MASTEROPPGAVE

Emnekode: ST314 L

Navn på kandidat: Bergljot Opsal Hofstad og Christian Johan Liland

En studie av algebraoppgaver i to lærebøker for 8.trinn basert på den nye læreplanen.

Dato: 09.05.21 Totalt antall sider: 90

NORD universitet

www.nord.no

Forord

Det er med en god blanding av ydmykhet, lettelse, glede og ikke minst stolthet vi nå gjennomfører vårt masterprosjekt, som avslutning på en femårig lærerutdanning. Disse årene har vært svært innholdsrike og vi har lært mye om både oss selv og læreryrket, samtidig som vi har opplevd mye latter, frustrasjon, humørsvingninger, stress, søvnløshet og mestringsfølelse. I fremtiden venter en ny hverdag, hvor vi nå skal stå på den andre siden av innleveringsfrister, vurderinger og kateteret i klasserommet. Dette blir spennende.

Gjennom arbeidet med denne oppgaven har vi fått gå enda mer i dybden på hva algebra er, hvordan det kan brukes og hvorfor det har en viktig plass i læreplanen. Dette vil hjelpe oss i fremtiden som lærere og gjøre oss enda bedre rustet for å kunne utgjøre en forskjell for våre fremtidige elever.

Gjennomføringen av denne utdannelsen og dette prosjektet, ville ikke vært mulig uten alle støttespillerne vi har hatt rundt oss. Vår veileder, Reza Saeidinvar, har bidratt med faglige diskusjoner, nyttig veiledning og gitt oss gode, konstruktive tilbakemeldinger, som igjen har sikret funksjonell, nærmest eksponentiell fremdrift i arbeidet. Kjærester, familie og venner har bidratt med motivasjon, støtte, barnepass, hjemmelagde brød, korrekturlesing, seigmenn og sist, men ikke minst, en stor porsjon tålmodighet. Til dere alle, tusen takk.

Ballstad, 9. mai 2021

Bergljot Opsal Hofstad og Christian Johan Liland

Sammendrag

Denne masteroppgaven handler om algebra i læreverk basert på den nye læreplanen. Gjennom forskningen er målet å finne svar på om de nye læreverkene gir elevene i 8.trinn best mulig forutsetning for å lære algebra. For å finne svar på dette gjennomfører vi en dokumentanalyse av alle oppgavene i to lærebøker basert på LK20[1]. Vi definerer først kategorier basert på teori om algebra, kognitive krav i matematikkoppgaver og kjerneelementene i læreplanen i matematikk. Disse kategoriene og flere analytiske spørsmål har vært utgangspunkt gjennom hele analysen og gir oss svar på problemstillingen vår.

I denne analysen var det kun de oppgavene vi, ut ifra teori om emnet, definerte som algebra som ble videre analysert og kategorisert. Disse resultatene ga oss svar på problemstillingen. 1) I begge bøkene var litt under halvparten av oppgavene definert til å ha innvirkning på elevenes læring av algebra. Den ene boka hadde derimot en jevnere fordeling av disse oppgavene gjennom alle kapitlene i boka. 2) Begge bøkene hadde oppgaver innenfor de fire kognitive nivåene, derimot var det forskjell på hvilke nivå som var vektlagt i bøkene. 3) Begge bøkene hadde oppgaver som inneholdt kjerneelement, men den ene boka hadde en betydelig større andel av kjerneelement enn den andre som også ble fordelt jevnere over alle kapitlene. 4) Begge bøkene hadde oppgaver innenfor de tre algebraiske aktivitetene, men igjen så vi at den ene boken hadde en jevnere representasjon enn den andre. 5) Begge bøkene legger opp til tilpasset opplæring, så mye som en lærebok kan gjøre dette, men på litt forskjellig måte.

Forskningen vår begrenser seg til kun algebraoppgaver og hvordan disse blir presentert i lærebøkene. Begge bøkene vil gi elevene mange oppgaver som kan hjelpe de med forståelsen av algebra. Likevel gir den ene læreboken elevene oppgaver hovedsakelig i ett kapittel som baserer seg i større grad på memorering, repetering og få oppgaver innenfor utforsking og problemløsning. Den andre gir elevene algebraoppgaver i store deler i boka, hvor flere av disse utfordrer eleven, baserer seg på høye kognitive krav og tilrettelegger for varierte algebraiske aktiviteter.

[1] Læreplanverket for kunnskapsløftet.

Abstract

This master thesis deals with algebra in mathematical textbooks based on the new curriculum in Norway. The goal of our study is to see if the new textbooks in secondary school give the students the best opportunity to learn algebra. We try to find answer to our research question by analyzing the algebraic tasks in two commonly used textbooks in 8th grade. We define categories based on the existing theories on algebra, cognitive requirements in mathematical tasks, and the core elements for learning defined by the national curriculum in mathematics. These categories form the basis for analyzing in our study. We define further analytical questions to answer our research question.

The tasks are analyzed into the categories, *algebra*, *connection to* algebra and *not connected to algebra.* Only the tasks in the algebra category are analyzed further based on theory mentioned earlier. The results of this analysis give us answers to our research question. 1) In both of the books a little under half of the tasks are defined to have an impact on the students learning of algebra. However, in one of the books these tasks are evenly distributed over the chapters and the whole book. 2) Both of the books have tasks in every level of cognitive requirements, but the levels are not evenly emphasized in the books. 3) Both of the books have tasks that include the core elements of learning. Again, one of the books has a better representation of them and they are more evenly distributed throughout the chapters. 4) Both of the books have tasks which represent the three levels of algebraic activities, but once again we noticed that one book has a more evenly representation of all the levels. 5) In both books we observed elements that can contribute to differentiated instruction, as much as a textbook can, but the books did this in different ways.

