på kurven. Vi kan nå gå inn på hvilket som helst år og lese av folketallet på jorda det året.



Figur 3-2

Vi har nå tegnet en graf over folketallet p på jorda som funksjon av tida t. Det er vanlig å si at størrelsen på den vertikale aksen (i dette tilfelle p) er en funksjon av størrelsen på den horisontale aksen (t). I matematisk sammenheng skriver vi $p(t)$ og da mener vi p som funksjon av t.

Det kan egentlig lages tabeller og skisseres grafer over det meste vi kommer ut for til daglig. Bare tenk etter selv: Tidspunktet når du står opp, hvor mange kalorier du spiser til frokost, antall millimeter nedbør i løpet av natta, gjennomsnittshastigheten på vei til skolen osv osv.

Matematiske funksjoner

I matematikken holder vi ofte (men ikke alltid) på med teoretiske grafer der vi har gitt et funksjonsuttrykk $f(x)$ som vi kan benytte for å beregne størrelsen f når vi kjenner størrelsen x. Dersom vi setter inn èn x-verdi, skal vi få ut èn funksjonsverdi. Dette er et ufravikelig krav når det gjelder matematiske funksjoner. Vi kan derfor ikke si at uttrykket

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 24}}{6}$ er en funksjon fordi vi her får to ulike funksjonsverdier for en og samme verdi av b.

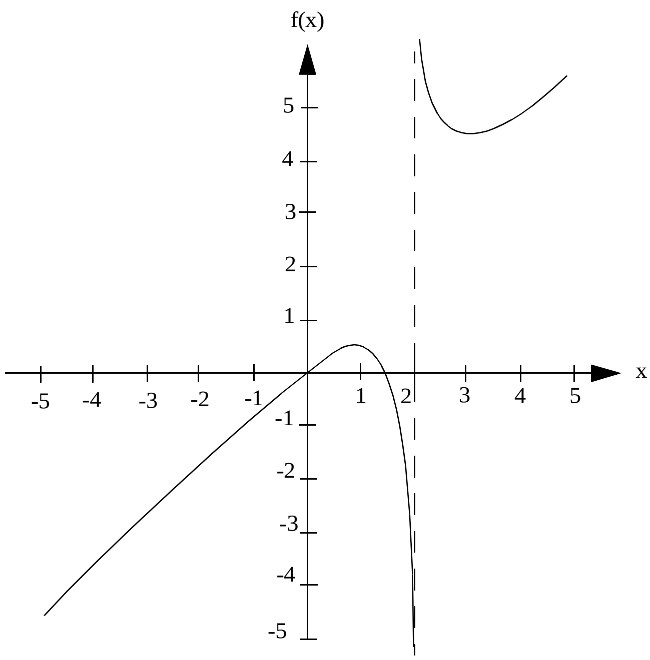
Vi kan se på funksjonsuttrykket $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{3}{2}x}{x - 2}$. For å tegne grafen til denne funksjonen må vi først sette opp en tabell og deretter tegne grafen ut fra tabellen. Vi velger å lage en tabell for alle heltallige x-verdier mellom -5 og 5:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-4.64	-3.67	-2.70	-1.75	-0.83	0.00	0.50	------	4.50	5.00	5.83

Tabell 3–2: Funksjonen $f(x)$

Her må vi merke oss at $x = 2$ ikke gir noen bestemt funksjonsverdi (og grunnen til det er at vi da får null i nevneren). Det er ikke så lurt å begynne å tegne grafen før vi kjenner til hva som skjer omkring $x = 2$, så derfor regner vi ut $f(1,99)$ og $f(2,01)$ først. Vi finner da ut at $f(1,99) \approx -97,5$ og at $f(2,01) \approx 102,5$

Da skjønner vi forhåpentligvis hva som skjer omkring $x = 2$ (!?!) og vi kan skissere grafen sånn omtrentlig:



Figur 3-3

Den vertikale stiplede linja $x = 2$ er inntegnet for å illustrere at grafen aldri kan krysse denne linja. Vi sier at $x = 2$ er en vertikal asymptote til funksjonen $f(x)$.

Definisjonsmengde og verdimengde

Definisjonsmengden til en funksjon $f(x)$ skrives D_f og er definert som mengden av alle x-verdier vi kan putte inn i funksjonen. Dersom $f(x)$ er funksjonen på forrige side, kan vi skrive $D_f = R \backslash \{2\}$, som forstås slik: Definisjonsmengden til funksjonen $f(x)$ er alle reelle tall med unntak av tallet 2.

Verdimengden til en funksjon $f(x)$ skrives V_f og er definert som mengden av alle funksjons-verdier vi kan få ut av funksjonen. Dersom $f(x)$ er funksjonen på forrige side, kan vi skrive $V_f = R \backslash \langle 0, 5 \rangle$, det vil si alle reelle tall med unntak av intervallet mellom 0 og 5. (Dette er ikke helt riktig hvis vi gransker figuren nøye, men siden vi ikke kjenner til noen metode for å finne ut nøyaktig hvor grafen snur, så får vi godta dette svaret inntil videre.)

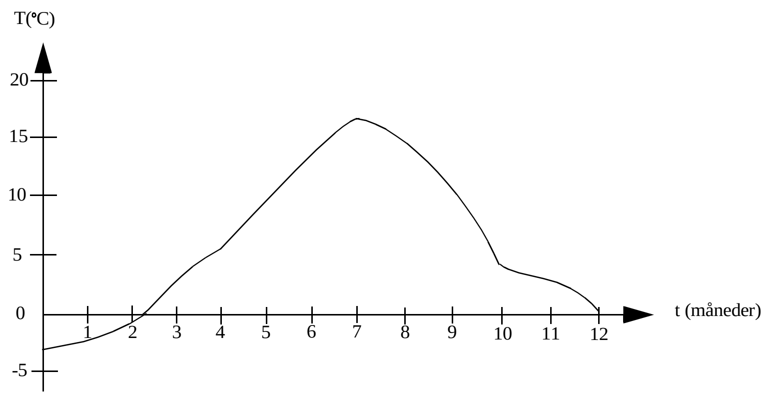
Eksempel 3.1:

Bestem definisjonsmengde og verdimengde til funksjonen $p(t)$ i figur 3-2.

Løsning: Vi ser av grafen at $D_p = [1950,2000]$ og at $V_p \approx \left[2\frac{1}{2},6\right]$

Eksempel 3.2:

Figur 3-4 viser årsvariasjonen i dagtemperaturen ved målestasjonen Voll i Trondheim for 2003. Bestem definisjonsmengde og verdimengde til funksjonen $T(t)$.



Figur 3-4

Løsning: Leser av grafen at $D_T = [0,12]$ og $V_T \approx [-3,17]$

Injektive funksjoner

Eksempel 3.3:

Ta utgangspunkt i figurene 3-2 og 3-4 og besvar følgende spørsmål:

a) Hvilket år var verdens folketall 5 milliarder?

b) Når var dagtemperaturen i Trondheim i 2003 $10°C$?

Løsning: a)Vi går inn på 5 milliarder på p-aksen og leser av omtrentlig årstall: **1987**

b)Vi går inn på $10°C$ på T-aksen og leser av 5 og 9 på t-aksen. Temperaturen var altså $10°C$ på to forskjellige tidspunkt: **Mai og september**.

I dette eksemplet så vi at vi kunne gi et helt konkret svar i oppgave a), men at vi fikk to mulige svar i oppgave b). Dette inntraff fordi funksjonen i a) er stigende i hele D_p, mens den i b) går både oppover og nedover. Vi sier at $p(t)$ i figur 3-2 er en injektiv funksjon mens $T(t)$ i figur 3-4 ikke er det.

Det anbefales å benytte følgende definisjon på injektive funksjoner:

En funksjon er injektiv dersom ingen horisontal linje skjærer grafen mer enn en gang.

Eksempel 3.4:

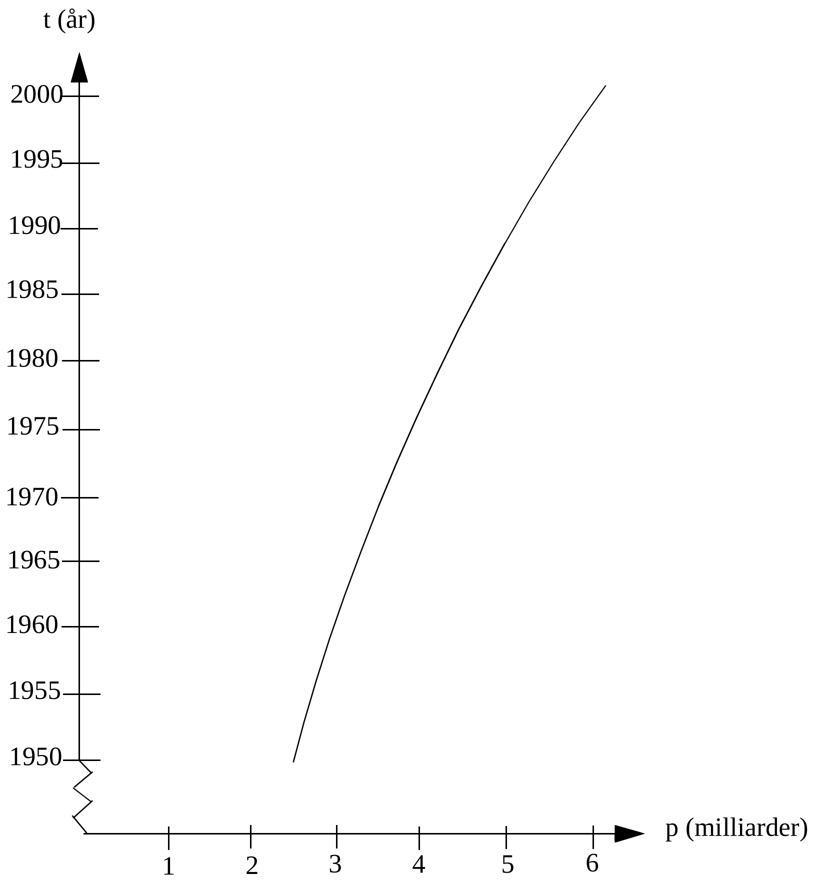
Er funksjonen $f(x)$ i figur 3-3 en injektiv funksjon?

Løsning: Av grafen ser vi for eksempel at den horisontale linja $y = -2$ skjærer grafen to ganger.

Funksjonen $f(x)$ er derfor **ikke injektiv**.

Inverse funksjoner

Vi tar igjen for oss den injektive funksjonen $p(t)$ for verdens folketall i figur 3-2. Det er ingen ting i veien for at vi kan snu på flisa og tegne funksjonen $t(p)$ i stedet. Denne funksjonen vil i så fall bli som vist på figur 3-5.



Figur 3-5

Vi sier at funksjonen $t(p)$ i figur 3-5 er den inverse funksjonen av $p(t)$ i figur 3-2. Alle injektive funksjoner har en invers funksjon, mens ingen ikke-injektive funksjoner har det. Hva tror du er grunnen til dette?

Svaret ligger i eksempel 3.3. Der benyttet vi oss av den inverse funksjonen til å besvare spørsmålene. Det første spørsmålet kunne vi besvare helt greit ved å finne $t(5 milliarder)$. På det andre spørsmålet endte vi opp med to forskjellige svar, mai og september. Grunnen til dette er at funksjonen $T(t)$ i figur 3-4 er ikke-injektiv og at den dermed ikke kan ha noen invers funksjon $t(T)$. I dette tilfellet fikk vi at $t(10°C)$ ga oss to funksjonsverdier, og dette er jo klart i strid med kravet til matematiske funksjoner som ble nevnt nederst på side 21.

Vi skal nå forsøke å finne den inverse funksjonen til en gitt injektiv funksjon $f(x)$. Det vi da må gjøre er å finne $x(f)$, men dette er jo en veldig "bakvendt" skrivemåte, så vi pleier derfor å kalle den inverse funksjonen for $f^{-1}(x)$ i stedet.

Her er det viktig å være klar over at $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$!

Eksempel 3.5:

Finn den inverse funksjonen til $f(x) = 2x - 6 \qquad D_f = R$

Løsning: Det bør være innlysende at funksjonen $f(x)$ er injektiv. Vi skal nå prøve å følge en bestemt oppskrift for å finne den inverse funksjonen:

Vi skriver først $y = 2x - 6$ og lar så x og y bytte plass: $x = 2y - 6$

Nå er det bare å finne y som funksjon av x og vi har den inverse funksjonen:

$$x = 2y - 6 \Rightarrow 2y = x + 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

Den inverse funksjonen til $f(x) = 2x - 6$ er altså $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 3}$

Vi skal nå lære oss en regel som viser seg å bli nyttig når vi skal finne litt mer kompliserte inverse funksjoner.

I eksempel 3.1 fant vi at definisjonsmengden og verdimengden til grafen $p(t)$ i figur 3-2 var henholdsvis $D_p = [1950,2000]$ og $V_p \approx \left[\frac{5}{2},6\right]$.

I figur 3-5 skisserte vi den inverse funksjonen $t(p)$. Her ble selvfølgelig $D_t \approx \left[\frac{5}{2},6\right]$ og $V_t = [1950,2000]$. Vi ser at definisjons- og verdi-mengden blir byttet om!

Vi kan altså formulere følgende regel for inverse funksjoner: $\boldsymbol{D_{f^{-1}} = V_f}$ **og** $\boldsymbol{V_{f^{-1}} = D_f}$

Eksempel 3.6:

Finn den inverse funksjonen til $f(x) = x^2 - 2x + 5 \qquad D_f = [1,\infty>$

Løsning: I utgangspunktet er alle andregradsfunksjoner ikke-injektive og da kan vi som kjent ikke finne noen invers funksjon. Men i dette tilfellet er definisjonsmengden begrenset slik at funksjonen er injektiv innenfor D_f, så da skal det per definisjon være mulig å finne $f^{-1}(x)$. Vi forsøker å benytte oppskriften fra forrige eksempel:

Vi skriver først $y = x^2 - 2x + 5$ og lar så x og y bytte plass: $x = y^2 - 2y + 5$

Denne likningen kan løses ved hjelp av abc-formelen:

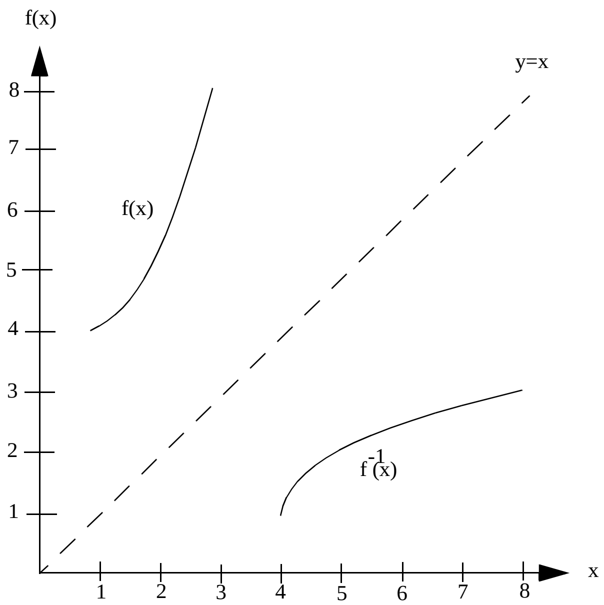
$$y^2 - 2y + (5 - x) = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(5 - x)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4x - 16}}{2} = 1 \pm \sqrt{x - 4}$$

Nå gjenstår bare ett problem: Skal vi bruke pluss eller minus? Dette kan vi avgjøre ved å kikke på D_f som er $[1,\infty>$ Da må også $V_{f^{-1}}$ være $[1,\infty>$ og da skjønner vi at vi er nødt til å bruke pluss-tegnet i uttrykket.

Vi kan også kontrollere at $D_{f^{-1}} = V_f$: Det minste tallet i V_f må være $1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$, slik at $V_f = [4,\infty>$ Da er også $D_{f^{-1}} = [4,\infty>$

Vi ser at dette stemmer råbra i og med at det minste tallet vi kan sette inn i rottegnet er nettopp $x = 4$. Vi kan da konkludere med at $f^{-1}(x) = \mathbf{1 + \sqrt{x - 4}} \qquad D_{f^{-1}} = [4,\infty>$

Til slutt kan vi forsøke å skissere $f(x)$ og $f^{-1}(x)$ i samme koordinatsystem.



Her legger vi merke til en ting til, nemlig at de to funksjonene ligger symmetrisk om $y = x$!

Eksponential- og logaritme-funksjoner

Det forutsettes nå at de mest grunnleggende regnereglene for eksponential- og logaritme-funksjoner er kjent fra tidligere. Her nøyer vi oss med en kort oppsummering:

$$a^0 = 1 \qquad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^k = a^{kx}$$

$$\log 1 = 0 \qquad \log x + \log y = \log(xy) \qquad \log x - \log y = \log\frac{x}{y} \qquad \log(x^k) = k\log x$$

Når vi skriver $\log$ kan grunntallet være hva som helst. Bruker vi lg (Briggske logaritmer) er grunntallet 10, og når vi bruker $\ln$ (naturlige logaritmer) er grunntallet $e \approx 2,718281828$. Dette er det mest brukte grunntallet i logaritme- og eksponential-regning. I de neste reglene benytter vi e som grunntall:

$$e^0 = 1 \qquad e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad (e^x)^k = e^{kx}$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln x + \ln y = \ln(xy) \qquad \ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y} \qquad \ln(x^k) = k\ln x$$

$$e^{\ln x} = x \qquad \ln(e^x) = x \qquad e^{a\ln x} = e^{\ln x^a} = x^a \qquad \ln(ae^x) = \ln a + \ln e^x = x + \ln a$$

Ellers kan det være greit å merke seg at alle rene eksponential- og logaritme-funksjoner er injektive, slik at de også har sine inverse funksjoner.