Our study does have its limits as it only regards algebraical tasks. Both books include many tasks that will give students knowledge of algebra. However, one book will introduce algebra mainly in one chapter and the student will meet multiple tasks that demands transformation and that includes low cognitive requirements. The other book will give students algebraical tasks throughout most of the book and many of them challenge the student, makes them explore and include high cognitive requirements.

Innholdsfortegnelse

1.0 Introduksjon

1.1 Bakgrunn for valgt tema

Tidlig i utdanningen vår fant vi ut at vi begge er interesserte i matematikk og at vi har et ønske om å bli gode matematikkundervisere. Gjennom emnet matematikkdidaktikk fikk vi et innblikk i hva som kan være utfordrende for dagens elever og at algebra spesielt er et tema som kan være problematisk for mange. Blant annet var vi begge av den oppfatningen at algebra var begrenset til a) manipulasjon av algebraiske uttrykk, b) likninger og c) øving på algebraiske regneregler. Dette inntrykket endret seg veldig etter bevisstgjøring av at algebra er mye mer enn dette, noe som vekket nysgjerrigheten i oss. Resultatene fra TIMSS[2]-undersøkelsen i 2015 skapte diskusjoner om ungdomsskoleelevers prestasjoner innenfor matematikken. Det kom klart frem at ungdomsskoleelever i Norge skårer godt under gjennomsnittet i algebra (Bergem, 2016, s. 42). Resultatet viser det er rom for forbedring når det kommer til opplæringen i algebra i den norske skole.

I 2020 startet skoler over hele landet med implementering av den nye læreplanen. Fagfornyelsen som den blir kalt, bærer med seg endringer når det kommer til hvordan undervisningen skal foregå, samt at det har blitt innført nye kompetansemål i alle fag. Tidligere gikk kompetansemålene i matematikk over flere år, mens det nå er oppdelte mål for hvert enkelt trinn. I tillegg har fagfornyelsen introdusert kjerneelement i alle fag som beskriver hvordan elevene skal lære og mestre innenfor fagene. Kjerneelementene i matematikk inneholder begrep som problemløsning, utforsking, argumentasjon, generalisering og kontinuerlig utvikling av det matematiske språket (Utdanningsdirektoratet, 2020). Læreplanen i matematikk og den overordna delen er grunnlaget for hvordan vi som lærere skal gjennomføre undervisning. Fokuset i den nye læreplanen er på utforsking og det å la elevene finne frem til kunnskap selv over tid. Samtidig som det er viktig for oss som lærere, vil disse også være viktig for forlag og forfattere som skal utvikle læreverk til faget. Høsten 2020 kom de første læreverkene basert på fagfornyelsen.

Da innføring av ny læreplan medfører så pass store endringer som enda ikke er blitt integrert fullstendig på de fleste skoler, valgte vi å fokusere på læreverk og hvordan de presenterer algebra. Lærebøker kan sees på som en videreføring av læreplanen hvor innholdet skal dekke kompetansemålene i faget samtidig som de fremstiller dette på en måte som tilfredsstiller

[2] TIMSS står for *Trends in International Mathematics and Science Study* og er en internasjonal undersøkelse. De 60 landene som deltar i TIMSS gjennomfører en undersøkelse hvert 4. år hvor kompetansen til elevene i 5. og 9. trinn blir målt i fagene matematikk og naturfag (Universitetet i Oslo, 2020).

kravene for god opplæring i læreplanen (Brehmer et al., 2015). I Norge har skolene ansvaret for å velge hvilket læreverk de ønsker å bruke i de ulike fagene. Forskning viser at læreboken brukes i høy grad i undervisning og at lærere ofte støtter seg til forklaringer og begreper fra det valgte læreverket (Brehmer et al., 2015; Jablonka & Johansson, 2010). Derfor vil det også være viktig at skoleledere og lærere er godt informert om de ulike alternativene før de treffer sine valg. Gjennom denne forskningen ønsker vi å få kunnskap om hvordan de nye læreverkene, basert på fagfornyelsen har fremstilt algebra. Da algebra er et så pass vidt og gjennomgripende tema vil dette føre til at vi analyserer store deler av lærebøkene med tanke på kvalitet på oppgavene og om disse fremstilles på en måte som dekker det læreplanen sier.

1.2 Formålet med oppgavevalget og problemstilling

Formålet med denne masteroppgaven er å få innsikt i hvordan lærebøker for 8.trinn håndterer emnet algebra gjennom elevoppgaver. Forskningen baserer seg også på den nye læreplanen, da denne har medført en god del endringer i matematikk, både når det gjelder hvilke temaer som skal læres når og hvilke ferdigheter og kunnskapsområder som er viktige for elevenes læring. Hvordan forfattere av læreverk velger å tolke den nye læreplanen kan ha stor innvirkning på undervisning i fagene, da det er lærere og skoleledelsen som bestemmer hvilke læreverk som skal brukes på deres skole. Derfor er det viktig for oss som lærere å kunne ta informerte valg når vi skal vurdere og bestemme oss for hvilke læreverk vi ønsker å bruke i vår undervisning. På bakgrunn av dette har vi formulert denne problemstillingen:

Har de nye lærebøkene i matematikk oppgaver som sikrer elevene gode forutsetninger for å lære algebra ut ifra den nye læreplanen?

Denne problemstillingen vil gi oss svar på det vi ønsker å finne ut av, men her er det flere avgrensinger som må presiseres og begreper som må forklares.