Eksempel 3.7:

Finn den inverse funksjonen til $f(x) = e^{\left(\frac{x}{3}\right)}$ $\qquad D_f = R$

Løsning: Vi prøver den oppskriften vi er blitt vant til: $y = e^{\left(\frac{x}{3}\right)}$ gir $x = e^{\left(\frac{y}{3}\right)}$, og vi må løse denne likningen med hensyn på y: $\ln x = \ln e^{\left(\frac{y}{3}\right)} \Rightarrow \frac{y}{3} = \ln x \Rightarrow y = 3\ln x$

Den inverse funksjonen til $f(x) = e^{\left(\frac{x}{3}\right)}$ er altså $f^{-1}(x) = \mathbf{3\ln x}$

Eksempel 3.8:

Løs likningen $10^x = e$

Løsning: Vi benytter naturlige logaritmer til å løse likningen, og tar derfor ln av begge sidene:

$$\ln 10^x = \ln e \Rightarrow x \cdot \ln 10 = 1 \Rightarrow x = \mathbf{\frac{1}{\ln 10}}$$

Eksempel 3.9:

Løs likningen $e^{2x} - e^x = 240$

Løsning: Her må vi innse at $e^{2x} = (e^x)^2$. Vi kan da innføre $y = e^x$ og få følgende likning:

$$y^2 - y - 240 = 0$$

abc-formelen gir da:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-240)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{1 \pm 31}{2} = 16 \vee -15$$

Vi står nå igjen med de to likningene $e^x = 16$ og $e^x = -15$ hvorav den siste ikke har noen løsning. Vi sitter da igjen med svaret $x = \ln 16 \ (= \ln 2^4 = \mathbf{4\ln 2})$

Eksempel 3.10:

Løs likningen $\ln x + \ln 4x = 1$

Løsning: Her kan vi slå sammen venstresiden til én logaritmefunksjon:

$$\ln(x \cdot 4x) = 1 \Rightarrow \ln(4x^2) = 1 \Rightarrow e^{\ln(4x^2)} = e^1 \Rightarrow 4x^2 = e \Rightarrow x^2 = \frac{e}{4}$$

Da blir $x = \pm\frac{\sqrt{e}}{2}$, men siden vi ikke kan ta ln av negative tall blir svaret bare $x = \mathbf{\frac{\sqrt{e}}{2}}$

Eksempel 3.11:

Forenkle uttrykket $\ln 9 + \frac{1}{2}\ln(ex^2) + \ln\frac{\sqrt{e}}{3x}$ mest mulig.

Løsning: $\ln 9 + \frac{1}{2}\ln(ex^2) + \ln\frac{\sqrt{e}}{3x} = \ln 3^2 + \frac{1}{2}(\ln e + \ln x^2) + \ln\sqrt{e} - \ln 3x =$

$$2\ln 3 + \frac{1}{2}(1 + 2\ln x) + \frac{1}{2}\ln e - \ln 3 - \ln x = \ln 3 + \frac{1}{2} + \ln x + \frac{1}{2} - \ln x = \mathbf{1 + \ln 3}$$

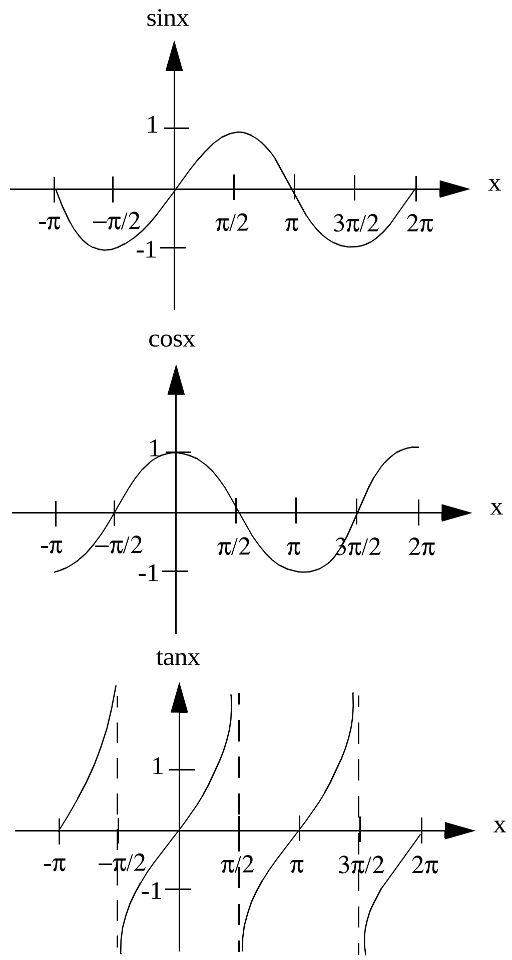
Trigonometriske funksjoner

I matematikken opererer vi med to forskjellige vinkelmål, grader og radianer. Omregningsfaktoren mellom disse to er $\frac{\pi}{180°}$.

Derfor blir en rett vinkel som er $90°$ lik $90° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{2}$ radianer.

På samme måte blir en vinkel som er 1 radian lik $1 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 57,3°$.

De aller fleste er sikkert mest fortrolig med grader som vinkelmål, men i matematikken er det radianer som blir mest benyttet. Det er derfor like greit å venne seg til radianene først som sist. Vi må vel også friske opp hvordan de trigonometriske funksjonene ser ut. De er her skissert for vinkler mellom $-\pi$ og 2π radianer.



Figur 3-6. De trigonometriske funksjonene $\sin x$, $\cos x$ og $\tan x$.

Når det gjelder trigonometriske formler nøyer vi oss her med å repetere noen regneregler for sinus, cosinus og tangens: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$ $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$

$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$ $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$

Eksempel 3.12:

Finn $x \in [0, 2\pi>$ som tilfredsstiller følgende trigonometriske likninger:

a) $\sin^2 x - 2\sin x + \dfrac{3}{4} = 0$ b) $\sin^2 x - 2\cos x + \dfrac{1}{4} = 0$

Løsning: a) Vi setter $u = \sin x$ og får andregradslikningen $u^2 - 2u + \dfrac{3}{4} = 0$ som har de to løsningene $u = \dfrac{3}{2} \vee u = \dfrac{1}{2}$.

$\sin x = \dfrac{3}{2}$ har ingen løsninger, mens $\sin x = \dfrac{1}{2}$ har løsningene $x_1 = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$ og $x_2 = \dfrac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}}$.

(Den første løsningen kan vi finne i eksaktverditabellen på side 6, den andre ved hjelp av symmetri: $x_2 = \pi - x_1$)

b) Her kan vi ikke bruke u med en gang fordi vi har både cosinus og sinus involvert. Men det er ganske enkelt å skrive om $\sin^2 x$ til $1 - \cos^2 x$, og da kan vi komme oss videre:

$$\sin^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 1 - \cos^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow -\cos^2 x - 2\cos x + \frac{5}{4} = 0$$

Da kan vi sette $u = \cos x$ og få andregradslikningen $-u^2 - 2u + \dfrac{5}{4} = 0$.

Løsningene på denne blir $u = -\dfrac{5}{2} \vee u = \dfrac{1}{2}$.

$\cos x = -\dfrac{5}{2}$ har ingen løsninger, mens $\cos x = \dfrac{1}{2}$ har to løsninger:

$x_1 = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ og $x_2 = \dfrac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{3}}$. (Tabell og symmetri)

Eksempel 3.13:

Finn $x \in [0, 2\pi>$ som tilfredsstiller følgende trigonometriske likninger:

a) $\sin 2x = \dfrac{1}{\tan x}$ b) $\sin x + 2\cos x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Løsning: a) Vi bruker formlene på foregående side til omskrivning av $\sin 2x$ og $\tan x$ slik at likningen består av bare $\sin x$ og $\cos x$: $\sin 2x = \dfrac{1}{\tan x} \Rightarrow 2\sin x\cos x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Så multipliserer vi hele likningen med $\sin x$ (her må vi forutsette at $x \neq 0$ og $x \neq \pi$):

$$2\sin^2 x\cos x = \cos x \Rightarrow \cos x(2\sin^2 x - 1) = 0$$

Vi ser nå at vi får løsninger når i) $\cos x = 0$ og ii) $2\sin^2 x - 1 = 0$

i) gir: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} \vee x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$, mens ii) gir $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_3 = \dfrac{\pi}{4} \vee x_4 = \dfrac{3\pi}{4}$, og $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_5 = \dfrac{5\pi}{4} \vee x_6 = \dfrac{7\pi}{4}$

Løsningene blir: $\boldsymbol{x_1 = \dfrac{\pi}{2} \vee x_2 = \dfrac{3\pi}{2} \vee x_3 = \dfrac{\pi}{4} \vee x_4 = \dfrac{3\pi}{4} \vee x_5 = \dfrac{5\pi}{4} \vee x_6 = \dfrac{7\pi}{4}}$

b) Denne likningen ser nokså uskyldig ut, men siden både $\sin^2 x$ og $\cos^2 x$ mangler, er det eneste som nytter å kvadrere begge sider: $\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = \dfrac{9}{2}$

Multiplikasjon med $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ på høyre side gir nå:

$$\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = \frac{9}{2}\sin^2 x + \frac{9}{2}\cos^2 x \Rightarrow -\frac{7}{2}\sin^2 x + 4\sin x\cos x - \frac{1}{2}\cos x^2$$

Divisjon med $\cos^2 x$ gir oss en andregradslikning med $\tan x$!

$$-\frac{7}{2}\tan^2 x + 4\tan x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{7} \vee \tan x = 1$$

$\tan x = \dfrac{1}{7} \Rightarrow x_1 \approx 0,142 \vee x_2 \approx 3,283$ og $\tan x = 1 \Rightarrow x_3 = \dfrac{\pi}{4} \vee x_4 = \dfrac{5\pi}{4}$

På grunn av kvadreringen i starten er det bare to av disse løsningene som er riktige. Ved å sette prøve på likningen finner vi at løsningene blir $\boldsymbol{x_1 \approx 0,142 \vee x_3 = \dfrac{\pi}{4}}$

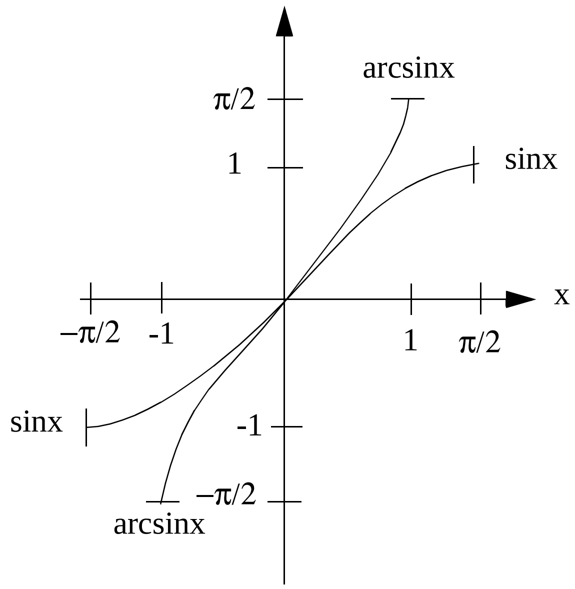
Inverse trigonometriske funksjoner

Figur 3-6 viser tydelig at ingen av de tre funksjonene $\sin x$, $\cos x$ eller $\tan x$ kan være injektive. Den rette linjen $y = \frac{1}{2}$ vil skjære alle tre kurvene mange ganger. Men som vi har sett tidligere, kan vi ved å redusere definisjonsmengden til funksjonene få dem til å bli injektive.

Vi kan ta $f(x) = \sin x$ som eksempel. Dersom vi reduserer D_f til å omfatte et intervall der grafen er stigende hele tida, har vi laget oss en injektiv funksjon. Vi finner av grafen på side 30 at vi kan velge $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ som gir oss $V_f = [-1, 1]$.

Men hva er funksjonsuttrykket for den inverse funksjonen? Dette er umulig å regne ut, så vi innfører bare funksjonen $f^{-1}(x) = arc\sin x$, (arcus sinus x), som er definert som den inverse funksjonen til $f(x) = \sin x$ og som har $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$ og $V_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Vi er nå i stand til å skissere funksjonene $f(x) = \sin x$ og $f^{-1}(x) = arc\sin x$ i et koordinatsystem og se hvordan de tar seg ut. Legg merke til symmetrien om linja $y = x$!



Figur 3-7. $\sin x$ og $arc\sin x$ i samme koordinatsystem

Men hva er egentlig $arc\sin x$? Av figuren ser vi f. eks. at $arc\sin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Dette betyr jo at $arc\sin x$ rett og slett er en vinkel! Egentlig ganske logisk fordi $\sin x$ og $arc\sin x$ er inverse funksjoner. Altså er $\sin(arc\sin x) = x$ og $arc\sin(\sin x) = x$.

Eksempel 3.14:

Finn den inverse funksjonen til $g(x) = \tan x$

Løsning: Funksjonen $g(x) = \tan x$ er, som vi allerede har nevnt, ikke-injektiv. Derfor må vi først av-grense D_g til et område der grafen er stigende. Ut fra grafen på forrige side ser vi at $D_g = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ passer bra. Så var det å finne funksjonsuttrykket for den inverse funksjonen:

Vi har $y = \tan x$, og når x og y bytter plass får vi $x = \tan y$.

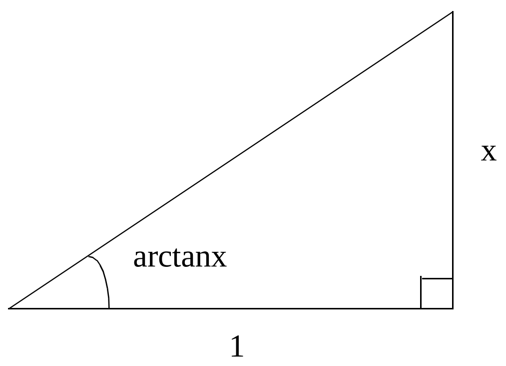
Når vi løser denne likningen med hensyn på y, får vi $y = arc\tan x$ (jfr det vi gjorde for $\sin x$ på foregående side).

Da har vi funnet at den inverse funksjonen til $g(x) = \tan x$ er $g^{-1}(x) = arc\tan x$, der $D_{g^{-1}} = R$ og $V_{g^{-1}} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Eksempel 3.15:

Finn et annet uttrykk for $\cos(arc\tan x)$

Løsning: Her må vi la tankene vandre i retning rettvinklede trekanter et lite øyeblikk. $arc\tan x$ er jo en vinkel, og tangens til denne vinkelen skal altså være lik x. Vi kan med andre ord smekke opp følgende figur:



Vi ser at dette må stemme: $\tan(arc\tan x) = \frac{x}{1} = x$

Men hva blir da $\cos(arc\tan x)$?

Jo, Pythagoras gir at hypotenusen i trekanten må være $\sqrt{1 + x^2}$, og da kan vi lese direkte fra trekanten at $\cos(arc\tan x) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1 + x^2}}}$

Oppgaver

9. Gitt funksjonen $f(x) = \sqrt{x+2}$ $\quad x \in [-1, 7]$

a) Finn den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$. Angi $D_{f^{-1}}$ og $V_{f^{-1}}$.

b) Skisser begge funksjonene i samme koordinatsystem.

c) Finn koordinatene til skjæringspunktet mellom kurvene.

10. Løs likningene:

a) $e^{4x} - 4 \cdot e^{2x} + 3 = 0$

b) $\ln(x-1) + \ln(x-e) = 1$

c) $e^{x} + 5e^{-x} = 6$

11. Løs følgende trigonometriske likninger for $x \in [0, 2\pi>$:

a) $\cos 2x + \sin x = 1$

b) $(\cos x - \sin x) \cdot \tan 2x = \cos x$

c) $\cos x + 2\sin x = -2$

12. Benytt rettvinklede trekanter til å løse likningene:

a) $arc\sin x = arc\tan\frac{3}{4}$

b) $arc\sin x = 2arc\sin\frac{1}{3}$

Hint: $\sin 2u = 2\sin u \cos u$

13. Gitt funksjonen $f(x) = \ln\cos x$

a) Finn den største mulige D_f når følgende to krav skal være oppfylt:

i) $x = \frac{\pi}{4}$ skal være med i D_f og ii) $f(x)$ skal ha en invers funksjon.

b) Finn den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$ og angi $D_{f^{-1}}$ og $V_{f^{-1}}$

Ekstraoppgaver

E11. Gitt funksjonen $f(x) = \ln(5 + 4x - x^2)$ som har et maksimumspunkt i (2,ln9).

a) Angi den største definisjonsmengden funksjonen kan ha dersom $f(x)$ skal være synkende i hele D_f.

b) For hvilken verdi av x vil den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$ ha en funksjonsverdi lik 4? (NB! Du trenger ikke finne $f^{-1}(x)$ for å greie dette spørsmålet!)

c) Utled den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$ når D_f er som funnet i a). Angi $D_{f^{-1}}$ og $V_{f^{-1}}$. Kontrollér at svaret du fant i b) stemmer.

E12. Forenkle uttrykkene:

a) $(e^x - e^{-\ln x})(xe^x + 1)$ b) $\ln\sqrt{8} - \ln 2 - 3\ln\sqrt{2}$

E13. Løs likningene:

a) $e^{x^2 - 2x} = 1$ b) $(\ln x)^2 + 4\ln x - 12 = 0$

E14. Forenkle uttrykkene:

a) $(1 - \sin^2 v)(1 + \tan^2 v)$ b) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

E15. Beregn den eksakte verdien av uttrykkene

a) $\dfrac{\sin v}{1 + \cos v} + \dfrac{\cos v}{1 + \sin v}$ når $\tan v = \dfrac{3}{4}$ (v ligger i første kvadrant)

b) $\sin^2 x - \cos 2x + \tan x$ når $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

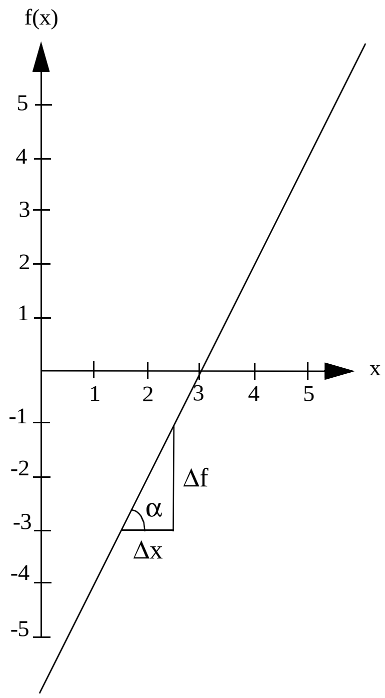
E16. Dersom $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ og $\tan\beta = \dfrac{2}{5}$, hva er da $\tan(\alpha + \beta)$?

Hint: Formler på side 31!

4 Derivasjon

Stigningstall

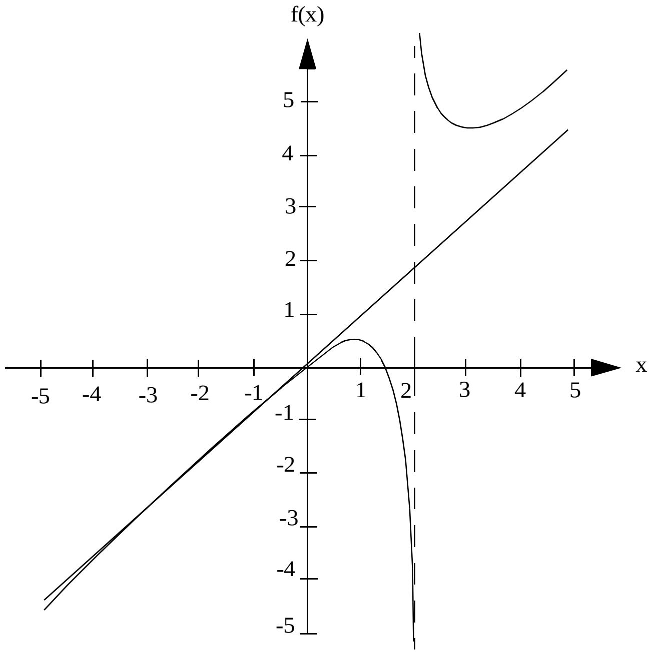
Stigningstallet er et av de viktigste begrepene når vi jobber med grafer. Stigningstallet er et mål på hvor fort funksjonsverdien endrer seg når x øker. Grafen til en lineær funksjon, f.eks. $f(x) = 2x - 6$, stiger jevnt hele tida, og stigningstallet er derfor konstant. Vi kan se litt på grafen til denne funksjonen og definere mer nøyaktig hva som menes med stigningstall.