1.3 Avgrensninger og begrepsavklaring

Denne masteroppgaven tar for seg to lærebøker for 8.trinn, da det er på dette trinnet algebra er mest tydelig i kompetansemålene, samt at det høsten 2020 kun var utgitt lærebøker på dette trinnet på ungdomsskolenivå. Gjennom forskningen ser vi kun på algebra og kun på elevoppgavene i bøkene. Det er kun lærebøker fra to forlag som er analysert da det kun var disse to som hadde laget helt nye utgaver utarbeidet ut ifra den nye læreplanen. Tidsaspektet på en masteroppgave satte også sine begrensninger og dermed ble kun grunnbøkene fra de to læreverkene analysert. Vi har også måtte begrense vår tolkning av hvilke temaer som inneholder algebra. Spesielt har dette gått ut over temaet funksjoner som på mange elementer kan sees på som algebra. Vi har derimot valgt å ikke ta dette med i vår analyse.

Flere begreper bør avklares med en gang. *Algebra* er et område innenfor matematikk som er vidt, vanskelig å definere presist og som mange har ulike meninger om. Det vi mener med algebra i denne forskningen er det området innenfor matematikk som bruker bokstaver og symboler for ukjente størrelser og variabler. Her kommer også generalisering og modellering av prinsipper og situasjoner innenfor andre matematiske tema inn. Denne definisjonen inneholder mye som blir tydeligere forklart i teorikapittelet.

I denne forskningen ser vi på lærebøker i matematikk. Med dette mener vi trykte bøker som blir utdelt til elevene. Forlag har ofte flere bøker som går inn under samme læreverk, samt at det spesielt i de senere år har blitt mer og mer bruk av digitale ressurser. Det er derimot kun grunnbøkene, altså hovedboken for matematikk som blir vurdert og analysert i denne studien.

Hvordan disse lærebøkene presenterer algebraoppgaver til elevene blir vurdert ut ifra læreplanen, men det er ikke alt i læreplanen som er inkludert her. Læreplanen tar for seg mange ulike begrep som er viktige for opplæringen, men begrensingene for masteroppgaven tilsier at vi ikke kan ta for oss alt læreplanen inneholder. Vi har derfor fokusert på det som står om kjerneelementene i faget matematikk, samt på teori om tilpasset opplæring.

Til sist må vi avklare hva vi legger i ordet forutsetninger. I løpet av arbeidet med denne masteroppgaven har vi fått bedre forståelse for hvor stort og omfattende algebra er. På grunn av dette har vi sett på konkrete algebraoppgaver, men også inkludert oppgaver som har tilknytning til algebra, da disse kan være med å gi elevene bedre forutsetninger for å forstå og lære algebra (jf. 2.3.4). I tillegg ser vi nærmere på kvaliteten på algebraoppgavene, som også kan bidra til bedre læring (jf. 2.4). Her er det altså flere faktorer som kan gi elevene gode forutsetninger for å lære algebra og disse blir forklart nærmere og blir tatt hensyn til i analysen og drøftingsdelen.

1.4 Oppbygging av oppgaven

For å gi leseren en oversikt over hva denne masteroppgaven inneholder vil det videre bli gitt en gjennomgang av hva de ulike kapitlene inneholder.

Først tar vi for oss teorien vi støtter oss på hvor vi først ser på noe av forskningen som er gjort tidligere. Deretter blir læreplanen med fokus på læreplanen i matematikk og teorier om tilpasset opplæring presentert og diskutert. Vi kommer ikke utenom teorier og forskning om algebra, som da følger videre, med både læreplanens definisjon og hva ulike forskere mener. For å lage kategorier for analyse har vi støttet oss på teori om kognitive krav i matematikkoppgaver og disse blir redegjort for i delkapittel 2.4. Til sist i teorien har vi gått nærmere inn på lærebøker og hvordan disse brukes av lærere og elever.

Kapittel 3, design og metode, starter først med hvilket vitenskapsteoretisk ståsted vi forholder oss til gjennom forskningen. I delkapittel 3.1 redegjør vi for vårt valg av metode nemlig dokumentanalyse, samt hvorfor vi har valgt de lærebøkene som blir analysert. Delkapittel 3.2 presiserer fem analytiske spørsmål som skal hjelpe oss til å svare på problemstillingen. Deretter følger forklaring og eksempler på hvordan vi har tenkt når vi har analysert i delkapittel 3.3. Videre går vi mer spesifikt inn på hvordan de to lærebøkene er oppbygd før vi redegjør for og diskuterer datakvaliteten på oppgaven. Avslutningsvis tar vi for oss de etiske hensynene som er viktig å være oppmerksomme på gjennom vår forskning.

I kapittel 4 presenterer vi resultatene fra analysen av de to lærebøkene. Her går vi gjennom de ulike kategoriene i samme rekkefølge som vi har analysert de.

Kapittel 5 inneholder drøfting av resultater, både for hvert enkelt analytiske spørsmål og i forhold til tidligere forskning.

I det siste kapittelet kommer vi frem til en konklusjon av hva vi tenker ut ifra forskningsprosjektet og resultatene den har frembragt.

2.0 Teoretisk forankring

Det er flere teorier og forskninger som er aktuelle for oss å gå nærmere inn på for å belyse hvorfor vi har valgt denne problemstillingen og hvilken teori vi støtter oss til gjennom prosjektet. Først ser vi på to tidligere forskningsprosjekt gjennomført i henholdsvis Norge og Sverige. Den norske studien tar for seg algebra i lærebøker basert på LK06 og påpeker flere mangelfulle områder innenfor dette. Den svenske studien ser på problemløsningsoppgaver i matematiske læreverk og analyserer hvor og hvordan disse blir presentert. Begge studiene er interessante for vår forskning da vi får en forståelse for hvordan læreverkene fremstiller ulike innholdsmoment og hvordan bøkene fremstår for elever og lærere.

Videre går vi nærmere inn på læreplanen og de faktorene vi ønsker å trekke frem som viktige for vår forskning. Her er det spesielt kjerneelementene i matematikk og begrepet tilpasset opplæring som blir presentert. Kjerneelement er blitt introdusert som en ny veiledning for hva og hvordan elevene skal lære det viktigste innenfor hvert enkelt fag (Utdanningsdirektoratet, 2017). Med andre ord vil en grundig gjennomgang og tolkning av disse være essensielt for hvordan vi ser på lærebøkene videre. I tillegg er tilpasset opplæring belyst og diskutert, da dette begrepet har en stor rolle innenfor den norske skole og noe vi som fremtidige lærere bør ha god kunnskap om. Tilpasset opplæring vil også være et element for å kunne svare på problemstillingen vår, da alle elever er forskjellige og lærer på ulike vis.

Vår forskning baserer seg på oppgaver innenfor temaet algebra og dermed kommer vi ikke utenom teori og forskning på feltet. Avsnitt 2.3 tar for seg ulike teoretikere og hva de mener algebra er, et tema som kan være vanskelig å definere konkret. På grunn av algebras innfløkthet har vi tatt for oss flere forskere og deres teorier for å belyse hva som kan ansees som algebra. Her har vi også tatt for oss forskning som påpeker algebras tilknytning til andre tema og hvorfor dette er viktig å ha i fokus. Begge deler er viktig for vårt forskningsarbeid da de hjelper oss til å forstå hva algebra er og hva vi bør fokusere på når vi gjennomfører analysen av lærebøkene.

For å kunne få en god forståelse for kvaliteten på oppgavene vi skal analysere er det også viktig å ha en god forankring i teorier om vurdering av matematiske oppgaver. I 2.4 ser vi kort på ulike teorier innenfor dette, før vi går grundigere inn på kognitive krav i matematikkoppgaver. Disse kognitive kravene er også det vi lener oss på for å analysere nivåene i oppgavene.

Avslutningsvis presenteres forskning om lærebøker og hvordan disse brukes. Dette avsnittet belyser hvilke standarder en lærebok må inneholde her i Norge, samt hvordan lærere og elever bruker lærebøkene i flere ulike land. Forskningen som blir presentert her påpeker nødvendigheten av vårt forskningsarbeid da det er lite kontroll på hvem som kan publisere en lærebok og hvordan et læreverk skal se ut innholdsmessig. I tillegg kommer det frem at mange lærere legger stor vekt på lærebøker i sin undervisning, noe som gjør at vi som fremtidige lærere i matematikk ønsker å ta et informert valg av læreverk når vi skal drive undervisning.

2.1 Tidligere forskning

I Norge finner vi spesielt en forsker som har basert seg på noe av det samme som vi ønsker å se nærmere på, nemlig algebra i læreverk. Kongelf (2019) utførte en tredelt studie med fokus på algebra i flere ulike læreverk basert på den gamle læreplanen (LK06). Gjennom avhandlingen presenterer han mange interessante funn som er en av grunnene til at vi ble nysgjerrig på hvordan algebra blir presentert i læreverk basert på den nye læreplanen (LK20). Hele studien er interessant for å få et bakteppe og en forståelse for hvordan læreverk tidligere har presentert algebra. Derimot er det spesielt delstudie tre som er av direkte interesse for vårt forskningsprosjekt, da denne tar for seg elevoppgavene og analyse av disse. Vi vil likevel kort presentere funnene Kongelf har gjort gjennom alle tre studier.

Første del av forskningen tar for seg hvilke *heuristiske*[3] tilnærmingsformer ulike bøker vektlegger ved løsning av algebraoppgaver. Kongelf fant flere ulike variasjoner, som «let og finn», «del opp og løs» og «let etter mønster» og en overvekt av bruk av heuristiske tilnærmingsmåter. Derimot fantes det lite forklaringer på hvordan de ulike tilnærmingsmåtene skulle brukes, noe forskeren mener kan svekke elevenes evne til problemløsning (Kongelf, 2019, s.87). Med andre ord har læreverkene basert på LK06 mange oppgaver hvor det brukes ulike teknikker for å løse problemer, men de blir ikke tydelig beskrevet for elevene slik at de mer effektivt kan bruke disse på andre oppgaver.

I andre delstudie tar Kongelf for seg hvordan læreverkene presenterer algebra gjennom tekst og eksempeloppgaver. Funnene til Kongelf viser at det er stor variasjon fra læreverk til læreverk for når og hvor vektlagt algebrakapittelet er. Han poengterer at det er lite samsvar mellom læreverkenes fremstilling av algebra og læreplanens intensjon om å knytte tall og

[3] Heuristikk er enkle metoder for å løse en oppgave og trenger ikke nødvendigvis kun brukes innenfor matematikken. Det kan beskrives som ulike strategier for problemløsning (Teigen, 2020).

algebra sammen (Kongelf, 2019, s. 77). Det kommer frem at det er stort fokus på manipulasjon og lite tilknytning til det elevene allerede kan om tall. Disse funnene peker med andre ord på at algebra kan fremstå som et isolert emne uten noen tydelig tilknytning til andre matematiske emner og da spesielt tilknytningen til *aritmetikk*[4] og tidligere innhentet kunnskap.