Figur 4-1

Stigningstallet er definert som tangens til helningsvinkelen α (se figur). Vi kan benytte bokstaven a som symbol for stigningstallet. Vi får da $a = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \tan\alpha$. Vi kan regne ut a ved å velge et intervall på x-aksen, f.eks. intervallet mellom $x = 1$ og $x = 5$. Så leser vi av funksjonsverdiene til disse to x-verdiene og finner at $f(1) = -4$ og $f(5) = 4$. Stigningstallet til funksjonen $f(x)$ blir nå $a = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{4 - (-4)}{5 - 1} = \dfrac{8}{4} = 2$

Etter som denne grafen er lineær, har det ingen betydning hverken hvor stort intervall vi velger eller hvor intervallet ligger på x-aksen. Men for andre matematiske funksjoner, f.eks. $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{3}{2}x}{x - 2}$ i figur 3-3, varierer stigningstallet til grafen hele tida. Det kan da være vanskelig å lese av stigningstallet til grafen i et bestemt punkt, for eksempel $x = -1$. Vi kan allikevel greie dette ved å tegne inn tangenten til grafen for $x = -1$. Tangenten er en rett linje som tangerer grafen i et punkt uten å skjære grafen. På denne figuren er tangenten tegnet inn:



Figur 4-2

Det bør være forholdsvis greit å innse at stigningstallet til grafen i et punkt er det samme som stigningstallet til tangenten i det samme punktet. Vi kan da lese av stigningstallet nokså nøyaktig ved å observere at tangenten passerer gjennom punktene $(-5, -4{,}5)$ og $(5, 4{,}5)$. Vi får da: $a = \frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{4,5-(-4,5)}{5-(-5)} = \frac{9}{10} = 0{,}9$ Dette er ikke 100% riktig, men et bra overslag.

Eksempel 4.1:

Se på figur 4-2 og angi i hvilke intervall stigningstallet er i) positivt og ii) negativt

Løsning: i) Etter som stigningstallet er definert som $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, betyr positivt stigningstall at Δf og Δx må ha samme fortegn, eller sagt på en annen måte: f øker når x øker. Fra figuren ser vi at dette inntreffer sånn omtrent når $\mathbf{x < 1}$ og når $\mathbf{x > 3}$.

ii) Negativt stigningstall betyr tilsvarende at f minker når x øker. Dette inntreffer i det mellomliggende intervallet, nemlig $\mathbf{1 < x < 3}$, med unntak av punktet $x = 2$, der hverken funksjonen eller stigningstallet er definert.

Ettpunktsformel for rett linje

Vi skal nå lære hvordan vi kan finne formelen til en rett linje når vi kjenner linjas stigningstall i tillegg til et punkt på linja. Formelen for en rett linje kan (som vi kanskje kjenner til) skrives som $y = ax + b$, der a er stigningstallet til linja og b er y-koordinaten der linja skjærer y-aksen.

Med de gitte forutsetningene kjenner vi altså a, så det er bare b vi trenger å beregne. Vi antar at koordinatene til det kjente punktet er (x_0, y_0), så disse koordinatene må selvfølgelig oppfylle likningen. Vi setter inn og får: $y_0 = ax_0 + b \Rightarrow b = y_0 - ax_0$

Det er selvsagt mulig å gå omkring og huske denne formelen for b, men hvis vi går et skritt videre og setter dette uttrykket inn i formelen for den rette linja, får vi en formel som er enda enklere å huske: $y = ax + b = ax + y_0 - ax_0 \Rightarrow \boldsymbol{y - y_0 = a(x - x_0)}$

Det er denne formelen som kalles ettpunktsformelen for en rett linje.

Eksempel 4.2:

a) Finn formelen for den rette linja med stigningstall 3 som går gjennom punktet (2,7).

b) Finn formelen for den rette linja som går gjennom de to punktene (-1,3) og (2,-12).

Løsning: a)Vi bruker ettpunktsformelen $y - y_0 = a(x - x_0)$ og setter inn de gitte størrelsene:

$$y - 7 = 3(x - 2) \Rightarrow y - 7 = 3x - 6 \Rightarrow y = \mathbf{3x + 1}$$

b)Her har vi gitt to punkter, men ikke noe stigningstall. Da må vi først finne stigningstallet ved å benytte koordinatene til begge punktene. Vi får da:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-12 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-15}{3} = -5$$

Så kan vi benytte ettpunktsformelen. Det er likegyldig hvilket av de to punktene vi benytter, velger å benytte (-1,3): $y - 3 = -5(x + 1) \Rightarrow y - 3 = -5x - 5 \Rightarrow y = \mathbf{-5x - 2}$

Derivasjon

Når vi har en matematisk funksjon, slipper vi å måle oss fram til stigningstallet i ethvert punkt på grafen. Vi kan i stedet benytte spesielle regneregler (derivasjonsregler) som gir oss et eksakt matematisk uttrykk for stigningstallet som funksjon av x-koordinaten i punktet. Stigningstallet blir altså ikke lenger et konkret tall, men derimot en funksjon av x. Dessuten skal vi ikke lenger bruke begrepet stigningstall om denne funksjonen, vi kaller den i stedet for den *deriverte*.

Før vi går videre må vi bli enige om hvilken skrivemåte vi skal benytte i forbindelse med den deriverte. Dersom funksjonen vi har i utgangspunktet er $y(x)$, er en vanlig skrivemåte for den deriverte $y'(x)$. Vi skal derimot hovedsaklig benytte en annen skrivemåte som forteller litt mer om hva den deriverte egentlig er, nemlig stigningstallet til en graf.

I starten på dette kapitlet brukte vi $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ når vi skulle måle oss fram til stigningstallet. Vi skal nå bruke en lignende skrivemåte for den deriverte, nemlig $\frac{dy}{dx}$. Forskjellen mellom Δx og dx er bare at dx er så liten vi bare måtte ønske (infinitesimalt liten). Mens $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ angir gjennomsnittlig stigningstall over et intervall Δx, angir altså $\frac{dy}{dx}$ stigningstallet (den deriverte) nøyaktig i ethvert punkt.

Det er nå på tide å introdusere en tabell over de åtte mest brukte derivasjonsformlene:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
y	x^n	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$arc\sin x$	$arc\tan x$
$\frac{dy}{dx}$	$n \cdot x^{n-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

NB! Alle de trigonometriske formlene (nr. 4-8) forutsetter at vinklene er angitt i radianer!

Er vinklene angitt i grader, vil formlene bli langt mer komplisert!

Det er en klar fordel å lære seg disse formlene utenat.

Før vi begynner å derivere, må vi nesten kjenne et par grunnleggende regler til.

Dersom funksjonen som skal deriveres er en sum eller differanse av andre funksjoner, kan vi bare ta med oss denne summen eller differansen når vi deriverer:

$$y = y_1 \pm y_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \pm \frac{dy_2}{dx}$$

Dersom vi har en konstant multiplisert med funksjonen, kan vi bare ta med oss denne konstanten når vi deriverer: $y = k \cdot y_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = k \cdot \frac{dy_1}{dx}$

Eksempel 4.3:

Benytt blant annet tabellen på foregående side til å finne $\frac{dy}{dx}$ av følgende funksjoner:

a) $y = \frac{1}{x^5}$ b) $y = 3$ c) $y = 2\sqrt{x}$ d) $y = \ln(2x)$

Løsning: a) $y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$

Derivasjon i henhold til formel 1 gir da: $\frac{dy}{dx} = -5 \cdot x^{-6} = -\boldsymbol{\frac{5}{x^6}}$

b) $y = 3$

$y = 3$ er en konstant funksjon som hverken stiger eller synker, og vi kan skrive $\frac{dy}{dx} = \mathbf{0}$.

c) $y = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$

Formel 1 gir da $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

d) $y = \ln(2x) = \ln 2 + \ln x$

På grunn av at $\ln 2$ er en konstant, blir den deriverte her $\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{x} = \boldsymbol{\frac{1}{x}}$. Dette betyr at $\ln(2x)$ har samme forløp som $\ln x$, den ligger bare litt høyere. Stigningstallet er det samme.

Produktregelen og brøkregelen

Tabellen på side 40 er veldig nyttig når vi skal derivere, men vi er nødt til å lære noen regler til før vi kan begynne å derivere skikkelig.

En skulle kanskje tro at når en funksjon er et produkt av to funksjoner, $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, så er den deriverte lik $\frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$, men dette er **IKKE RIKTIG**!!!

Vi har i stedet det vi kaller produktregelen (her benytter vi den gamle skrivemåten for den deriverte): $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Tilsvarende har vi brøkregelen: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Eksempel 4.4:

Benytt produktregelen og brøkregelen i kombinasjon med tabellen på s. 40 til å finne $\frac{dy}{dx}$ når:

a) $y = x \sin x$ b) $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

Løsning: a) Bruker produktregelen og får: $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \mathbf{\sin x + x \cos x}$

b) Her må vi også bruke produktregelen: $y = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^x \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x + x^{\frac{1}{2}} \cdot e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot e^x = \mathbf{\frac{1 + 2x}{2\sqrt{x}} \cdot e^x}$$

c) Vi bruker brøkregelen: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \mathbf{\frac{1 - 2\ln x}{x^3}}$

Mange foretrekker å benytte D-operatoren i stedet for $u'(x)$ når de jobber med produkt- og brøkregelen. D betyr rett og slett den deriverte. (Kjært barn har mange skrivemåter.) Vi har da for eksempel $D(x^2) = 2x$ og $D(3x) = 3$.

Omskrivning av formlene på forrige side gir da følgende resultat:

Produktregelen: $D(u \cdot v) = D(u) \cdot v + u \cdot D(v)$

Brøkregelen: $D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{D(u) \cdot v - u \cdot D(v)}{v^2}$

Når vi skal derivere funksjonen $y = \frac{\ln x}{x^2}$ fra eksempel 4.4, kan vi føre dette slik:

$$\frac{dy}{dx} = D\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{D(\ln x) \cdot x^2 - \ln x \cdot D(x^2)}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Dere står fritt til å bestemme om dere vil bruke D-operatoren eller ikke når dere skal derivere funksjoner i framtida.

Kjerneregelen

Nå mangler vi bare en regel for å kunne derivere de aller fleste funksjoner. Denne regelen kalles kjerneregelen, og må benyttes når vi har en kjerne i funksjonen vi skal derivere. Dette oppstår ganske ofte. I tabellen står det hvordan vi skal derivere $\sin x$ og e^x, men ikke hvordan vi gjør når vi står ovenfor $\sin 2x$ eller $e^{x^2 - 2x}$. Hemmeligheten består i å innføre en kjerne z for så å benytte følgende formel: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ (Forkorting av dz viser at denne formelen må være riktig.)

Vi kan ta $y = \sin 2x$ som eksempel: Vi innfører kjernen $z = 2x$ som gir $\frac{dz}{dx} = 2$. Funksjonen kan da skrives som $y = \sin z$ som gir $\frac{dy}{dz} = \cos z$. Når vi sammenfatter dette får vi $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cos z \cdot 2 = 2\cos 2x$. Husk alltid å fjerne bokstaven z før du presenterer svaret! Den er bare en hjelpestørrelse under derivasjonen.

Eksempel 4.5:

Finn $\frac{dg}{dx}$ når $g(x)$ er gitt av

a) $g(x) = e^{x^2 - 2x}$ b) $g(x) = arc\sin\sqrt{x}$

Løsning: a) Innfører $z = x^2 - 2x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x - 2$ Vi har da $g = e^z \Rightarrow \frac{dg}{dz} = e^z$

og står igjen med: $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (2x - 2) = \mathbf{(2x-2)e^{x^2-2x}}$

b) Vi satser på $z = \sqrt{x}$ som gir $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (kjent fra tidligere eksempler).

$$g = arc\sin z \Rightarrow \frac{dg}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

Da blir $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \mathbf{\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}}$

Det er fullt mulig (og ofte smart) å benytte D-operatoren i forbindelse med kjerneregelen også. Derivasjon av $y = \sin 2x$ kan da føres slik:

$$\frac{dy}{dx} = D(\sin 2x) = \cos 2x \cdot D(2x) = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

Eksempel 4.6:

Løs eksempel 4.5 på nytt ved å bruke D-operatoren.

Løsning: a) $\frac{dg}{dx} = D(e^{x^2-2x}) = e^{x^2-2x} \cdot D(x^2 - 2x) = \mathbf{e^{x^2-2x} \cdot (2x-2)}$

b) $\frac{dg}{dx} = D(arc\sin\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot D(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \mathbf{\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}}$

I kompliserte oppgaver må vi ofte kombinere kjerneregelen med produkt- eller brøkregelen:

Eksempel 4.7:

Derivér funksjonene:

a) $f(x) = x^2 e^{-3x}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{\tan 2x}$ c) $h(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

Løsning: a)Vi deriverer uttrykket med kjerne (e^{-3x}) først og får $e^{-3x} \cdot (-3) = -3e^{-3x}$

Så var det produktregelen: $\dfrac{df}{dx} = 2x \cdot e^{-3x} + x^2 \cdot (-3e^{-3x}) = \mathbf{(2x - 3x^2)e^{-3x}}$

b) Vi ser at vi er nødt til å bruke kjerneregelen på uttrykket i nevneren. Vi finner da at den deri-

verte av nevneren blir $\dfrac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

Da kan vi gå løs på brøkregelen: $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{1 \cdot \tan 2x - x \cdot \dfrac{2}{\cos^2 2x}}{\tan^2 2x}$

Uttrykket er litt uoversiktlig, men multiplikasjon med $\cos^2 2x$ over og under brøkstreket

skulle hjelpe litt: $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{\tan 2x \cdot \cos^2 2x - 2x}{\tan^2 2x \cdot \cos^2 2x} = \mathbf{\dfrac{\sin 2x \cdot \cos 2x - 2x}{\sin^2 2x}}$

c) Velger å bruke D-operatoren i denne oppgaven:

$$\frac{dh}{dx} = D\left[\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right] = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \cdot D\left(\frac{\sin x}{x}\right) =$$

$$\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{D(\sin x) \cdot x - \sin x \cdot D(x)}{x^2} =$$

$$\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \mathbf{\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}}$$

Oppgaver

14. a) Skisser grafen til funksjonen $f(x) = 2x - 6\sqrt{x} \qquad 0 \le x \le 9$

    b) Tegn inn tangenten til grafen i punktet $P(4, -4)$ og les av omtrentlig stigningstall til grafen i dette punktet.

    c) Angi omtrentlig koordinatene til det punktet Q der stigningstallet er null.

    d) Finn $\frac{df}{dx}$ og beregn ut fra dette eksakt stigningstall i P og koordinatene til Q.

    e) Finn likningen for tangenten i punktet P.

15. Deriver følgende funksjoner og forenkle svaret så mye som mulig:

    a) $f(x) = (2x^2 - 1)(x^3 + 2)$

    b) $g(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x + 10}{2x - 5}$

    c) $f(t) = \dfrac{\tan t}{t^2}$

    d) $g(t) = \sqrt{t} \cdot \ln t$

    e) $h(t) = (t^2 + 3t + 4)^3$

    f) $p(x) = (x^2 - 2x)^3 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}x\right)$

    g) $q(x) = x^2 e^{-x}$

    h) $r(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$

    i) $s(x) = arc\tan\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

16. Massen til en bakteriepopulasjon i milligram følger formelen $P(t) = 50 + \dfrac{100t}{21 + t^2}$, der t er tiden i timer.

    a) Beregn midlere veksthastighet for populasjonen i tidsrommet fra 2 til 7 timer.

    b) Beregn øyeblikkelig veksthastighet ved $t = 2$ og $t = 7$ timer.

    c) Ved hvilket tidspunkt t er den øyeblikkelige veksthastigheten lik null?

Ekstraoppgaver

E17. Gitt funksjonen $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$

a) Bestem samtlige nullpunkter til $f(x)$.

b) Finn likningen for tangenten til $f(x)$ i punktet $(4, 5)$.

c) Undersøk om tangenten i b) skjærer grafen til $f(x)$ i andre punkter.

E18. Deriver følgende funksjoner og forenkle svaret så mye som mulig:

a) $f(x) = x\ln x - x$

b) $g(x) = \dfrac{x}{(x+1)^3}$

c) $f(t) = t \cdot arc\sin t$

d) $g(t) = \ln(1 + \sin t)$

e) $h(t) = \dfrac{t^2}{\cos^2 t}$

f) $f(r) = \dfrac{1}{(r-1)(r+2)}$

g) $g(r) = \dfrac{(2r-1)^{\frac{3}{2}}}{(r+1)^5}$

h) $h(r) = arc\sin\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}$

E19. Gitt funksjonen $g(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{x}$ $x > 0$

a) Beregn $\dfrac{dg}{dx}$ og finn funksjonens nullpunkt.

b) Bestem den største mulige D_g når funksjonen både skal ha et nullpunkt og en invers funksjon.

c) Hva blir $D_{g^{-1}}$ og $V_{g^{-1}}$?

d) Beregn $g^{-1}(x)$.

5 Anvendelser av derivasjon

Ekstremalpunkter

Vi er ofte interessert i å finne de punktene på en graf der funksjonsverdien er høyest (maksimumspunkter) eller lavest (minimumspunkter). Disse punktene kaller vi med et fellesnavn for ekstremalpunkter. De kan finnes i grafens endepunkter (dersom definisjonsområdet er begrenset) eller de ligger der den deriverte er lik null. Vi skal i første rekke konsentrere oss om de sistnevnte.

Eksempel 5.1:

Grafen til funksjonen $f(x) = xe^{-x}$ har et maksimumspunkt. Finn koordinatene til dette punktet.

Løsning: Etter som grafen ikke har noen endepunkter må dette maksimumspunktet ligge der den deriverte er null. Vi finner først uttrykket for den deriverte:

$$\frac{df}{dx} = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

Så må vi løse likningen $\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow (1-x)e^{-x} = 0$.

For at et produkt skal være lik null, må en av faktorene være null. Eksponentialfunksjonen e^{-x} blir aldri null, så den eneste muligheten er at $1 - x = 0$, noe som inntreffer når $x = 1$.

x-koordinaten til maksimumspunktet er altså 1. For å finne y-koordinaten, må vi sette $x = 1$ inn i funksjonsuttrykket $f(x) = xe^{-x}$. Vi får da $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Koordinatene til maksimumspunktet er altså $\left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}\right)$.

Alle andre x-verdier enn $x = 1$ vil med andre ord gi <u>lavere</u> funksjonsverdi enn $\frac{1}{e}$.