Den tredje delstudien handler om mye av det vi skal undersøke, nemlig analyse og kategorisering av elevoppgaver i algebrakapitlene. Kongelf har her gjennomgått fem ulike læreverk flere ganger og gjennom analysering av oppgavene kommet frem til ulike hovedkategorier og forgreininger (Kongelf, 2019, s. 65 og s. 93). Etter sorteringen av oppgavene har han videre analysert dataen. Analysen viser at det er en overvekt av manipulasjonsoppgaver i lærebøkene, at de har et stort fokus på transformasjon og Kongelf mener dette kan undergrave betydningen av variabelaspektet (Kongelf, 2019, s. 99). Videre påpeker forskeren at det er for lite sammenfall mellom hvordan algebra blir introdusert og læreplanens definisjon av algebra. I LK06 kunne man finne en ganske konkret beskrivelse av hva algebra kunne være, hvor generalisering av tall var nevnt samt algebra som et verktøy for å beskrive mønster og sammenhenger (Utdanningsdirektoratet, 2013). Med andre ord kan det se ut som at læreverkene basert på LK06 ikke møtte kravene til læreplanen. I tillegg kan det virke som at det Kongelf beskriver heller ikke møter kravene til dagens læreplan med dens kjerneelement og fokus på at elevene skal få mulighet til å utforske matematikken. Oppgavene som beskrives i studien er i hovedsak preget av lite refleksjon og utforsking, hvor elevene blir bedt om å løse en oppgave hvor prosedyren er innlysende og det kun finnes ett riktig svar.

Denne studien er interessant for vår masteroppgave da den belyser hva som har vært problematisk med presentasjonen av algebra i tidligere læreverk. Analysene til Kongelf gjorde oss nysgjerrige på om algebra fortsatt ble presentert gjennom oppgaver med transformerende fokus som krevde lite av elevene også etter fagfornyelsen. Den nye læreplanen i matematikk har gjennom kjerneelementene lagt større og tydeligere vekt på at elevene skal utforske, beskrive, argumentere og utvikle seg gjennom matematikken. Har læreverkene fulgt etter eller viderefører de det Kongelf har konkludert med?

[4] Aritmetikk er den delen av matematikken som omhandler tallenes egenskaper og metoder til å regne med tall («aritmetikk», 2020)

Også i andre land har det blitt gjennomført analyser av læreverk. En svensk studie med hovedvekt på ulike læreverk i matematikk har sett på forskjellige momenter av oppgaver innenfor problemløsning (Brehmer et al., 2015). Den svenske studien konkluderte med at de få oppgavene de fant innenfor problemløsning ofte ble plassert bakerst i kapitlene og gjerne på det høyeste nivået. Altså var oppgavene som ga elevene mulighet til å utvikle problemløsningsevnene ikke tydelig tilgjengelig for alle elever, men kun for de som arbeidet på det høyeste nivået i bøkene. Det kan argumenteres for at dette blir mot sin hensikt da forskning viser at evne til problemløsning og øvelse i strategiene som ligger bak er viktige verktøy for hverdagen og livet videre (Brehmer et al., 2015, s. 578). Med andre ord vil oppgaver innenfor problemløsning være en viktig faktor for å utvikle egenskapene og strategiene for å kunne løse et problem som er ukjent. Læreplanen i matematikk har også fått større fokus på problemløsning med fokus på metode og strategi fremfor synlig løsning av problemet (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). Med andre ord skal elevene få muligheten til å utforske, undres, resonnere og bruke tid på oppgaver som ikke har fokus på riktig svar, men på prosessen i arbeidet. Dette vil vi gå nærmere inn på i det følgende kapittelet.

2.2 Læreplanen

Fagfornyelsen har introdusert et nytt konsept ved å innføre kjerneelementer i alle fag. Disse kjerneelementene er det elevene må beherske for å kunne forstå og mestre faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). Her kommer sentrale begreper og tenkemåter inn, og dette skal sikre at elevene utvikler bedre forståelse i fagene over tid. Disse kjerneelementene vil derfor være grunnlaget vårt for analysen av oppgavene i læreverkene. Det er læreplanen vi som lærere skal forholde oss til og dermed også læreplanen vi bør ha hovedfokus på. Store deler av det som blir presentert i kjerneelementene er også begreper vi ser går igjen i teori om algebra og kognitive krav til matematikkoppgaver. Disse kjerneelementene, i tillegg til kompetansemålene, er også det forfattere av læreverk skal ta utgangspunkt i ved utforming av nye læreverk og oppgavene som blir presentert for elevene. Kjerneelementene vil derfor være en viktig del av vår forskning, spesielt ved utforming av kategorier og analyse. På nettsiden til de ulike læreplanene kan man enkelt finne hvilke kompetansemål som dekker de ulike kjerneelementene. Videre vil de seks kjerneelementene i matematikk bli presentert og hvilke kompetansemål med tilknytning til algebra som hører til. I tillegg vil vi i siste avsnitt beskrive hva tilpasset opplæring er og hvordan dette spiller inn på oppgaver i matematikk.