Du lurer kanskje på hvordan vi kan være så sikker på at punktet $\left(1, \frac{1}{e}\right)$ er et maksimumspunkt og ikke et minimumspunkt? Dette kan vi finne ut ved å kontrollere fortegnet for den deriverte rundt $x = 1$. Da ser vi at $x < 1$ gir $\frac{df}{dx} = (1-x)e^{-x} > 0$ (stigende kurve) mens $x > 1$ gir $\frac{df}{dx} = (1-x)e^{-x} < 0$ (synkende kurve). OK?

Eksempel 5.2:

Finn ved hjelp av derivasjon alle ekstremalpunkter til funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{3}{2}x}{x-2}$ (figur 4-2). Bruk fortegnet til den deriverte til å angi hva som er maks- og min-punkt.

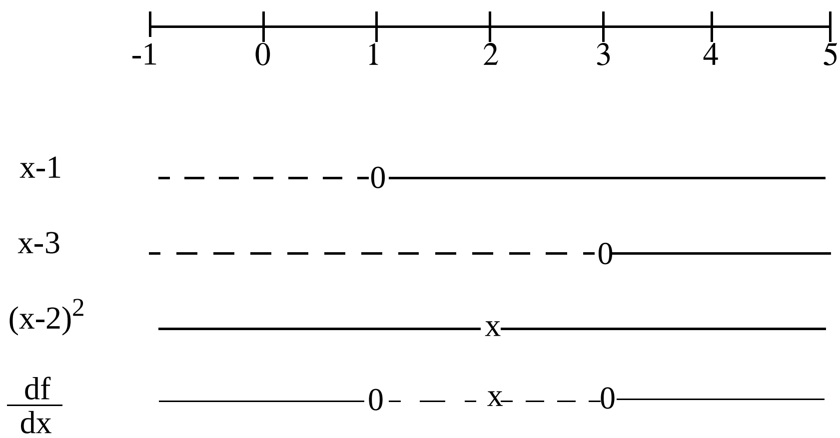
Løsning: Vi deriverer og får $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\left(2x - \frac{3}{2}\right)(x-2) - \left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) \cdot 1}{(x-2)^2} =$

$$\frac{\left(2x^2 - 4x - \frac{3}{2}x + 3\right) - \left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - \frac{11}{2}x + 3 - x^2 + \frac{3}{2}x}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

Setter $\dfrac{df}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ som gir $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = 3 \vee 1$

For å sjekke om disse punktene er maksimum eller minimum, kan vi sette opp et fortegnsskjema for den deriverte. Det er da veldig kjekt at $\dfrac{df}{dx}$ er faktorisert. Faktorisering av telleren gir

$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, og fortegnsskjemaet blir dermed seende slik ut:



Forklaring: Heltrekt strek betyr > 0 og stiplet strek betyr < 0. 0 står for null i teller mens x betyr null i nevner. Da ser vi at $f(x)$ må ha et maksimumspunkt for $x = 1$ og et minimumspunkt for $x = 3$. Siden $f(1) = \dfrac{1}{2}$ og $f(3) = \dfrac{9}{2}$, blir punktet $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et maksimumspunkt og $\left(3, \frac{9}{2}\right)$ et minimumspunkt for $f(x)$. Vi ser at dette stemmer veldig bra med figur 4-2.

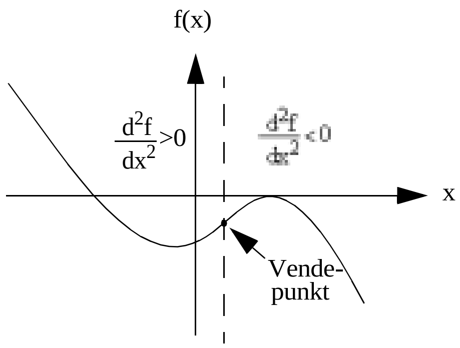
Vendepunkter

Vi vet at når vi deriverer en funksjon $f(x)$, får vi en ny funksjon $\frac{df}{dx}$ som angir stigningstallet til $f(x)$ i ethvert punkt. Når $f(x)$ er økende er $\frac{df}{dx} > 0$, og når $f(x)$ er minkende er $\frac{df}{dx} < 0$.

Når vi deriverer $\frac{df}{dx}$ igjen, får vi den andrederiverte til $f(x)$ som betegnes som $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Det er litt vanskelig å beskrive hva denne funksjonen gir uttrykk for, men vi kan være enige om to ting:

Når $\frac{df}{dx}$ er økende er $\frac{d^2 f}{dx^2} > 0$, og når $\frac{df}{dx}$ er minkende er $\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$. Sagt på en litt annen måte: Når grafen til $f(x)$ er blid, er $\frac{d^2 f}{dx^2} > 0$, men når grafen til $f(x)$ er sur, er $\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$.

Der $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$, har grafen et *vendepunkt*. Se figur.



Eksempel 5.3:

Finn koordinatene til vendepunktet til funksjonen $f(x) = xe^{-x}$ fra eksempel 5.1.

Løsning: I og med at $\frac{df}{dx} = (1-x)e^{-x}$, blir $\frac{d^2 f}{dx^2} = (-1)e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$

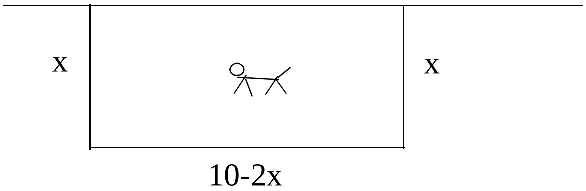
Setter $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ for å finne vendepunktet. Får da $x = 2$ som gir koordinatene $(\mathbf{2}, \mathbf{2e^{-2}})$

Praktiske eksempler

Eksempel 5.4:

Linda skal lage en lufteplass for hunden sin. Innhegningen skal ha form som et rektangel og skal stå inntil husveggen. Hun har 10 meter gjerde til rådighet. Hvor stort er det størst mulige arealet hunden kan få å boltre seg på?

Løsning: Først må vi tegne en figur der vi setter på de kjente størrelsene:



Innhegningens lengde er $10 - 2x$ fordi gjerdets totale lengde skal være 10 meter.

Nå blir innhegningens areal $A(x) = x \cdot (10 - 2x) = 10x - 2x^2$

Vi deriverer og får: $\frac{dA}{dx} = 10 - 4x$

Innhegningens areal blir størst når $\frac{dA}{dx} = 0$. Dette inntreffer når $x = 2,5$ meter.

Til slutt finner vi $A(2,5) = 10 \cdot 2,5 - 2 \cdot 2,5^2 = 25 - 12,5 = 12,5$

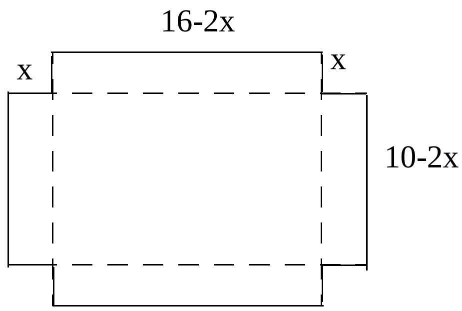
Det største arealet hunden kan få er altså $\mathbf{12,5}\boldsymbol{m}^{\mathbf{2}}$

Når dere kommer ut for problemstillinger der ulike størrelser skal være størst eller minst mulig, kan dere med en gang begynne å tenke derivasjon. Finn først et funksjonsuttrykk for størrelsen, derivér funksjonen og sett så den deriverte lik null. Her fikk vi bare ett svar, $x = 2,5$ meter, men noen ganger (som i neste eksempel), kan vi komme ut med flere svar. Vi må da finne ut hvilket av svarene som er det riktige sett ut ifra den praktiske oppgaven vi jobber med.

Eksempel 5.5:

Du skal lage en eske av en rektangulær papplate på 16x10 cm ved å klippe bort et kvadrat med sidekant x cm fra hvert hjørne av plata. Hvor stor må x være for at eskas volum skal bli størst mulig?

Løsning: Først må vi tegne figur:



Vi ser av figuren at volumet til eska blir $V(x) = x(16-2x)(10-2x) = 160x - 52x^2 + 4x^3$

Da er $\frac{dV}{dx} = 160 - 104x + 12x^2$

Så setter vi $\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Rightarrow x = \frac{104 \pm \sqrt{104^2 - 7680}}{24}$,

og får $x = \frac{104 \pm \sqrt{3136}}{24} = \frac{104 \pm 56}{24} = \frac{20}{3} \vee 2$

Vi skjønner at $x = \frac{20}{3}$ må forkastes fordi vi ikke kan klippe vekk hjørner større enn 5 cm.

Derfor må $x = \mathbf{2cm}$ være det riktige svaret.

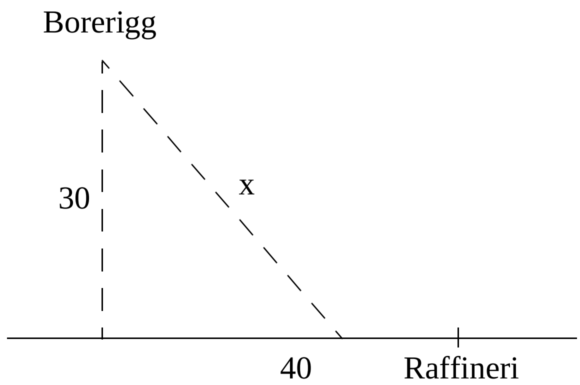
Eksempel 5.6:

Det skal legges en rørledning fra en borerigg ute på sjøen til et raffineri ved kysten. Boreriggen ligger 30 km fra den rette kystlinja. Raffineriet ligger 40 km fra det punktet på land som ligger nærmest boreriggen. Kostnadene forbundet med rørlegging til sjøs er 500 000 kr/km og til lands 300 000 kr/km.

a)Tegn figur og utled en formel $K(x)$ for rørledningens totale kostnad, der x er antall kilometer ledningen legges i sjøen.

b)Bestem hvordan rørledningen bør legges for at totalkostnaden skal bli minst mulig.

Løsning:a)



Ut fra figuren vil strekningen til sjøs bli x km og strekningen på land $40 - \sqrt{x^2 - 900}$ km.

Totalkostnaden blir dermed: $\boldsymbol{K(x) = 500000x + 300000(40 - \sqrt{x^2 - 900})}$

b)Må derivere $K(x)$ for å finne minimumspunkt:

$$\frac{dK}{dx} = 500000 + 300000 \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 900}} \cdot 2x\right) = 500000 - \frac{300000x}{\sqrt{x^2 - 900}}$$

$$\frac{dK}{dx} = 0 \Rightarrow 500000\sqrt{x^2 - 900} - 300000x = 0 \Rightarrow 5\sqrt{x^2 - 900} = 3x$$

Kvadrerer begge sider:

$$25(x^2 - 900) = 9x^2 \Rightarrow 25x^2 - 22500 = 9x^2 \Rightarrow 16x^2 = 22500 \Rightarrow$$

$$x^2 = 1406,25 \Rightarrow x = 37,5km$$

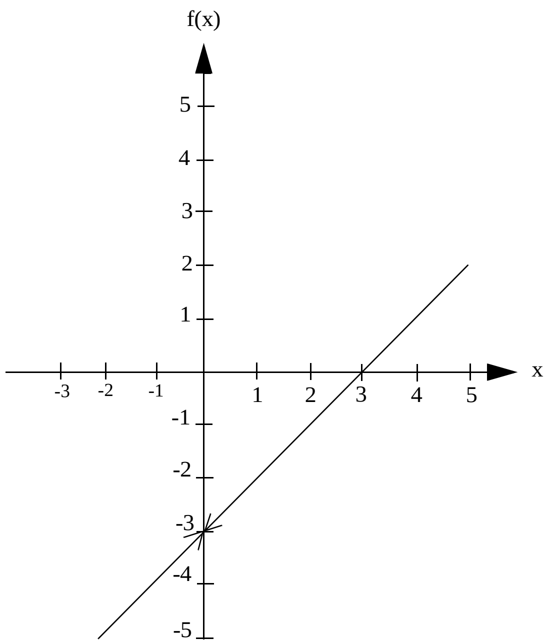
Strekningen på land blir da $40 - \sqrt{37,5^2 - 900} = \boldsymbol{17,5km}$

Grenseverdier

Hva er egentlig forskjellen på uttrykkene $\frac{x^2 - 3x}{x}$ og $x - 3$?

Ingenting, vil de fleste si. Brøken $\frac{x^2 - 3x}{x}$ kan jo forkortes med x og bli til $x - 3$.

Det er jo i og for seg riktig, men hvis vi skal være pinlig nøyaktig må vi da forutsette at $x \neq 0$. Uttrykket $\frac{x^2 - 3x}{x}$ er ikke definert for $x = 0$, så hvis vi vil tegne grafen $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x}$, må den bli seende slik ut:



Legg merke til de to pilene ved punktet (0,-3). Disse indikerer at funksjonen ikke er definert for $x = 0$, men at funksjonsverdien nærmer seg -3 når x går mot null. Vi skriver dette slik: $\lim_{x \to 0} f(x) = -3$, og leser det slik: Grenseverdien til $f(x)$ når x går mot null, er lik -3.

Vi har sjelden behov for å benytte grenseverdier for mange vanlige funksjoner. Hvis vi har funksjonen $g(x) = x^2 + \frac{6}{x}$, kan vi i stedet for å skrive $\lim_{x \to 2} x^2 + \frac{6}{x}$ rett og slett skrive $g(2)$. Vi må derimot benytte grenseverdier når funksjonen ikke er definert for den x-verdien vi er interessert i, (som $\frac{x^2 - 3x}{x}$ når $x \to 0$), eller når vi skal finne hvilken verdi funksjonen går mot når x nærmer seg $\pm\infty$.

Enkelte ganger har ikke funksjonen noen grenseverdi når x nærmer seg den spesifiserte verdien. Dette inntreffer når funksjonsverdien går mot uendelig, for eksempel $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$, eller når funksjonen "ikke greier å bestemme seg", for eksempel $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$. I begge disse tilfellene sier vi at grenseverdien ikke eksisterer.

Eksempel 5.7:

Prøv etter beste evne å bestemme følgende grenseverdier:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 2x - 1}$

Løsning: a) Vi kan begynne med å sette inn $x = 1$ i funksjonsuttrykket og se om vi får et entydig svar. Vi setter da dette svaret i parentes etter som det bare er et "uoffisielt" svar. Vi skriver da:

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} = \left(\frac{2}{0}\right)$ Hvis vi tenker oss om ørlite grann finner vi ut at $\frac{2}{0} \to \infty$

Dette betyr at $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} = \left(\frac{2}{0}\right) \to \infty$, og vi må da konkludere med at grense-

verdien ikke eksisterer.

b) Vi prøver samme taktikk som vi hadde suksess med i a): $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Men hva er egentlig $\frac{0}{0}$? Dette uttrykket kan faktisk være alt mellom himmel og jord. For å finne ut hva det blir, kan vi faktorisere telleren slik at det blir mulig å forkorte de faktorene som gir null i både teller og nevner. Vi kan da tenke slik:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} x - 6 = \mathbf{-7}$$

c) Her skal $x \to \infty$, og da finner vi ikke ut noe som helst, fordi $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 2x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Men når x blir så voldsomt stor, kan vi regne med at x^2-leddene vil dominere over både x-leddene og konstantleddene. Vi kan sannsynliggjøre dette matematisk ved å dele med x^2 i

teller og nevner: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 2x - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}$

l'Hôpitals regel

Det finnes en metode for å komme fram til grenseverdiene når vi får $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$ ved innsetting. Denne metoden er kjent som l'Hõpitals regel og er slik: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

NB! Denne formelen gjelder <u>bare</u> når ren innsetting gir $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$! (Og dette er jo også de eneste tilfellene der vi har bruk for en sånn formel.)

Eksempel 5.8:

Benytt l'Hôpitals regel til å finne grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(3-x)}$ b) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(e^t - e^{-t})^2}{t\sin t}$ c) $\lim\limits_{v \to \infty} v(\pi - 2arc\tan v)$

Løsning: a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(3-x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x}{\frac{1}{3-x} \cdot (-1)} = \lim\limits_{x \to 2} -2x(3-x) = \mathbf{-4}$

b)

$$\lim_{t \to 0} \frac{(e^t - e^{-t})^2}{t\sin t} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{2(e^t - e^{-t}) \cdot (e^t + e^{-t})}{1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t} = \lim_{t \to 0} \frac{2(e^{2t} - e^{-2t})}{\sin t + t\cos t} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Vel, da får vi prøve en gang til: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{2(e^{2t} - e^{-2t})}{\sin t + t\cos t} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$\lim_{t \to 0} \frac{2(2e^{2t} + 2e^{-2t})}{\cos t + 1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t)} = \lim_{t \to 0} \frac{4(e^{2t} + e^{-2t})}{2\cos t - t\sin t} = \mathbf{4}$$

c)Etter som $\lim\limits_{v \to \infty} arc\tan v = \frac{\pi}{2}$, blir $\lim\limits_{v \to \infty} v(\pi - 2arc\tan v) = \infty \cdot 0$, altså en høyst uforutsigbar størrelse. Vi får lage oss en brøk av uttrykket:

$$\lim_{v \to \infty} v(\pi - 2arc\tan v) = \lim_{v \to \infty} \frac{\pi - 2arc\tan v}{\frac{1}{v}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{v \to \infty} \frac{\frac{-2}{1+v^2}}{-\frac{1}{v^2}} =$$

$$\lim_{v \to \infty} \frac{2v^2}{1+v^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{v \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{v^2} + 1} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

Oppgaver

17. Gitt funksjonen $f(x) = xe^{-2x}$.
Det skal i hele oppgaven regnes med eksakte størrelser.

a) Finn koordinatene til funksjonens maks.punkt.

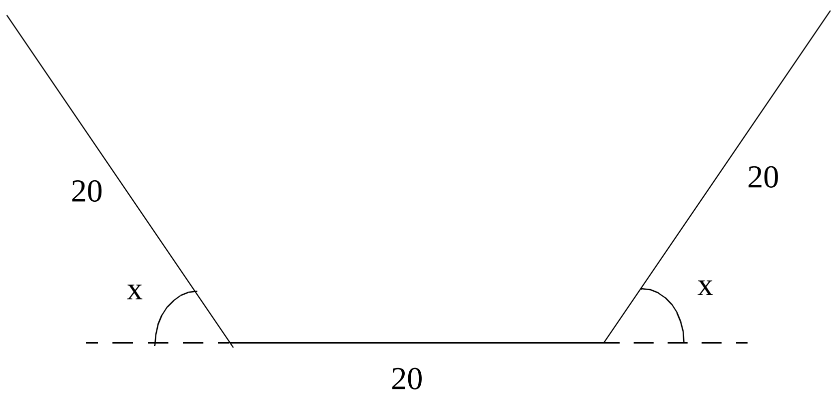
b) Finn koordinatene til funksjonens vendepunkt.

c) Finn likningen for tangenten til grafen i vendepunktet.

d) Finn koordinatene til det punktet der tangenten i vendepunktet skjærer tangenten i maks-punktet.