2.2.1 Utforsking og problemløsing

Dette kjerneelementet handler om at eleven skal få mulighet til å finne strategier og utvikle verktøy for problemløsning gjennom arbeidet uten for mye fokus på løsningen på oppgaven (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). Her er det fokus på at elevene skal utforske og finne mønster, sammenhenger og strategier for å løse et problem. Dessuten skal elevene jobbe med problemløsning hvor de blir utfordret til å tenke nytt og finne en systematikk i oppgaveløsning. I dette avsnittet skrives det også om algoritmisk tenking som et verktøy for elevene til å løse oppgaver de ikke har støtt på før. *Algoritmisk tenking* blir beskrevet som en systematisk problemløsningsmetode hvor elevene bryter ned problemet eller oppgaven i mindre deler før de arbeider videre (Utdanningsdirektoratet, 2019). Gjennom denne metoden vil elevene utvikle strategier for å løse vanskelige problem ved å analysere, lage modeller og generalisere. Dette vil si at elevene skal møte utfordringer i undervisningen og gjennom læreverkene som de må bruke tid og kompetanse for å løse. Algoritmisk tenking kan sees på som et verktøy for å løse ulike oppgaver, men også en egen måte å tenke på. Denne tenkemåten kan sammenlignes med det Kieran beskriver som *algebraisk tenkemåte*, nemlig å kunne løse ukjente problem ved hjelp av ulike strategier, teknikker og utforsking (Kieran, 2004, s. 149). Algoritmisk og algebraisk tenking handler begge to om å utvikle disse egenskapene, slik at det å løse ukjente problem blir enklere.

Dette kjerneelementet er direkte knyttet til kompetansemålene «utforske algebraiske regneregler» og «utforske, forklare og sammenligne funksjoner knyttet til praktiske situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12). Etter vår erfaring er regnereglene i algebra noe som har blitt utlevert til elever med beskjed om at slik skal oppgaven løses, uten mye forklaring på hvorfor reglene er slik. Gjennom dette kompetansemålet blir lærere og forfattere av læreverk nødt til å legge større vekt på den eksplorative delen ved regnereglene. Det samme gjelder for det andre kompetansemålet som omhandler funksjoner. Der må det legges opp til virkelighetsnære oppgaver, hvor elevene får mulighet til å bruke tid til å utforske funksjonene. Samtidig som disse funksjonene skal sammenlignes slik at elevene ser de store linjene og får forståelse for hvordan funksjoner fungerer.

2.2.2 Modellering og anvendelser

Modellering og anvendelser beskriver at elevene skal kunne se sammenhengen mellom matematiske modeller og virkeligheten og forstå hvordan disse skal kunne brukes i og utenfor faget (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.2). Dette vil si at elevene skal få en forståelse for hvordan de kan bruke matematikk på ulike områder i livet sitt. Dessuten er det forventet at elevene skal kunne bruke modellene de lager, teste de og vurdere gyldigheten til modellene. Til dette kjerneelementet er det tre kompetansemål som kan knyttes til algebra, «lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner», «lage, løse og forklare ligninger knyttet til praktiske situasjoner» og «utforske, forklare og sammenligne funksjoner knyttet til praktiske situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12). Her ser vi tre mål som alle poengterer matematikkens tilknytning til realistiske og dagligdagse problemstillinger. I tillegg til å lage og løse modellene, er det også krevd at elevene skal forklare det de gjør og hvordan de tenker. Oppgaver i lærebøker innenfor dette kjerneelementet og disse kompetansemålene vil innebære virkelighetsbaserte situasjoner hvor elevene blir bedt om å lage passende modeller. I tillegg bør det være inkludert reflekterende spørsmål som får eleven til å tenke over om modellen er gyldig, i hvilke situasjoner den er gyldig og om den kan brukes i andre situasjoner.

2.2.3 Resonnering og argumentasjon

Dette kjerneelementet vektlegger elevenes forståelse for reglene i matematikk og at disse ikke er tilfeldige (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Resonnering handler også om at elevene skal gradvis utvikle en evne til å lage egne resonnementer og opparbeide en forståelse for ulike metoder i faget. Argumentasjon innebærer at eleven steg for steg kan begrunne og argumentere for hvorfor ulike regler og metoder er slik, i tillegg til å kunne argumentere for egne valg i arbeidsprosessen. Med andre ord skal eleven gjennom utdanningen utvikle evnene til å resonnere seg frem til hvorfor matematikken er slik som den er og argumentere med et mer og mer avansert matematisk språk. Innenfor dette kjerneelementet er det ett kompetansemål som kan knyttes til algebra «utforske, forklare og sammenligne funksjoner knyttet til praktiske situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12). Det er derimot ikke noen kompetansemål som konkret omhandler algebra, men det kan argumenteres for at dette er noe som er en naturlig del av alt innenfor matematikken og utdanningen. Her skal elevene utvikle selvstendig tenking og reflektere over gyldigheten i ulike matematiske situasjoner. Derfor vil det også være naturlig at oppgaver i lærebøker legger opp til at elever får muligheten til å argumentere for hvordan de tenker og resonnere over gyldige svar.

2.2.4 Representasjon og kommunikasjon

Representasjon og kommunikasjon er ulike måter å representere matematikken på, hvor eleven skal kunne argumentere for valgt måte (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Her kommer det også frem at elevene skal bruke et matematisk språk ved samarbeid og kunne veksle mellom dagligdags språk og et formelt matematisk språk. Kjerneelementet innebærer at elevene skal kunne tolke og veksle mellom ulike representasjoner, mellom konkreter, visuelle bilder eller illustrasjoner, tekst, abstrakt symbolspråk og mellom dagligdags språk og matematisk språk. Her finner vi ett kompetansemål direkte knyttet til algebra «lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner» og ett som kan knyttes til algebra «representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.12). Det første kompetansemålet innebærer at de oppgavene elevene møter i læreverkene bør være knyttet til virkeligheten, samtidig som de utfordrer elevene til å oversette fra en representasjon til en annen. Det andre kompetansemålet krever at læreverkene lager oppgaver som gir elevene muligheten til å veksle mellom representasjonsformer når det kommer til funksjoner, samtidig som de får anledning til å vise hvordan disse henger sammen. I tillegg til dette bør læreverkene inkludere samarbeidsoppgaver hvor det blir lagt vekt på det matematiske språket.