18. En kreftpasient får injisert cellegift. Giftkonsentrasjonen i blodet t timer etter injeksjonen er gitt av likningen $R(t) = te^{-\frac{t^2}{8}}$. Finn den største giftkonsentrasjonen i blodet etter injeksjonen.

19. Du skal lage en fôrkrybbe av en blikkplate med bredde 60 cm ved å brette plata i tre like brede deler (se figur). I hvilken vinkel må plata brettes for at fôrkrybba skal få så stort tverrsnittsareal som mulig?



20. Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - 1}{\arctan 3x}$

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^{2x + a} - e^{3a}}{e^x - e^a}$ (a er en konstant)

Ekstraoppgaver

E20. Finn og klassifisér ekstremalpunktene til følgende funksjoner:

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-3x+4}$

b) $g(x) = (x^2-2x)\cdot e^x$

c) $h(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\quad x \in [0, 2\pi\rangle$

E21. Gitt arealet F i første kvadrant avgrenset av funksjonen $f(x) = 4 - x^2$ og begge koordinataksene.

a) Hvor stort er det største rektanglet som kan plasseres innenfor F? Gå ut fra at to av sidene i rektanglet ligger på koordinataksene.

b) Hvor stort er det største trapeset som kan plasseres innenfor F? Gå ut fra at det ene av trapesets parallelle sider ligger på x-aksen.

E22. Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{3x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}$ d) $\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{\ln x-2}{1-\ln\sqrt{x}}$

E23. En idrettsplass består av en rektangulær fotballbane med en halvsirkel i hver ende. Løpebanen rundt hele idrettsplassen skal være 400 meter lang.

Hvordan må de to lengdene x og y på figuren velges for at fotballbanens areal skal bli størst mulig?

E24. Du er ute og fisker i en robåt 3 km fra det nærmeste punktet A på en lang rett strandlinje. Hjemmet ditt ligger ved stranda 4 km fra punktet A. Du får plutselig beskjed om at du må være hjemme om to timer. Har du mulighet til å rekke dette hvis du regner med at du kan ro med en fart på 30min/km og gå med en fart på 10min/km?

6 Integrasjon

Ubestemte integraler

Integrasjon (eller antiderivasjon) er en teknikk vi får svært mye bruk for i matematikken. En aktuell problemstilling kan være: Hvilken funksjon $f(x)$ blir x^4 når vi deriverer den? På matematisk form skriver vi dette slik: $f(x) = \int x^4 dx$, der tegnet $\int$ kalles integrasjonstegn, mens vi kan betrakte dx-en som "pynt" inntil videre. Etter litt prøving og feiling ender vi opp med at $f(x)$ kan være $\frac{1}{5}x^5$. Men vi må være klar over at det finnes flere funksjoner som har x^4 som derivert. Felles for dem er imidlertid at de alle kan skrives som $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$, der C er en valgfri konstant som vi rett og slett kaller integrasjonskonstanten.

Vi kan forsøke å finne en generell formel for den integrerte av x^n. Vi må da ta utgangspunkt i derivasjonsformelen $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ som gir $\int n \cdot x^{n-1} dx = x^n + C'$ Dersom vi deler med n får vi $\int x^{n-1} dx = \frac{x^n + C'}{n} = \frac{x^n}{n} + C$ Utskifting av n med $n+1$ gir oss nå vår første integrasjonsformel: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Vi kan nå enkelt benytte tabellen med derivasjonsformler på side 40 til å lage en tilsvarende tabell med integrasjonsformler. Den blir i så fall seende slik ut:

	1.	2.	3.	4.
$f(x)$	x^n	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$
$\int f(x)dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$e^x + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\sin x + C$

	5.	6.	7.	8.
$f(x)$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\int f(x)dx$	$-\cos x + C$	$\tan x + C$	$arc\sin x + C$	$arc\tan x + C$

Legg merke til tallverditegnet som framkommer i $\ln|x|$! Dette er tatt med fordi vi ikke skal trenge å bry oss om x er positiv eller negativ når vi skal integrere $\frac{1}{x}$.

Ellers kan det kanskje synes unyttig å ha med integrasjonskonstanten i hvert bidige integral, men vi skal senere se at nettopp denne C-en har veldig stor betydning i enkelte oppgaver.

Eksempel 6.1:

Løs følgende integraler:

a) $\int \frac{1}{x^2}dx$ b) $\int \frac{1}{3x}dx$ c) $\int 2\cos u\,du$ d) $\int \sqrt{t}\,dt$

Løsning: a) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = \boldsymbol{-\frac{1}{x} + C}$ i henhold til formel 1 på forrige side.

b) $\int \frac{1}{3x}dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}dx = \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot \ln|x| + C}$ (formel 3)

c) $\int 2\cos u\,du = \boldsymbol{2\sin u + C}$ Her ble det bruk for formel 4.

d) $\int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \boldsymbol{\frac{2}{3}t\sqrt{t} + C}$ (Formel 1 igjen)

Dere kan legge merke til at integrasjonskonstanten kommer til syne i det øyeblikk integrasjonen foretas. Med andre ord: Når $\int$ forsvinner, dukker C opp!

Ellers ser vi at konstante faktorer (som for eksempel $\frac{1}{3}$ i oppg. b)) ikke har noen innflytelse på selve integrasjonen. Vi får ofte bedre oversikt hvis vi setter slike konstanter utenfor integralet:

$$\int \frac{1}{3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3} \cdot \ln|x| + C$$

Det er bare å innse at vi ikke kommer særlig langt innenfor dette temaet ved hjelp av tabellen på forrige side. Hva om integralet ser ut som dette: $\int \cos 2t\,dt$? Her kan vi ikke si at 2-tallet er en konstant faktor som vi kan sette utenfor integralet. Vi må angripe dette integralet ved å se på $2t$ som en kjerne, akkurat som vi gjorde da vi drev og deriverte. Men når vi integrerer, kaller vi det ikke lenger for kjerneregelen, vi kaller det substitusjon.

Substitusjon

Vi kan begynne med å se på $\int \cos 2t dt$ som vi altså ikke kan løse bare ved hjelp av tabellen på side 59. Det vi må gjøre er å lage oss en kjerne (substituere) $z = 2t$, noe som forhåpentligvis gjør integralet enklere å løse. Når vi har foretatt en substitusjon må vi alltid passe på at dt fra det opprinnelige integralet erstattes med en funksjon av dz. Med andre ord: Vi kan ikke lenger se på dt som bare "pynt"!

Dette er ikke så innviklet som det høres ut! Når vi har valgt å substituere $z = 2t$, følger "automatisk" $\frac{dz}{dt} = 2$ (enkel derivasjon), og i neste omgang $dz = 2dt \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dz$

Vi kan da løse integralet slik: $\int \cos 2t dt = \int \cos z \cdot \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}\sin z + C = \mathbf{\frac{1}{2}\sin 2t + C}$

Selve integrasjonen skjer i henhold til tabellen på side 59, men når vi har integrert må vi selvfølgelig huske å innføre den opprinnelige integrasjonsvariabelen t igjen. Dette var en enkel substitusjonsoppgave, men vi skal se at det samme prinsippet kan hjelpe oss til å løse forholdsvis kompliserte integraler.

Eksempel 6.2:

Løs følgende integraler ved hjelp av substitusjon: a) $\int e^{-3x}dx$ b) $\int 6\sqrt{2x-1}\,dx$

Løsning: a) Satser på å substituere $z = -3x$, noe som gir $\frac{dz}{dx} = -3 \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}dz$

Vi får da: $\int e^{-3x}dx = \int e^z \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)dz = -\frac{1}{3}e^z + C = \mathbf{-\frac{1}{3}e^{-3x} + C}$

b) Her lønner det seg å velge innholdet i rottegnet som kjerne:

$$z = 2x - 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dz$$

Integralet kan da løses på følgende måte:

$$\int 6\sqrt{2x-1}\,dx = \int 6\sqrt{z} \cdot \frac{1}{2}dz = \int 3z^{\frac{1}{2}}dz = 3 \cdot \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \mathbf{2(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C}$$

Eksempel 6.3:

Løs følgende integraler ved hjelp av fornuftige substitusjoner:

a) $\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}dt$ b) $\int \frac{1}{v^2+4v+5}dv$ c) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

Løsning: a) Her vil det også lønne seg å bruke innholdet i rottegnet som kjerne:

$$z = 1+t^3 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 3t^2 \Rightarrow dt = \frac{dz}{3t^2}$$

Da blir $\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}dt = \int \frac{t^2}{\sqrt{z}} \cdot \frac{dz}{3t^2} = \int \frac{dz}{3\sqrt{z}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \mathbf{\frac{2}{3}\sqrt{1+t^3} + C}$

b) Her må vi aller først finne ut om nevneren kan faktoriseres. Men når vi bruker abc-formelen til å løse likningen $v^2+4v+5 = 0$ kommer vi ut med negativt innhold i rottegnet, og vi må konkludere med at nevneren ikke kan faktoriseres. (Ellers ville delbrøksoppspalting vært en naturlig vei videre.)

Da er det bare en annen mulighet for omskrivning av nevneren. Vi må skrive den om til summen av et kvadrat og et tall: $v^2+4v+5 = (v+2)^2+1$ (Her er det en fordel å huske kvadratsetningene!)

Integralet kan nå løses ved hjelp av substitusjonen $z = v+2 \Rightarrow \frac{dz}{dv} = 1 \Rightarrow dv = dz$

Vi får da:

$$\int \frac{dv}{v^2+4v+5} = \int \frac{dv}{(v+2)^2+1} = \int \frac{dz}{z^2+1} = \arctan z + C = \mathbf{\arctan(v+2) + C}$$

c) Det eneste fornuftige å velge som kjerne her er $z = \ln x$. (Alternativet, $z = x$, må sies å være den tåpeligste substitusjon som noensinne har blitt forsøkt!)

$$z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,dz$$

Integralet kan da løses på denne måten:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{z}{x} \cdot x\,dz = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2 + C = \mathbf{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}$$

Vi ser at vi er avhengig av å ha litt flaks enkelte ganger. I eksempel 6.3a) besto flaksen i at telleren var et t^2-uttrykk slik at vi fikk forkortet bort alle t-ene etter at vi hadde substituert. Når vi blir enda dyktigere kan vi på forhånd se om vi har tilstrekkelig flaks til å løse et gitt integral ved hjelp av substitusjon.

Vi må kikke på et par eksempler til før vi forlater temaet substitusjon.

Før vi går løs på dem kan vi tenke ørlite grann på hva vi kan forvente å få som svar når vi skal integrere et brøkuttrykk. Dersom vi ser tilbake på eksempel 6.3b) ser vi at telleren var en konstant og nevneren av andre grad (og umulig å faktorisere). Da må vi forvente at svaret inneholder arctan på grunn av at $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.

Dersom nevneren er faktoriserbar kan uttrykket delbrøksoppspaltes og bli til to brøker med førstegradsuttrykk i nevneren. Vi tar ikke med eksempler på dette her (det er forholdsvis enkel regning), men bare konstaterer at vi da får to ln-uttrykk i svaret:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Det samme gjelder forøvrig selv om telleren er et førstegradsuttrykk:

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C$$

Men hva om telleren er av første grad og nevneren av andre grad, men ikke faktoriserbar?

Eksempel 6.4:

Løs $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx$ ved hjelp av substitusjon.

Løsning: Vi forsøker å bruke nevneren som kjerne:

$$z = x^2+6x+10 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x+6 \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x+6}$$

Vi får da: $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{x+3}{z} \cdot \frac{dz}{2x+6} = \int \frac{dz}{2z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C =$

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| + C = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(x^2+6x+10) + C}$$

Her kunne vi sløyfe tallverditegnet fordi $x^2+6x+10$ alltid er større enn null.

Her ble altså svaret et ln-ledd, og det er noe vi alltid må forvente når nevneren er en grad større enn telleren. Nå hadde vi en god porsjon flaks akkurat i dette eksemplet, men nå skal vi se at vi er i stand til å løse slike integraler også når flaksen ikke er med oss:

Eksempel 6.5:

Løs $\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}dx$ ved hjelp av substitusjon.

Løsning: Vi kan aller først slå fast at uttrykket x^2+4x+5 ikke kan faktoriseres. Vi prøver i stedet optimistisk med $z_1 = x^2+4x+5 \Rightarrow \frac{dz_1}{dx} = 2x+4 \Rightarrow dx = \frac{dz_1}{2x+4}$

Vi ser da at dette hadde gått glimrende dersom telleren hadde vært $2x+4$ (eller $x+2$). Framgangsmåten hadde da blitt lik eksempel 6.4. Men vi kan faktisk bruke samme strategi her hvis vi "jukser litt" og deler opp integralet på denne måten:

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx - \int \frac{5}{x^2+4x+5}dx$$

Det første integralet kan nå løses med $z_1 = x^2+4x+5$. Da blir

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{x+2}{z_1} \cdot \frac{dz_1}{2x+4} = \int \frac{dz_1}{2z_1} = \frac{1}{2}\ln z_1 + C_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + C_1$$

Det andre integralet løses som eksempel 6.3b): $\int \frac{5}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{5}{(x+2)^2+1}dx$

$z_2 = x+2 \Rightarrow \frac{dz_2}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dz_2$ gir

$$\int \frac{5}{z_2^2+1}dz_2 = 5\arctan z_2 + C_2 = 5\arctan(x+2) + C_2$$

Vi får da totalt: $\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 5\arctan(x+2) + C}$

(Legg merke til at vi her har slått sammen C_1 og C_2 til en ny konstant C.)

I dette tilfellet fikk vi altså et ln-ledd (fordi telleren var en grad lavere enn nevneren), men vi måtte også slite med et arctan-ledd i tillegg.

Substitusjonsmetoden kan redde oss ut av mange vanskelige integrasjonssituasjoner. Men enkelte ganger kommer den likevel til kort. Vi skal nå lære oss å bruke en metode som kalles delvis integrasjon. Dette innebærer at vi deler opp integralet vi skal løse i to enklere integraler for å finne svaret. Når vi behersker både substitusjon og delvis integrasjon i tillegg til delbrøksoppspalting (kapittel 2) kan vi driste oss til å si at vi kan integrere.

Delvis integrasjon

Denne metoden bygger faktisk på produktregelen for derivasjon, $D(u \cdot v) = D(u) \cdot v + u \cdot D(v)$ (side 42/43). Dersom vi integrerer på begge sider av likhetstegnet får vi $u \cdot v = \int D(u) \cdot v + \int u \cdot D(v)$ som gir oss den formelen vi skal benytte for delvis integrasjon: $\int u \cdot D(v) = u \cdot v - \int D(u) \cdot v$

Denne metoden er velegnet når uttrykket som skal integreres er et produkt. Vi må da bestemme hvilken av faktorene som skal være u og hvilken som skal være $D(v)$. Det er svært viktig å velge riktig her.

Eksempel 6.6:

Løs integralene ved hjelp av delvis integrasjon:

a) $\int xe^{2x}dx$ b) $\int t\sin 3t dt$

Løsning: a) Vi velger $u = x \Rightarrow D(u) = 1$ og $D(v) = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$ (Om du ikke ser hva v blir umiddelbart, kan du komme fram ved hjelp av substitusjonen $z = 2x$.)

Nå kan vi bare sette inn i formelen for delvis integrasjon:

$$\int xe^{2x}dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

Dette resultatet kan lett kontrolleres ved hjelp av produktregelen for derivasjon.

b) Vi velger $u = t \Rightarrow D(u) = 1$ og $D(v) = \sin 3t \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3t$

Igjen er det veldig lettvint hvis du ser hva v blir uten å måtte substituere på papiret.

Da gir formelen

$$\int t\sin 3t dt = t \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos 3t\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos 3t\right)dt = \boldsymbol{-\frac{1}{3}t\cos 3t + \frac{1}{9}\sin 3t + C}$$

Det hender ofte at den ene faktoren er selve integrasjonsvariabelen (x eller t). Det vil da nesten uten unntak lønne seg å sette denne faktoren lik u. Hvis vi velger feil vil vi fort oppdage at vi havner i et uføre. Vi kan ta eksempel 6.6a): Hvis vi der velger $u = e^{2x} \Rightarrow D(u) = 2e^{2x}$ og $D(v) = x \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2$, får vi $\int xe^{2x}dx = e^{2x} \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int 2e^{2x} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx$, og da har vi et seriøst problem!

Det er fullt mulig å løse integraler som for eksempel $\int t^2 \cos t dt$ ved hjelp av denne metoden, men da må vi utføre delvis integrasjon to ganger (på grunn av t^2). Vi kan i stedet kikke litt på hvordan vi kan bruke delvis integrasjon selv om vi ikke har noe produkt!

Eksempel 6.7:

Løs følgende integraler ved hjelp av delvis integrasjon:

a) $\int \ln x dx$ b) $\int arc\tan x dx$

Løsning: a) Selv om vi ikke har noe produkt, kan vi alltids late som vi har et: $\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx$

Her må vi velge $u = \ln x \Rightarrow D(u) = \frac{1}{x}$ og $D(v) = 1 \Rightarrow v = x$

Vi får da: $\int \ln x \cdot 1 dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = \boldsymbol{x \ln x - x + C}$

Det er relativt enkelt å kontrollere dette svaret ved hjelp av derivasjon.

b) Igjen kan vi late som vi har et produkt: $\int arc\tan x dx = \int arc\tan x \cdot 1 dx$

Vi må velge $u = arc\tan x \Rightarrow D(u) = \frac{1}{1 + x^2}$ og $D(v) = 1 \Rightarrow v = x$

Dette gir: $\int arc\tan x \cdot 1 dx = arc\tan x \cdot x - \int \frac{1}{1 + x^2} \cdot x dx$

Dette integralet løses ved hjelp av substitusjon: $z = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x$ gir oss:

$$\int \frac{x}{1 + x^2} dx = \int \frac{x}{z} \cdot \frac{dz}{2x} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

Da har vi løst integralet: $\int arc\tan x dx = \boldsymbol{x\, arc\tan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C}$

I hele dette kapitlet har vi konsentrert oss om å finne en funksjon som er den antideriverte til en gitt funksjon. Integraler av denne typen, som for eksempel $\int arc\tan x dx$, kaller vi ubestemte integraler. I neste kapittel skal vi gå litt videre og innføre integrasjonsgrenser. Integralene kan da bli seende slik ut: $\int_0^1 arc\tan x dx$. Slike integraler kaller vi bestemte integraler.

Oppgaver

21. Løs integralene:

a) $\int\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

c) $\int \sin 2x dx$

d) $\int e^{2-x}dx$

22. Under et dragracingstevne holder en av bilene farten $v(t) = 320 - \frac{200000}{(t+25)^2}$ [m/s]

a) Beregn bilens akselerasjon $a(t)$ under konkurransen og vis at farten er null i det øyeblikk starten går (ved t=0)

b) Finn hvor langt bilen har kjørt som funksjon av tiden, altså $s(t)$. Husk integrasjonskonstanten!

c) Hvor lang tid bruker bilen på løpet når banen er 400 meter lang?

d) Hva er farten (km/h) i det mållinjen passeres? Vis at dette er den høyeste farten bilen har under løpet.

23. Løs integralene ved hjelp av substitusjon, delvis integrasjon eller delbrøksoppspalting:

a) $\int xe^{x^2}dx$

b) $\int t\cos 2t dt$

c) $\int \frac{3u-5}{u^2-4u+3}du$

d) $\int \frac{x+2}{x^2-4x+5}dx$

e) $\int \frac{dt}{t(\ln t)^2}$

f) $\int \frac{9u}{(u+2)(u-1)^2}du$

g) $\int arc\sin x dx$

Ekstraoppgaver

E25. Løs integralene:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

b) $\int \frac{2x - 5}{x(x^2 + 4x - 5)} dx$

b) $\int \frac{x - 1}{x^2 - 8x + 17} dx$

d) $\int \frac{x^4 - 4}{x^3 + 2x^2} dx$

e) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x + 3}} dx$

f) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$

g) $\int \cos^3 x \ dx$

h) $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

E26. Du står oppe på ei bru og kaster en stein rett oppover med en utgangsfart på $20 m/s$.

a) Hvor høyt opp kommer steinen når tyngdens akselerasjon er $g = 10 m/s^2$?
(Du kan se bort fra luftmotstanden.)

b) 7 sekunder etter at du kaster steinen lander den i elva under brua. Hvor høy er brua?

E27. Et område er avgrenset av grafen til funksjonen $f(x) = ax$, x-aksen og den loddrette linjen $x = k$, der både a og k er større enn null.

a) Beregn områdets areal uttrykt ved a og k.

b) Hva er likhetene og forskjellene mellom svaret i a) og $\int ax dx$?
I neste kapittel får du en forklaring på hvorfor integrasjon og arealberegning er så tett knyttet opp mot hverandre.

7 Anvendelser av integrasjon

Bestemte integraler

I hele forrige kapittel strevde vi med å løse ubestemte integraler, noe som altså innebærer å finne den antideriverte til en gitt funksjon. Vi skal nå gå over på å løse bestemte integraler, og vi skal da se at svaret vi kommer ut med er et tall, og ikke bare en funksjon med en ukjent C.

Vi kan starte med å se på det bestemte integralet $\int_2^4 (3x-6)\,dx$. Vi må først løse det ubestemte integralet (uten integrasjonskonstant denne gangen), for så å sette inn integrasjonsgrensene 4 og 2 i dette funksjonsuttrykket og til slutt subtrahere dem fra hverandre. Innviklet? Her er vist hvordan et bestemt integral av denne typen kan utregnes og føres:

$$\int_2^4 (3x-6)\,dx \;=\; \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]\Bigg|_2^4 \;=\; \left(\frac{3}{2}\cdot 4^2 - 6\cdot 4\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 2^2 - 6\cdot 2\right) \;=\; 0-(-6) \;=\; 6$$

Legg merke til at både $\int$ og dx forsvinner i det integrasjonen skjer! Og husk å sette inn øvre grense (her 4) først! Dersom du setter inn nedre grense (her 2) først, vil svaret få feil fortegn.

Eksempel 7.1:

Regn ut de bestemte integralene: a) $\int_0^1 x^2\sqrt{x}\,dx$ b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

Løsning: a) Vi løser først det ubestemte integralet: $\int x^2\sqrt{x}\,dx \;=\; \int x^{\frac{5}{2}}dx \;=\; \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

Da blir $\int_0^1 x^2\sqrt{x}\,dx \;=\; \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]\Bigg|_0^1 \;=\; \frac{2}{7} - 0 \;=\; \mathbf{\frac{2}{7}}$

b) Her blir $\int \sin 2x\,dx \;=\; -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, slik at det bestemte integralet blir

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx \;=\; \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos(-\pi) \;=\; \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \;=\; \mathbf{0}$$

Det finnes et lite trick som kan spare oss for litt regnearbeid når vi benytter substitusjon i bestemte integraler. Her kommer et eksempel på hvordan vi kan utnytte dette:

Eksempel 7.2:

Regn ut det bestemte integralet $\int_1^7 x\sqrt{x^2+15}\,dx$

Løsning: Den substitusjonen som vil føre fram i dette tilfellet er $z = x^2 + 15 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x$

Det ubestemte integralet blir da

$$\int x\sqrt{x^2+15}\,dx = \int x\sqrt{z}\cdot\frac{dz}{2x} = \frac{1}{2}\int\sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}} + C$$

"Normalt sett" skulle vi nå innført $x^2 + 15$ i stedet for z igjen, og så satt inn grensene 7 og 1. Men vi sparer oss for litt regnearbeid dersom vi endrer grensene i stedet!!

Etter som substitusjonen vår var $z = x^2 + 15$, kan vi i stedet for $x = 7$ benytte $z = 64$, og i stedet for $x = 1$ kan vi benytte $z = 16$. Vi fører dette slik:

$$\int_1^7 x\sqrt{x^2+15}\,dx = \left[\frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_{16}^{64} = \frac{1}{3}(64\sqrt{64} - 16\sqrt{16}) = \mathbf{\frac{448}{3}}$$

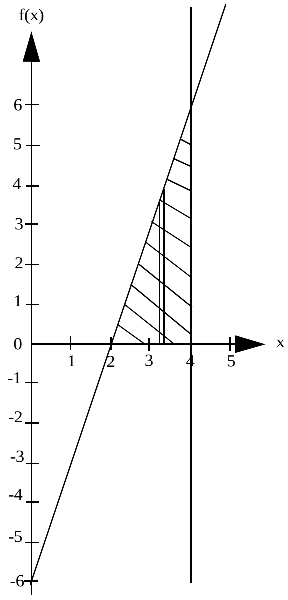
Arealberegning

Det vanligste anvendelsesområdet i forbindelse med integraler er arealberegning.

Vi får ofte oppgaver som lyder noenlunde som følgende: Beregn arealet avgrenset av grafen til funksjonen $f(x) = 3x - 6$, x-aksen og den vertikale linja $x = 4$.

Slike oppgaver kan løses ved hjelp av integrasjon, og det viser seg at det bestemte integralet $\int_2^4 (3x-6)\,dx$ som vi så på innledningsvis gir oss nøyaktig det arealet det spørres etter. Jeg har ikke som formål å bevise denne påstanden, men skal i stedet forsøke å gi noen gode råd for hvordan vi bør tenke når vi skal sette opp et integral på egen hånd.

Det første vi må gjøre er å tegne en figur over problemstillingen. I dette tilfellet er det greit, vi lager oss et koordinatsystem der vi legger inn grafen $f(x) = 3x - 6$ og den rette linja $x = 4$.



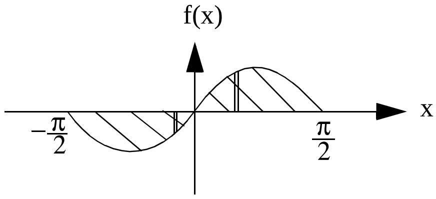
Vi skjønner da at det er det skraverte området på figuren vi skal finne arealet av. Det neste trinnet er å tegne inn en tynn vertikal søyle et eller annet sted innenfor dette arealet (se figur). Denne søylen er nå en liten del av arealet A. Vi kaller den derfor dA. Hvis vi ser på denne søylen som et rektangel (noe som er tillatt hvis søylen er uendelig smal), blir arealet av dette rektanglet $dA = f(x) \cdot dx = (3x - 6)dx$. Nå begynner det å ligne noe!

Vi har nå et uttrykk for det lille arealet dA. Hvis vi ønsker å finne hele arealet A, må vi addere alle de små dA-ene arealet består av. Og det er nettopp dette vi gjør når vi integrerer! Hva med grensene? Den nedre grensen er x-verdien der arealet begynner (i dette tilfellet 2), og den øvre grensen er x-verdien der arealet slutter (altså 4).

I det neste eksemplet skal vi se på de spesielle forhold som oppstår når deler av arealet ligger under x-aksen, og deretter skal vi se at vi ved hjelp av integrasjon er i stand til å beregne andre ting enn areal også.

Eksempel 7.3:

På figuren er skissert et utsnitt av grafen $f(x) = \sin 2x$. Hvor stort er det totale skraverte arealet?



Løsning: Når en del av arealet ligger under x-aksen må vi være spesielt på vakt. Vi kan spørre oss selv: Hvor høyt er det uendelig smale rektanglet i området til venstre for f-aksen? Svaret er $-\sin 2x$! Til høyre for f-aksen er derimot høyden $\sin 2x$, og vi må derfor dele integralet i to:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin 2x dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 1 + 1 = \mathbf{2}$$

Eksempel 7.4:

Et 30 cm langt brød har et tverrsnittsareal gitt av $A(x) = \frac{900 + 30x - x^2}{25}$ (cm^2), der x er avstanden fra brødets ene ende.

a) Hvor stort areal har den største skiven som kan skjæres av brødet?

b) Hvor stort er brødets totale volum?

Løsning: a)Vi må først finne for hvilken x-verdi tverrsnittet er størst, og begynner derfor med å derivere $A(x)$: $\frac{dA}{dx} = \frac{30 - 2x}{25}$. Så setter vi den deriverte lik null, og finner at den største brødskiva oppstår for $x = 15$ og at tverrsnittet da er $A(15) = \frac{900 + 30 \cdot 15 - 15^2}{25} = \mathbf{45cm^2}$

b)Her må vi først sette opp et uttrykk for dV for så å integrere fra $x = 0$ til $x = 30$:

$$dV = A(x) \cdot dx \Rightarrow V = \int_{0}^{30} \frac{900 + 30x - x^2}{25} dx = \frac{1}{25}\left[900x + 15x^2 - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{0}^{30} =$$

$$\left[\frac{27000 + 13500 - 9000}{25}\right] - [0] = \frac{31500}{25} = \mathbf{1260cm^3}$$

Eksempel 7.5:

En elektrisk kilde med spenning $v(t) = V_{max} \cdot \sin\omega t$ (der ω er vinkelhastigheten i rad/sek) forsyner en varmeovn med strømmen $i(t) = I_{max} \cdot \sin\omega t$. Den energimengden dW ovnen mottar i løpet av tidsrommet dt er gitt av $dW = v(t) \cdot i(t) \cdot dt$

a)Finn periodetida T til spenningen uttrykt ved ω.

b)Finn ved integrasjon hvor stor energimengde W ovnen mottar i løpet av en periode.

c)Hvor stor gjennomsnittseffekt mottar ovnen? (Effekten P er gitt av formelen $P = \frac{W}{T}$)

Løsning: a)$v(t) = V_{max} \cdot \sin\omega t$ betyr at en periode av spenningen er tilbakelagt når $\omega t = 2\pi$.

Dette innebærer at periodetida må være $T = \frac{\mathbf{2\pi}}{\omega}$.

b)Vi har gitt at $dW = V_{max}\sin\omega t \cdot I_{max}\sin\omega t \cdot dt = V_{max}I_{max}\sin^2\omega t \cdot dt$, slik at

energimengden over en periode må være gitt av integralet $W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V_{max}I_{max}\sin^2\omega t \cdot dt$

Dette integralet kan løses ved hjelp av omskrivingen $\sin^2\omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$

(Denne formelen bør finnes i enhver formelsamling.)

Vi får da: $W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V_{max}I_{max}\sin^2\omega t \cdot dt = \frac{V_{max}I_{max}}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 1 - \cos 2\omega t dt =$

$$\frac{V_{max}I_{max}}{2}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{V_{max}I_{max}}{2}\left[\left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{2\omega}\sin 4\pi\right) - (0 - 0)\right] =$$

$$\frac{V_{max}I_{max}}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi \boldsymbol{V_{max}I_{max}}}{\omega}$$

c)Benytter oppgitt formel:

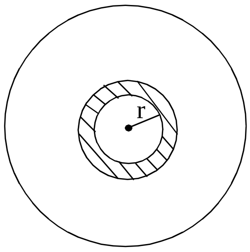
$$P = \frac{W}{T} = \frac{\frac{\pi \boldsymbol{V_{max}I_{max}}}{\omega}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\pi \boldsymbol{V_{max}I_{max}}}{\omega} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\boldsymbol{V_{max}I_{max}}}{\mathbf{2}}$$

Eksempel 7.6:

En rundball av gras er sylinderformet med radius $R = 0,6m$ og høyde $H = 1,2m$. Tettheten varierer med avstanden fra senteraksen etter følgende formel: $\rho = \frac{400}{\sqrt{1-r^2}}\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

Finn ved hjelp av integrasjon rundballens totale masse i kilogram.

Løsning: Vi begynner med å tegne opp rundballen sett fra siden.



Det skraverte området representerer nå et sylinderskall med radius r, høyde H og veggtykkelse dr (bredden av det skraverte området). Grunnen til at vi velger et ringformet volum er selvfølgelig at tettheten er en funksjon av r og derfor blir den samme rundt hele ringen.

Volumet av dette sylinderskallet blir nå $dV = 2\pi rHdr$, og vi kan konkludere med at sylinderskallets masse må være $dm = \rho dV = \frac{400}{\sqrt{1-r^2}} \cdot 2\pi rHdr = 800\pi H \cdot \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}$

Dersom vi integrerer dette uttrykket fra $r = 0$ til $r = 0,6$ vil vi få med massen til alle sylinderskallene i hele rundballen, og da har vi funnet den totale massen til rundballen:

$$M = \int dm = \int \rho dV = 800\pi H \cdot \int_0^{0,6} \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}$$

Her lønner det seg å substituere $z = 1 - r^2 \Rightarrow \frac{dz}{dr} = -2r \Rightarrow dr = -\frac{dz}{2r}$, for da blir

$$\int \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} = \int \frac{r \cdot (-dz)}{\sqrt{z} \cdot 2r} = \int \frac{-1}{2\sqrt{z}}du = \int -\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{z} + C$$

Vi finner svaret enklest ved å bytte integrasjonsgrenser:

$$M = 800\pi H \cdot \int_0^{0,6} \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} = 800\pi H \cdot [-\sqrt{z}]\Big|_1^{0,64} = 800\pi H \cdot (-0,8+1) =$$

$$800\pi \cdot 1,2 \cdot 0,2 = \mathbf{192\pi}$$

Oppgaver

24. Finn arealet avgrenset av de to kurvene $f(x) = x$ og $g(x) = \sqrt{x}$

25. Et flatestykke er avgrenset av grafen til funksjonen $y = 1 - x^2$, x-aksen og de to rette linjene $x = a$ og $x = 2a$. $(0 < a \le \frac{1}{2})$

    Bestem den verdien av a som gir størst mulig flatestykke.

26. Et lysrør trekker strømmen $i(t) = I_{max} \cdot \sin(t - \varphi)$ $[A]$ når spenningen som påtrykkes er $v(t) = V_{max} \sin t$ $[V]$

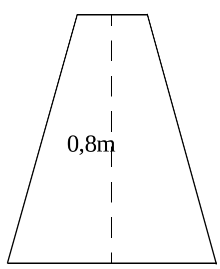
    a) Vis at effekten i lysrøret kan skrives
    $p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_{max} I_{max} (\sin^2 t \cos\varphi - \sin t \cos t \sin\varphi)$ $[W]$

    b) Hvor stor gjennomsnittseffekt P trekker lysrøret?
    (Det er denne effekten som er påstemplet røret, og som vi må betale for)

    Noen hint: $\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$

    $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \qquad \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \qquad \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$

27. Et kjegleformet betongelement har mål som vist på figuren.



    a) Finn volumet av et tynt horisontalt sjikt med tykkelse dx som ligger plassert i en høyde x over elementets grunnflate.

    b) Finn ved hjelp av integrasjon volumet av hele elementet.

Ekstraoppgaver

E28. Et flatestykke er avgrenset av grafen til funksjonen $y = \sin x$, y-aksen og den rette linja $y = 1$. Finn arealet av flatestykket.

E29. Flatestykket F er avvgrenset av kurven $y = e^x$ og de rette linjene $x = 1$ og $y = 1$.

a) Finn arealet av F.

b) F halveres av linjen $x = a$. Vis at a er gitt av $e^a - a = \frac{e}{2}$

c) F halveres av linjen $y = b$. Vis at b er gitt av likningen $4b - 2b\ln b - 2 - e = 0$

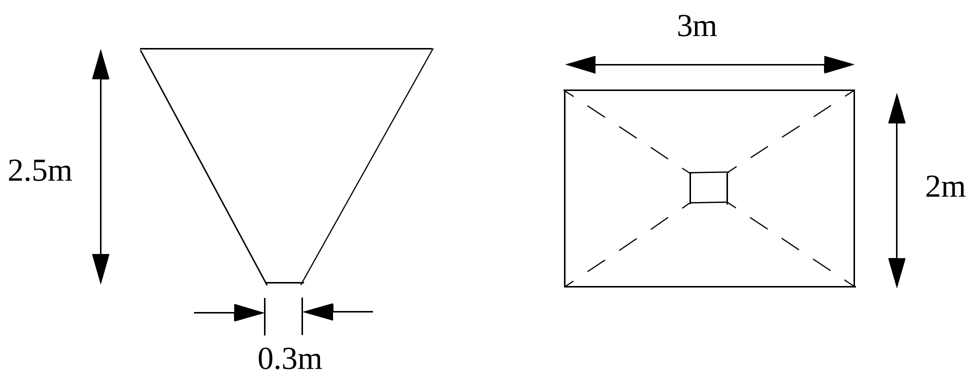
E30. Gitt funksjonen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Finn koordinatene til funksjonens maksimalpunkt.

b) Beregn arealet avgrenset av grafen til $f(x)$, x-aksen og den loddrette linjen gjennom grafens maks-punkt.

E31. En kraftfôrsilo har en kvadratisk bunnplate på 0.3x0.3m og skråner jevnt oppover på alle fire kanter til et rektangulært lokk på 2x3m. Tankens høyde er 2.5m. Se figur.

Tanken sett fra siden: Tanken sett ovenfra:



a) Finn et uttrykk for arealet av et horisontalt tverrsnitt av siloen som ligger i en høyde x over bunnplaten.

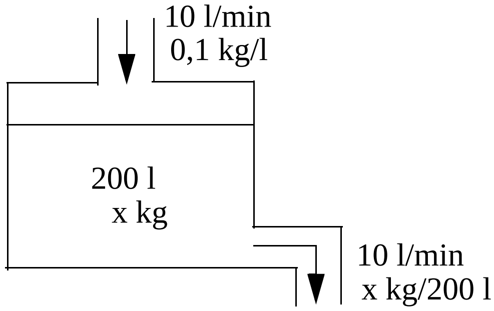
b) Finn ved integrasjon volumet av kraftfôrsiloen.