2.2.5 Abstraksjon og generalisering

Abstraksjon og generalisering handler om elevenes matematiske utvikling fra konkret beskrivelse til en mer avansert symbolbruk (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Generalisering er elevens evne til å se sammenhenger og strukturer, men det er også lærerens og læreverkets ansvar med tanke på å ikke gi eleven ferdige løsninger på problemer. I dette kjerneelementet er algebra spesifikt nevnt som et verktøy for å formalisere og generalisere sammenhenger. Med andre ord vil kunnskap om og forståelse for algebra hjelpe elevene til å gå fra en uformell matematisk forståelse til et mer konkret og abstrakt syn på matematikkens sammenhenger. Det er tre kompetansemål innenfor dette kjerneelementet som er knyttet til algebra, «lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner», «representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene» og «beskrive og generalisere mønstre med egne ord og algebraisk» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12). Det første og andre kompetansemålet har vi sett i forbindelse med tidligere kjerneelement, mens det siste kun er tilknyttet abstraksjon og generalisering. Her ser vi at mønstre har fått en egen plass i åttende trinn. Kompetansemålet kan tolkes dithen at elevene skal gradvis gå fra en uformell beskrivelse av mønstre til en mer formell generalisering gjennom algebra.

2.2.6 Matematiske kunnskapsområder

Matematiske kunnskapsområder er et avsnitt hvor de ulike matematiske temaene blir presentert og avsluttes med «Kunnskapsområda dannar grunnlaget som elevane treng for å utvikle matematisk forståing ved å utforske samanhengar innanfor og mellom dei matematiske kunnskapsområda.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3-4). Med andre ord har de gjennom dette kjerneelementet fastslått at alle de ulike temaene innenfor matematikk henger sammen og bør knyttes sammen i undervisningen. I dette kjerneelementet finner vi også læreplanens definisjon av hva algebra er og nevner blant annet at algebra er viktig for å kunne generalisere og modellere matematiske sammenhenger (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Algebra har altså en konkret rolle i matematikken som et verktøy for formalisering. I tillegg ser vi at algebra skal knyttes til praktiske situasjoner, til aritmetikk og andre tema innenfor matematikk og at elevene skal få forståelse av algebra gjennom utforskning. I et læreverk vil en oppgave innenfor dette kjerneelementet knytte sammen ulike temaer på en måte som dekker mange av de andre kjerneelementene. En slik oppgave vil bære preg av utfordring for elevene, samtidig som de får muligheten til å utforske problemer, reflektere, argumentere, bruke ulike representasjoner og komme frem til generelle modeller i matematikken.

2.2.7 Tilpasset opplæring

I den nye læreplanen er det et stort fokus på *tilpasset opplæring* og dette krever litt forklaring og avgrensning i forbindelse med vårt tema i masteroppgaven. Opplæringslova slår fast at undervisningen skal tilpasset den enkelte elevs forutsetninger og evner (Opplæringslova, 1998, § 1-3). Dette vil si at hver elev har rett på å få justert undervisningen slik at den eleven skal kunne lære mest mulig ut ifra der eleven er akkurat på det tidspunktet. Ut ifra dette kan man tenke at tilpasset opplæring er et mål som en lærer skal oppnå, men begrepet skal tolkes som et verktøy for lærere og skoler for å gi hver enkelt elev de beste forutsetninger for læring (Meld. St. 16 (2006-2007), s. 76). Verktøyet tilpasset opplæring innebærer at læreren bruker variasjon i undervisningen, både når det gjelder eksempelvis oppgaver, arbeidsmåter og arbeidsmengde. Læreren må gjennom dette bruke kunnskap om klassesammensetning, elevenes forutsetninger og læringsmiljø for å skape de beste rammene for læring for hver elev. Med andre ord er det mange ulike faktorer som spiller inn for å få til god tilpasset opplæring og intensjonen må tilpasses kontinuerlig. Det er ulike måter å tolke begrepet tilpasset opplæring, hvor motpolene er smal og bred forståelse (Damsgaard & Eftedal, 2014, s.33-34). Den smale forståelsen innebærer et syn hvor det fokuseres på hver enkelt elev og dens behov for tilpassing. Den brede tolkningen inkluderer derimot hele skoleorganisasjonen og hva som gjøres i fellesskap for å tilrettelegge for god opplæring for alle. Altså er tilpasset opplæring et vidt begrep som både bør være i fokus for hele skolen og for hver lærer gjennom dens profesjon.

Selv om læreren skal justere sin praksis kontinuerlig for å strebe etter best mulig undervisning for alle elever betyr det ikke at hver enkelt elev skal ha individuelle opplæringsplaner og undervisningopplegg. Tilpasset opplæring for læreren vil blant annet være de små justeringene og vurderingene som gjøres i løpet av undervisningen, det er de refleksjonene som blir gjort i etterkant av en time eller de endringene man gjør fra en undervisningstime til den neste. Vi kan illustrere dette med et eksempel innenfor matematikk hvor vi begge har en del erfaring fra både praksis og som lærere. Matematikken er delt opp i ulike tema og en elev kan ha stor forståelse og kontroll på ett tema, mens et annet blir uforståelig og utfordrende. Matematikkfaget krever altså tilpassing av undervisningen ovenfor hver elev ut ifra dens forutsetninger, men disse forutsetningene kan endre seg for hvert matematiske tema. Derfor vil det være nødvendig for læreren å kontinuerlig vurdere og justere tilpasningen av undervisningen, slik at elevenes varierende forutsetninger blir ivaretatt. Dette gjelder ikke bare tilpasningen fra elev til elev, men også fra tema til tema.