8 Førsteordens differensiallikninger

Et av de viktigste anvendelsesområdene for både derivasjon og integrasjon er løsning av differensiallikninger. En differensiallikning er en type likning der den deriverte av en funksjon (som oftest $\frac{dy}{dx}$ eller $\frac{dx}{dt}$) inngår. Når vi har funnet selve funksjonen ($y(x)$ eller $x(t)$) har vi løst differensiallikningen. En kan på bakgrunn av dette si at for eksempel $\frac{dy}{dx} = \cos x$ er en differensiallikning. Selve ordet differensiallikning forkortes ofte i dagligtalen til diff-likning, men pass på å ikke forveksle dette med differenslikning som vi lærte om i faget Diskret matematikk og lineær algebra!

Dersom bare den førstederiverte av funksjonen opptrer i likningen (altså f.eks. $\frac{dy}{dx} = \cos x$), har vi en førsteordens diff-likning. Dersom også den andrederiverte finnes, som i likningen $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, har vi en andreordens diff-likning. Vi skal lære oss å løse både første- og andreordens diff-likninger.

Vi kan starte med et klassisk eksempel på en fysisk prosess som gir oss en førsteordens diff-likning. Vi kan tenke oss en tank som ved $t = 0$ inneholder 8 kg salt fordelt på 200 liter vann. Det strømmer hele tiden 10 liter vann med en saltkonsentrasjon på $0,1 kg/l$ inn i tanken pr. minutt og 10 liter velomrørt saltlake ut av tanken pr. minutt. Vi kan da sette opp en saltbalanse for antall kg salt i tanken (x) til enhver tid.



Endring av saltmengde pr. tidsenhet ($\frac{dx}{dt}$) må være lik antall kg salt som kommer inn i tanken pr. tidsenhet minus antall kg salt ut av tanken pr. tidsenhet. Oversatt til matematiske symboler blir dette: $\frac{dx}{dt} = 0,1 \cdot 10 - \frac{x}{200} \cdot 10$. Faktoren $\frac{x}{200}$ er naturligvis saltkonsentrasjonen i tanken til enhver tid. Opplysningen om at det er 8 kg salt i tanken ved $t = 0$ er noe som kalles startbetingelse. Denne skal ikke være med i selve diff-likningen!

Separable diff-likninger

Vi skal nå se hvordan vi kan løse diff-likningen beskrevet på forrige side, og hvordan den mystiske startbetingelsen etter hvert kommer inn i bildet.

Eksempel 8.1:

Løs diff-likningen $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x}{20}$ med startbetingelse $x(0) = 8$.

Løsning: Vi starter med å sette høyresiden på felles brøkstrek før vi *separerer* diff-likningen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20-x}{20} \Rightarrow \frac{dx}{20-x} = \frac{dt}{20}$$

Å separere en diff-likning vil si å samle alle x-ene på den ene siden og alle t-ene på den andre siden av likhetstegnet. Den videre framgangsmåten sier seg da nesten selv.

Vi integrerer begge sider og får: $\int \frac{dx}{20-x} = \int \frac{dt}{20} \Rightarrow -\ln|20-x| + C_1 = \frac{t}{20} + C_2$

Det bør videre være fullt mulig å innse at størrelsen $20 - x$ vil være positiv under hele prosessen og at vi klarer oss fint med bare én C: $-\ln(20-x) = \frac{t}{20} + C$, der $C = C_2 - C_1$.

Nå kan vi bruke startbetingelsen til å bestemme denne C-en!

$$x(0) = 8 \Rightarrow -\ln(20-8) = \frac{0}{20} + C \Rightarrow C = -\ln 12$$

Da gjenstår bare å løse ut $x(t)$:

$$-\ln(20-x) = \frac{t}{20} - \ln 12 \Rightarrow \ln(20-x) = -\frac{t}{20} + \ln 12 \Rightarrow$$

$$20 - x = e^{-\frac{t}{20} + \ln 12} = e^{-\frac{t}{20}} \cdot e^{\ln 12} = 12e^{-\frac{t}{20}} \Rightarrow x = \mathbf{20 - 12}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{20}}}$$

For å være helt sikker i vår sak, kan vi lett kontrollere både startbetingelse og diff-likning:

Startbetingelse: $x(0) = 20 - 12 = 8$

Diff-likning: Venstre side: $\frac{dx}{dt} = -12 \cdot e^{-\frac{t}{20}} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{3}{5}e^{-\frac{t}{20}}$

Høyre side: $1 - \frac{x}{20} = 1 - \frac{20 - 12e^{-\frac{t}{20}}}{20} = 1 - 1 + \frac{3}{5}e^{-\frac{t}{20}} = \frac{3}{5}e^{-\frac{t}{20}}$ OK!

Diff-likningen i eksempel 8.1 viste seg å være en førsteordens separabel diff-likning. Det er vanligvis ganske enkelt å løse slike diff-likninger, men vi tar noen eksempler til for å bli vant til løsningsmetoden:

Eksempel 8.2:

Løs følgende separable diff-likninger:

a) $\frac{dy}{dx} = e^{-2x} \cdot y^2 \qquad y(0) = 2$ b) $\sqrt{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos^2 y \qquad y(0) = \frac{\pi}{3}$

c) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

Løsning: a) Separerer diff-likningen:

$$\frac{dy}{y^2} = e^{-2x}dx \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int e^{-2x}dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Startbetingelsen $y(0) = 2$ gir $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}e^{0} + C \Rightarrow C = 0$

Da blir $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}e^{-2x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2}e^{-2x} \Rightarrow y = \mathbf{2e^{2x}}$

b) Vi starter med å separere diff-likningen:

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx \Rightarrow \tan y = 2\sqrt{x} + C$$

Startbetingelsen $y(0) = \frac{\pi}{3}$ gir nå: $\tan\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{0} + C \Rightarrow C = \sqrt{3}$

Da blir $\tan y = 2\sqrt{x} + \sqrt{3} \Rightarrow y = \boldsymbol{\arctan(2\sqrt{x} + \sqrt{3})}$

c) Denne likningen ser ikke separabel ut, men en liten omskrivning hjelper på:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \Rightarrow e^y dy = e^x dx \Rightarrow \int e^y dy = \int e^x dx$$

Da blir $e^y = e^x + C \Rightarrow y = \mathbf{\ln(e^x + C)}$

Vi skal nå trene litt mer på å sette opp førsteordens differensiallikninger. I det innledende eksemplet på side 77 satte vi først den ukjente saltmengden i tanken lik x før vi satte opp et uttrykk for $\frac{dx}{dt}$. Vi kunne da se på dette som en slags balanse:

Endring i saltmengde pr. min (altså $\frac{dx}{dt}$) = Antall kg salt inn pr. min - Antall kg salt ut pr. min

Denne framgangsmåten fungerer svært ofte i ulike problemstillinger.

Andre ganger kan differensiallikningen være gitt ut fra en fysisk eller kjemisk lov. Vi har et eksempel på dette her:

Eksempel 8.3:

Den kjemiske reaksjonen $F_2 + 2NO_2 \rightarrow 2NO_2F$ følger hastighetsloven $\frac{d}{dt}[NO_2F] = k[F_2][NO_2]$.

Eller sagt på norsk: Økningen i NO_2F-konsentrasjonen pr. tidsenhet er proporsjonal med produktet av konsentrasjonene til F_2 og NO_2.

En gassblanding består i utgangspunktet av F_2 med en konsentrasjon på $1,0M$ og NO_2 med en konsentrasjon på $1,6M$.

Sett NO_2F-konsentrasjonen lik x og utled fra hastighetsloven en differensiallikning for $x(t)$.

Løsning: Vi kaller NO_2F-konsentrasjonen i blandingen $x(t)$, og har dermed startbetingelsen $x(0) = 0$.

Ut fra reaksjonslikningen ser vi at det forbrukes $1M\ F_2$ og $2M\ NO_2$ for å danne $2M\ NO_2F$.

Eller, dersom vi ønsker $xM\ NO_2F$ må vi forbruke $\frac{1}{2}xM\ F_2$ og $xM\ NO_2$.

Dette skulle tilsi at vi etter en viss tid t har følgende konsentrasjoner i gassblandingen:

$$[F_2] = 1,0 - \frac{1}{2}x \qquad [NO_2] = 1,6 - x \qquad [NO_2F] = x$$

Vi kan da bruke hastighetsloven til å sette opp en separabel differensiallikning:

$$\frac{dx}{dt} = k(1-0,5x)(1,6-x) = k(0,5x-1)(x-1,6) = \frac{k}{2}(x-2)(x-1,6)$$

Differensiallikningen blir altså slik: $\mathbf{2\frac{dx}{dt} = k(x-2)(x-1,6)}$ med startbetingelse $\mathbf{x(0) = 0}$.

Eksempel 8.4:

Løs differensiallikningen fra forrige eksempel.

Løsning: Separasjon gir: $\frac{2dx}{(x-2)(x-1,6)} = kdt$

Venstre side må delbrøksoppspaltes, og kjappmetoden gir $\frac{2}{(x-2)(x-1,6)} = \frac{5}{x-2} - \frac{5}{x-1,6}$.

Vi får da: $\int \frac{2dx}{(x-2)(x-1,6)} = \int kdt \Rightarrow \int \frac{5}{x-2} - \frac{5}{x-1,6}dx = \int kdt \Rightarrow$

$$5\ln|x-2| - 5\ln|x-1,6| = kt + C_1 \Rightarrow 5\ln\left|\frac{x-2}{x-1,6}\right| = kt + C_1 \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{x-2}{x-1,6}\right| = 0,2kt + C_2 \Rightarrow \left|\frac{x-2}{x-1,6}\right| = e^{0,2kt + C_2} = C_3e^{0,2kt}$$

Hvor stor kan vi forvente at x blir? Konsentrasjonene fra forrige eksempel var

$[F_2] = 1,0 - \frac{1}{2}x$ $\quad [NO_2] = 1,6 - x$ $\quad [NO_2F] = x$. Her ser vi at det er NO_2 som vil brukes opp først slik at $x = [NO_2F]$ aldri vil overstige $1,6M$.

Da er med andre ord både $x-2$ og $x-1,6$ negative størrelser, slik at vi kan sette

$$\frac{x-2}{x-1,6} = C_3e^{0,2kt}$$

Vi kan nå benytte startbetingelsen til å finne C_3: $x(0) = 0 \Rightarrow \frac{-2}{-1,6} = C_3e^0 \Rightarrow C_3 = 1,25$

Vi står da igjen med $\frac{x-2}{x-1,6} = 1,25e^{0,2kt} \Rightarrow x-2 = 1,25xe^{0,2kt} - 2e^{0,2kt}$

Da blir $x - 1,25xe^{0,2kt} = 2 - 2e^{0,2kt} \Rightarrow x = \frac{2-2e^{0,2kt}}{1-1,25e^{0,2kt}}$

Divisjon med $e^{0,2kt}$ over og under brøkstreken gir $x = \frac{2e^{-0,2kt} - 2}{e^{-0,2kt} - 1,25} = \boldsymbol{\frac{2-2e^{-0,2kt}}{1,25 - e^{-0,2kt}}}$

Vi kan nå enkelt kontrollere at $x(0) = \frac{2-2}{1,25-1} = 0$ og at $x(\infty) = \frac{2}{1,25} = 1,6$ akkurat som vi kom fram til på bakgrunn av det “kjemiske resonnementet” lengre oppe!

Førsteordens lineære diff-likninger

Det er dessverre ikke alle førsteordens diff-likninger som er separable.Vi skal nå se på en annen type som kalles lineære diff-likninger. Denne typen diff-likninger kan alltid skrives på formen $\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = g(x)$. Vi ser at funksjonen y bare framkommer i rendyrket form og som $\frac{dy}{dx}$. Diff-likninger som inneholder f.eks. y^2 og $\sin y$ er med andre ord ikke lineære.

Det kan vises at lineære diff-likninger alltid kan løses ved hjelp av den litt stygge, men geniale formelen

$$\boxed{y = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x) dx} \tag{8.1}$$

der $F(x) = \int f(x) dx$. Det er vel like greit å prøve seg på et eksempel med en gang:

Eksempel 8.5:

Løs den lineære diff-likningen $\frac{dy}{dx} + 4xy = x$ med startbetingelse $y(0) = 1$

Løsning: Her er $f(x) = 4x$, som gir $F(x) = \int 4x dx = 2x^2$

NB! Det er ikke nødvendig å ha med integrasjonskonstanten C når vi skal finne $F(x)$!

Vi prøver likning 7.1: $y = e^{-2x^2} \cdot \int e^{2x^2} \cdot x dx = e^{-2x^2} \cdot \int x \cdot e^{2x^2} dx$

Dette integralet løses ved hjelp av substitusjonen $u = 2x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \Rightarrow dx = \frac{du}{4x}$

Vi får da: $\int x \cdot e^{2x^2} dx = \int x \cdot e^u \cdot \frac{du}{4x} = \int \frac{1}{4} e^u du = \frac{1}{4} e^u + C = \frac{1}{4} e^{2x^2} + C$

(Her må C-en være med!)

Da er altså $y = e^{-2x^2} \cdot \int x \cdot e^{2x^2} dx = e^{-2x^2}\left(\frac{1}{4} e^{2x^2} + C\right) = \frac{1}{4} + Ce^{-2x^2}$

Så var det startbetingelsen:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-2x^2} = \boldsymbol{\frac{3e^{-2x^2} + 1}{4}}$$

Eksempel 8.6:

Løs den lineære diff-likningen $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^2\ln x + 4 \qquad y(1) = -1 \qquad (x > 0)$

Løsning: Først må vi ordne likningen: $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = \frac{2x^2\ln x + 4}{x}$

Da blir $f(x) = -\frac{2}{x}$ som gir $F(x) = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x| = -2\ln x$

Bruker formelen og får: $y = e^{2\ln x} \cdot \int e^{-2\ln x} \cdot \frac{2x^2\ln x + 4}{x}dx$

Litt forenkling: $e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$ og $e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Vi får da: $y = x^2 \cdot \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2x^2\ln x + 4}{x}dx = x^2 \cdot \int \frac{2\ln x}{x} + \frac{4}{x^3}dx$

Benytter substitusjon for å løse $\int \frac{2\ln x}{x}dx : u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = xdu$

Da blir $\int \frac{2\ln x}{x}dx = \int \frac{2u}{x} \cdot xdu = \int 2udu = u^2 + C = (\ln x)^2 + C$

I og med at $\int \frac{4}{x^3}dx = \int 4x^{-3}dx = \frac{4x^{-2}}{-2} + C = -\frac{2}{x^2} + C$, blir nå

$$y = x^2 \cdot \int \frac{2\ln x}{x} + \frac{4}{x^3}dx = x^2 \cdot \left[(\ln x)^2 - \frac{2}{x^2} + C\right] = x^2(\ln x)^2 - 2 + Cx^2$$

Startbetingelsen $y(1) = -1$ gir $1^2(\ln 1)^2 - 2 + C \cdot 1^2 = -1 \Rightarrow C = 1$

Da blir svaret $y = x^2(\ln x)^2 - 2 + x^2 = \mathbf{x^2[(\ln x)^2 + 1] - 2}$

Etter som sida ennå ikke er fullskrevet, kan vi bruke resten av plassen til å sette prøve på denne likningen.

Startbetingelse: $y(1) = 1^2[(\ln 1)^2 + 1] - 2 = 1 \cdot 1 - 2 = -1$ OK!

Venstre side:

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x\left\{2x[(\ln x)^2 + 1] + x^2\left[2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right]\right\} - 2\{x^2[(\ln x)^2 + 1] - 2\} =$$

$$x\{2x(\ln x)^2 + 2x + 2x\ln x\} - 2\{x^2(\ln x)^2 + x^2 - 2\} =$$

$$2x^2(\ln x)^2 + 2x^2 + 2x^2\ln x - 2x^2(\ln x)^2 - 2x^2 + 4 = 2x^2\ln x + 4$$

Høyre side: $2x^2\ln x + 4$ QED: Prøven var nesten vanskeligere enn likningen!

Oppgaver

28. Løs følgende separable diff-likninger:

a) $x\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \qquad y(1) = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = \tan y$

c) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = x \qquad y(0) = 0 \qquad (y > -1)$

29. Løs følgende lineære diff-likninger:

a) $e^x \cdot \frac{dy}{dx} + 2e^x y = 1 \qquad y(0) = 4$

b) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \sqrt{x} \qquad y(9) = 0 \qquad (x > 0)$

c) $\frac{dy}{dx} - y\tan x = \frac{1}{\cos x}$

30. En tank inneholder 90 liter rent vann ved tiden t = 0. Det strømmer inn 12 liter pr. min. av en oppløsning med en konsentrasjon på 0.5 kg salt pr. liter. Samtidig strømmer 12 liter velomrørt oppløsning ut av tanken pr. min. slik at det hele tiden er 90 liter i tanken. Sett saltmengden i tanken til x kg.

a) Vis at x tilfredsstiller differensiallikningen $\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{2x}{15}$

b) Finn x(t) og beregn saltinnholdet i tanken etter 10 min.

c) Samme situasjon som i a), men nå strømmer bare 6 liter saltoppløsning inn i tanken pr. min. Stadig strømmer 12 liter velomrørt oppløsning ut av tanken pr. min. slik at tanken vil tømmes helt i løpet av 15 min.

Vis at x nå tilfredsstiller differensiallikningen $\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{15 - t} = 3$

d) Forutsett rent vann i tanken ved t=0 og finn x(t).

Ekstraoppgaver

E32. Løs følgende separable differensiallikninger:

a) $x\frac{dx}{dt} = \sin t$

b) $t^2\frac{dx}{dt} + x = 1 \qquad x(2) = 2$

(Anta $x > 1$)

c) $t\frac{dx}{dt} = 4x^2 \ln t \qquad x(1) = 1$

E33. Løs følgende lineære differensiallikninger:

a) $\frac{dx}{dt} + 2x = t \qquad x(0) = \frac{3}{4}$

b) $\frac{dx}{dt} - \frac{2x}{t} = t^2 \cos t \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) $\frac{dx}{dt} - x\tan t = 3e^{\sin t} \qquad y(0) = -1$

E34. I en kinosal med 200 personer og volum $V = 1000m^3$ skiftes lufta ut med en hastighet av $10m^3/min$. Frisklufta som kommer inn inneholder $0,04\% CO_2$. I tillegg produserer hver person i salen $980cm^3 CO_2/min$.

a) Vis at y (mengden CO_2 i salen) må tilfredsstille differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = \frac{20-y}{100}$.

b) Løs differensiallikningen når du antar at det er $0,4m^3 CO_2$ i salen når forestillingen starter.

c) Hvor lang tid tar det før CO_2-innholdet i lufta overstiger 1%?

E35. En mann var blitt skutt og drept, og klokken var 08.00 om morgenen da politiinspektøren bøyde seg over liket som lå innerst inne i lagerbygningen. Han målte kroppstemperaturen til $28,0°C$. Han målte også temperaturen på gulvet der liket lå. Den var $15,0°C$.

Han antok at temperaturen i lagerbygningen hadde vært konstant de siste timene, og at kroppstemperaturen hele tiden hadde sunket proporsjonalt med temperaturdifferansen mellom liket og omgivelsene. Disse antagelsene ledet fram til differensiallikningen

$\frac{dT}{dt} = -k(T-15)$, der k er en konstant. Kl. 0900 målte han kroppstemperaturen på nytt. Den var da sunket til $27,0°C$.

Kan du ut fra disse målingene finne ut når mannen ble drept dersom du antar at kroppstemperaturen var $37,0°C$ mens han levde?

9 Andreordens differensiallikninger

I forrige kapittel ble det nevnt at en diff-likning er av andre orden når den andrederiverte inngår i likningen. En andreordens diff-likning kan med andre ord være svært vanskelig å løse. For at vi skal slippe å grave oss helt ned i uoverkommelige problemer er det nødvendig å begrense omfanget en god del. Vi velger derfor å holde oss til den typen oppgaver som kalles andreordens differensiallikninger med konstante koeffisienter. Konstante koeffisienter betyr at de faktorene som står foran $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ og y alle er konstanter. Diff-likningen $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ har med andre ord konstante koeffisienter, mens $\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ ikke har det.

Vi skal først lære hvordan vi løser likninger av typen $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, før vi krydrer litt med å innføre en funksjon av x i stedet for 0 på høyresiden.

Andreordens homogene diff-likninger

Vi sier at den andreordens diff-likningen $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ er homogen fordi at høyresiden er 0. Slike likninger er veldig enkle å løse. Det første skrittet er å sette opp en *karakteristisk likning*. Dette er en andregradslikning på formen $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ der a er koeffisienten foran $\frac{d^2y}{dx^2}$, b er koeffisienten foran $\frac{dy}{dx}$ og c er koeffisienten foran y.

I tilfellet $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ blir den karakteristiske likningen seende slik ut:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-12)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 3 \vee -1$$

Karakteristisk likning gir i dette tilfellet to ulike reelle løsninger $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -1$. Vi kan da (tro det eller ei!) sette opp løsningen på diff-likningen direkte: $y = Ae^{3x} + Be^{-x}$

Her er A og B to ukjente konstanter (noe som vi må regne med når vi har en andreordens diff-likning). For å finne den konkrete løsningen (uten A-er og B-er), må vi altså ha gitt to startbetingelser. Det er da mest vanlig å få oppgitt $y(0)$ og $y'(0)$.

Eksempel 9.1:

Løs differensiallikningen $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 14y = 0 \qquad y(0) = 3 \qquad y'(0) = -3$

Løsning: Vi starter med den karakteristiske likningen $\lambda^2 + 5\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = -7$

Løsningen må altså være på formen $y = Ae^{2x} + Be^{-7x}$

A og B kan bestemmes ved hjelp av startbetingelsene.

Regner først ut $\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} - 7Be^{-7x}$.

Vi får da: $\begin{bmatrix} y(0) = 3 \\ y'(0) = -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A + B = 3 \\ 2A - 7B = -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = 2 \\ B = 1 \end{bmatrix}$

Svaret blir altså $y = \mathbf{2e^{2x} + e^{-7x}}$

Dette var jo egentlig veldig greit, men hva skjer dersom innholdet i rottegnet (i abc-formelen) blir negativt?

Dette forekommer ganske ofte, og vi vil da alltid ha to kompleks konjugerte λ-verdier, altså $\lambda = \alpha \pm j\beta$. Med Eulers formel $e^{jx} = \cos x + j\sin x$ i bakhodet kan det vises at løsningen på diff-likningen i slike tilfeller blir $y = e^{\alpha x}(A\cos x + B\sin x)$.

Det blir faktisk ikke helt bra om innholdet i rottegnet blir nøyaktig 0 heller. Vi får da to like reelle tall λ som svar på den karakteristiske likningen, og i følge teorien fra forrige side skulle løsningen da bli $Ae^{\lambda x} + Be^{\lambda x} = Ce^{\lambda x}$. Dette kan ikke være riktig, for vi skal alltid ha to ukjente konstanter når vi løser en andreordens diff-likning!

I dette spesialtilfellet med to like λ-verdier blir svaret derimot $y = (Ax + B)e^{\lambda x}$.

Vi kan nå sammenfatte alt dette i en liten tabell:

Løsninger på karakteristisk likning:	Løsning på diff-likningen:
1. To ulike reelle løsninger $\lambda_1 = \lambda_2$	$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$
2. To like reelle løsninger $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y = (Ax + B)e^{\lambda x}$
3. To kompl. konj. løsninger $\lambda = \alpha \pm j\beta$	$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Tabell 9–1: Løsning av andreordens homogene diff-likninger

Eksempel 9.2:

Løs den andreordens diff-likningen $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$

Løsning: Den karakteristiske likningen blir $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Vi har altså tilfelle 2 i tabell 8.1 og løsningen må da bli $y = \boldsymbol{(Ax + B)e^{4x}}$

Eksempel 9.3:

Løs diff-likningen $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0 \qquad y(0) = -1 \qquad y'(0) = 4$

Løsning: Karakteristisk likning:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm j6}{2} = 2 \pm j3$$

Vi ser at dette er tilfelle 3 med $\alpha = 2$ og $\beta = 3$. Løsningen må med andre ord være

$$y = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

Etter som vi her har gitt startbetingelser skal vi bruke disse for å finne A og B. Finner først

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + e^{2x}(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) =$$

$e^{2x}[(2A + 3B)\cos 3x + (2B - 3A)\sin 3x]$ Da kan vi bruke startbetingelsene:

$$\begin{bmatrix} y(0) = -1 \\ y'(0) = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \cdot 1 + B \cdot 0 = -1 \\ 2A + 3B = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = -1 \\ B = 2 \end{bmatrix}$$

Løsningen blir altså: $y = \boldsymbol{e^{2x}(2\sin 3x - \cos 3x)}$

Andreordens inhomogene diff-likninger

Vi har så langt sett bare på homogene andreordens diff-likninger, altså likninger der høyre-siden er 0. Vi skal nå gå videre og forsøke å løse diff-likninger der høyresiden kan være for eksempel x^2 eller $\sin x$. Slike likninger kaller vi inhomogene diff-likninger.

En inhomogen diff-likning ser altså slik ut: $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = r(x)$, der $r(x) \neq 0$

Løsningen til en inhomogen diff-likning består av to deler, $y = y_h + y_p$.

y_h kalles den *homogene løsningen*, og er løsningen til diff-likningen $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$.

y_p kalles den *partikulære løsningen*, denne kan vi gjette oss til ut fra høyresiden $r(x)$.

Det høres kanskje litt tilfeldig ut at vi kan gjette oss fram til det riktige svaret, men her er det ikke snakk om vill gjetning, det dreier seg om intelligent gjetning! Vi kan formalisere dette ved hjelp av en liten tabell:

Høyre side:	Gjetning:
1. $r(x)=Kx^n$	$y_p=Cx^n+Dx^{n-1}+...+Vx+W$
2. $r(x)=Ke^{\alpha x}$	$y_p=Ce^{\alpha x}$
3. $r(x)=K\cos\beta x$	$y_p=C\cos\beta x+D\sin\beta x$
4. $r(x)=K\sin\beta x$	$y_p=C\cos\beta x+D\sin\beta x$

Tabell 9–2: Løsning av andreordens inhomogene diff-likninger

Vi skal ikke ta for oss oppgaver der høyresiden ser annerledes ut enn i tabellen over, dog kan kombinasjoner av disse (for eksempel $x^2 - 3\sin x$) forekomme.

De ukjente konstantene C,D osv som framkommer i y_p kan alle bestemmes. Til dette bruker vi følgende regel: Den partikulære løsningen y_p skal oppfylle diff-likningen alene! Vi kan altså sette y_p (og selvfølgelig $\frac{dy_p}{dx}$ og $\frac{d^2y_p}{dx^2}$) inn i diff-likningen og på den måten beregne C, D osv som gjør at likningen blir oppfylt.

Eksempel 9.4:

Løs den andreordens inhomogene diff-likningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^3 + 45 \qquad y(0) = 9 \qquad y'(0) = 7$$

Løsning: Vi må først finne den homogene løsningen y_h og starter derfor med den karakteristiske liknin-

gen: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = -1 \vee -2$

Den homogene løsningen blir da $y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

Så var det y_p:

I og med at $r(x) = 4x^3 + 45$ skal vi i følge tabellen få $y_p = Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$

Vi kan videre bestemme konstantene C, D, E og F fordi vi vet at y_p skal oppfylle diff-liknin-

gen alene. Vi beregner først $\frac{dy_p}{dx} = 3Cx^2 + 2Dx + E$ og $\frac{d^2y_p}{dx^2} = 6Cx + 2D$, og setter

så inn i diff-likningen:

$$6Cx + 2D + 3(3Cx^2 + 2Dx + E) + 2(Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) = 4x^3 + 45$$

Vi får da følgende likningssett: $\begin{bmatrix} 2C = 4 \\ 9C + 2D = 0 \\ 6C + 6D + 2E = 0 \\ 2D + 3E + 2F = 45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C = 2 \\ D = -9 \\ E = 21 \\ F = 0 \end{bmatrix}$

Vi får altså at $y_p = 2x^3 - 9x^2 + 21x$

Den totale løsningen er da $y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Be^{-2x} + 2x^3 - 9x^2 + 21x$

Nå kan startbetingelsene brukes til å bestemme A og B.

Deriverer først y: $\frac{dy}{dx} = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x} + 6x^2 - 18x + 21$

Får da: $\begin{bmatrix} y(0) = 9 \\ y'(0) = 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A + B = 9 \\ -A - 2B + 21 = 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A + B = 9 \\ A + 2B = 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = 4 \\ B = 5 \end{bmatrix}$

Svaret blir altså $y = y_h + y_p = \mathbf{4e^{-x} + 5e^{-2x} + 2x^3 - 9x^2 + 21x}$

Vi har nå sett at løsningen til en andreordens inhomogen diff-likning $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = r(x)$ er sammensatt av to deler, $y = y_h + y_p$.

Her er y_h løsningen til den homogene diff-likningen $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$, mens y_p rett og slett er løsningen til den inhomogene diff-likningen $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = r(x)$.

Det er kanskje ikke så vanskelig å innse at $y_h + y_p$ vil oppfylle den inhomogene diff-likningen, for dersom vi setter inn $y_h + y_p$ i stedet for y, vil høyresiden bli $0 + r(x) = r(x)$.

Det spørsmålet som melder seg er derimot: Hvorfor skal vi drasse med oss y_h i svaret dersom y_p oppfyller diff-likningen helt alene?
Svaret på dette spørsmålet er at y_p bare er èn løsning på diff-likningen. Dette er svært sjelden godt nok for oss, vi ønsker alle mulige løsninger!

Vi kan se tilbake på eksempel 9.4, der vi fant at $y_p = 2x^3 - 9x^2 + 21x$ var en løsning til den inhomogene diff-likningen $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^3 + 45$.

Det er selvfølgelig vel og bra det, men y_p er likevel ikke den løsningen vi søker, fordi det i tillegg kreves at $y(0) = 9$ og $y'(0) = 7$. For å tilfredsstille disse to startbetingelsene må vi hente inn den homogene løsningen $y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$. Her har vi to konstanter A og B som vi kan gjøre hva vi vil med for å tilpasse oss de kravene som er gitt i startbetingelsene.

Da skjønner vi kanskje hvorfor både y_p og y_h er nødvendig for å kunne gi en fullstendig løsning på en andreordens inhomogen diff-likning?

Vi trenger nå bare å kjenne èn spesialregel til for å beherske andreordens diff-likninger med konstante koeffisienter: Dersom et ledd i y_p-gjetningen er likt et av leddene i y_h, må dette y_p-leddet multipliseres med x. Hvis det da blir likt det andre leddet i y_h, må det multipliseres med x en gang til.

Eksempel 9.5:

Løs den andreordens inhomogene diff-likningen $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x} - 25\cos 2x$

Løsning: Vi løser først den karakteristiske likningen: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Dette er tilfelle 2 (to like, reelle løsninger) slik at $y_h = (Ax + B)e^{-x}$.

Den partikulære løsningen skulle normalt sett være $Ce^{-x} + D\cos 2x + E\sin 2x$, men siden det første leddet her finnes i y_h, må vi multiplisere dette med x (får da Cxe^{-x}), og siden også dette leddet er representert i y_h må vi multiplisere med x en gang til! Den partikulære løsningen blir da til syvende og sist: $y_p = Cx^2e^{-x} + D\cos 2x + E\sin 2x$.

Vi må nå forsøke å finne konstantene C, D og E, og starter med å derivere y_p to ganger:

$$\frac{dy_p}{dx} = 2Cxe^{-x} - Cx^2e^{-x} - 2D\sin 2x + 2E\cos 2x$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = 2Ce^{-x} - 2Cxe^{-x} - 2Cxe^{-x} + Cx^2e^{-x} - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x$$

Setter inn i diff-likningen og får:

$$2Ce^{-x} - 4Cxe^{-x} + Cx^2e^{-x} - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x + 4Cxe^{-x} - 2Cx^2e^{-x}$$
$$-4D\sin 2x + 4E\cos 2x + Cx^2e^{-x} + D\cos 2x + E\sin 2x = 2e^{-x} - 25\cos 2x$$

Sammentrekning gir:

$$2Ce^{-x} - 3D\cos 2x - 3E\sin 2x - 4D\sin 2x + 4E\cos 2x = 2e^{-x} - 25\cos 2x$$

Likningene blir da slik: $\begin{bmatrix} 2C = 2 \\ -3D + 4E = -25 \\ -3E - 4D = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C = 1 \\ D = 3 \\ E = -4 \end{bmatrix}$

Svaret blir altså: $y = y_h + y_p = (Ax + B)e^{-x} + x^2e^{-x} + 3\cos 2x - 4\sin 2x =$

$$\boldsymbol{(x^2 + Ax + B)e^{-x} + 3\cos 2x - 4\sin 2x}$$

Oppgaver

31. Løs differensiallikningene:

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 5\cos x \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = -9x \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 3$

d) $2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7\dfrac{dy}{dx} + 3y = 5e^{-3x} \qquad y(0) = 4 \qquad y'(0) = -3$

Ekstraoppgaver

E36. Løs følgende andreordens differensiallikninger:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 7$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x - 2\sin x \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = e^x \qquad y(0) = -1 \qquad y'(0) = -4$

Fasit til oppgavene

Kapittel 1

1. $-2 \pm j3$

2.a) 10 b) $1 + j2$

3.a) $z = -0,721 - j1,575$ b) $z = 3 + j3\sqrt{3}$

4.a) $z = \sqrt{34}\angle 2,111$ b) $z = 4\angle -\frac{2\pi}{3}$

5.a) $2\sqrt{2}\angle -\frac{3\pi}{4}$ b) $2\angle -\frac{\pi}{3}$

6. $1\angle \pm 0,723$

Kapittel 2

7. a) $x = 2 \vee x = 3 \vee x = -5$ b) $x = -1 \vee x = 2 \vee x = 7$

8. a) $\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1} + \dfrac{\frac{5}{3}}{x+5}$ b) $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{2x-1}{x^2+4}$

c) $\dfrac{4}{x-3} + \dfrac{3}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1}$ d) $x - 2 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{6}{x+2}$

Kapittel 3

9. a) $f^{-1}(x) = x^2 - 2$ $\quad D_{f^{-1}} = [1, 3]$ $\quad V_{f^{-1}} = [-1, 7]$

c) $(2, 2)$

10. a) $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\ln 3$

b) $x = e + 1$

c) $x = 0 \vee x = \ln 5$

11. $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \pi \vee x = \frac{5\pi}{6}$

12. a) $x = \frac{3}{5}$ $\quad$ b) $x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

13. a) $D_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right>$

b) $f^{-1}(x) = arc\cos e^x$ $\quad D_{f^{-1}} = (-\infty, 0)$ $\quad V_{f^{-1}} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right>$

Kapittel 4

14. d) $\dfrac{df}{dx} = 2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ Stigningstall i P: $\dfrac{1}{2}$ Koordinatene til Q: $\left(\dfrac{9}{4}, -\dfrac{9}{2}\right)$

e) $y = \dfrac{1}{2}x - 6$

15. a) $\dfrac{df}{dx} = 10x^4 - 3x^2 + 8x$ b) $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{8x^3 - 28x^2 - 10x}{(2x-5)^2}$

c) $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{t - \sin 2t}{t^3 \cos^2 t}$ d) $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{2 + \ln t}{2\sqrt{t}}$

e) $\dfrac{dh}{dt} = (6t+9)(t^2+3t+4)^2$ f) $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{3}{4}(x^2-2x)^2(7x^2-8)$

g) $\dfrac{dq}{dx} = (2x - x^2)e^{-x}$ h) $\dfrac{dr}{dx} = \dfrac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

i) $\dfrac{ds}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

16. a) $\dfrac{2}{5}$ b) $t = 2 \Rightarrow \dfrac{68}{25}$ $t = 7 \Rightarrow -\dfrac{4}{7}$ c) $t = \sqrt{21} \approx 4,58$

Kapittel 4

17. a) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2e}\right)$ b) $\left(1, \dfrac{1}{e^2}\right)$ c) $\left(\dfrac{4-e}{2}, \dfrac{1}{2e}\right)$

18. $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

19. $\dfrac{\pi}{3}(60°)$

20. a) $\sqrt{2}$ b) $-\dfrac{1}{6}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $2e^{2a}$

Kapittel 5

21. a) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} + C$ b) $2\sqrt{x} + C$

c) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ d) $-e^{2-x} + C$

22. a) $a(t) = \frac{400000}{(t+25)^3}$ b) $s(t) = 320t - 8000 + \frac{200000}{t+25}$

c) $6,25 sek$ d) $414,72 km/h$

23. a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ b) $\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C$

c) $2\ln|u-3| + \ln|u-1| + C$ d) $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + 4arc\tan(x-2) + C$

e) $-\frac{1}{\ln t} + C$ f) $2\ln\left|\frac{u-1}{u+2}\right| - \frac{3}{u-1} + C$

g) $varc\sin v + \sqrt{1-v^2} + C$

Kapittel 6

24. a) $e - 2$

25. $a = \frac{1}{\sqrt{7}}$

26. b) $P = \frac{V_{max}I_{max}\cos\varphi}{2}$

27. a) $dV = \frac{\pi}{400}(6-5x)^2 dx$ b) $V = \frac{13\pi}{375}$

Kapittel 7

28. a) $y = \tan\left(\ln|x| + \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = arc\sin(Ce^x)$

c) $y = \sqrt{1 + x^2} - 1$

29. a) $y = 3e^{-2x} + e^{-x}$ b) $y = 2x\sqrt{x} - 6x$

c) $y = \dfrac{x + C}{\cos x}$

30. b) $x(t) = 45\left(1 - e^{-\frac{2t}{15}}\right)$ $x(10) \approx 33,1kg$

d) $x(t) = 3t - \frac{1}{5}t^2$

Kapittel 8

31. a) $y = \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}$ b)$y = \cos x + 2\sin x(1 - e^{-x})$

c) $y = \left(5x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x} - x + \frac{2}{3}$ d)$y = 4e^{-\frac{1}{2}x} - xe^{-3x}$

Stikkordregister