Elever lærer på ulike måter i tillegg til at det er en begrensing i hva eleven kan lære på egenhånd. Vygotsky utviklet en teori som omhandler nettopp dette og kalte det for elevens *proksimale utviklingssone* (Vygotsky, 1978/2004, s. 158-159). Teorien går ut på at en elev vil kunne lære en viss grad alene, men kommer til slutt til et punkt der utfordringene blir for store. Derimot vil eleven kunne lære og forstå mer om dette skjer sammen med noen andre, gjerne en med mer kunnskap. Med andre ord vil en mer kunnskapsrik person kunne utvide denne sonen slik at eleven stadig øker sin kunnskap.

Vår masteroppgave omhandler algebraoppgaver i lærebøker. Også i matematiske oppgaver kan man få til prinsippet med tilpasset opplæring. Matematiske oppgaver kan ha ulik vanskelighetsgrad, varieres med tanke på arbeidsmåte, de kan kreve ulike strategier og forklaringer, det kan være samarbeidsoppgaver og oppgaver med lav inngangsterskel og høy takhøyde. I tillegg kan samarbeidsoppgaver kunne bidra til tilpasset opplæring da elevene får utviklet sin forståelse gjennom dialog og diskusjon. Om elevene som samarbeider har ulik utvikling i faget vil dette igjen kunne utvikle den proksimale utviklingssonen som nevnt tidligere. Et læreverk kan med andre ord legge til rette for tilpasset opplæring gjennom en god spredning av varierte oppgaver og arbeidsmetoder på ulike nivå.

Et annet ord for tilpasset opplæring er *differensiering* og blir i den forstand ofte inndelt i pedagogisk differensiering og organisatorisk differensiering (Hinna et al., 2011, s. 1021). *Organisatorisk differensiering* omhandler hvordan elevene plasseres eller deles ut ifra nivå, faglig utbytte eller læringsmiljø (NOU 2016: 14, s. 65). *Pedagogisk differensiering* handler derimot om de justeringene og tilpasningene som gjøres i undervisningen med tanke på lærestoff, arbeidsmåter, intensitet og arbeidsmengde for å favne forutsetningene til flest mulig elever (NOU 2016: 14, s. 62). I lærebøker i matematikk er det ofte lagt opp til differensiering på ulike vanskelighetsgrader slik at elevene kan jobbe på det nivået de føler de mestrer og ikke mister motivasjonen av for vanskelige eller for lette oppgaver. Dette kan ses på som en type pedagogisk differensiering og kan fungere godt om læreren bruker tid på kontinuerlig vurdering og diskusjon med den enkelte elev om hvilket nivå som er gunstig å arbeide med (Damsgaard & Eftedal, 2014, s. 176-177). På denne måten kan også oppgaver i lærebøker legge opp til tilpasset opplæring, ved hjelp av disse ulike nivåene.

I matematikken er det lagt stor vekt på begreper og forståelsen av disse for å kunne legge et godt grunnlag for læring (Ekeberg & Holmberg, 2004, s. 85). Derfor vil en lærebok som bruker god tid og inneholder flere oppgaver hvor elevene får arbeide med ulike matematiske begrep være gunstig for tilpasset opplæring. Forskning viser også at elever som presterer høyt i matematikk innehar større kompetanse for problemløsningsoppgaver (NOU 2016: 14, s. 35). Elever med høye prestasjoner i matematikk har flere verktøy å spille på når de treffer på problemer de ikke ser en naturlig løsning på og bruker flere variasjoner av strategier for å finne svar. Med andre ord vil et fokus på problemløsningsstrategier og oppgaver som fremmer algoritmisk tenking være gunstig for å treffe de elevene som presterer høyt, samtidig som alle elevene får øvelse i viktige forutsetninger for faget.

2.3 Algebra og algebraisk tenkemåte

Algebra er et emne innenfor matematikken hvor teoretikere og forskere har ulike syn og meninger. Derimot er det stor enighet på feltet om at algebra er mer enn bare regning med bokstaver. Gjennom vårt forskningsarbeid har vi fokusert på flere teoretikere som har forsket mye innenfor algebra. Disse forskerne har vært viktig for vår forståelse av hva algebra egentlig er og for hvilke oppgaver som har blitt inkludert i vår analyse. Her har vi tatt med oss teorier både om hva algebra og algebraisk tenkemåte er og hvordan det kan bli forstått, men også hvilken betydning og tilknytning algebra har til andre tema innenfor matematikken. Grunnlaget for dette er at forskning viser at elever føler at algebra er et emne som står for seg selv i matematikken, uten noen tilknytning til andre emner. En tydeligere tilknytning mellom andre matematiske områder og algebra kan i den forstand endre dette synet. I tillegg vil læreplanens definisjon av algebra være av interesse. Videre vil vi belyse temaet algebra fra ulike ståsted.

2.3.1 Algebra i læreverk

Det er mange ulike meninger om hva algebra egentlig er. Noen mener det er kun snakk om generalisering av aritmetikk, mens andre er av den oppfatning av at det er en egen måte å tenke på (Espeland, 2017, s.43-47). Spør du en ungdomsskoleelev om hva algebra er vil du kanskje få svaret at algebra kun er bokstavregning. Mange elever tenker nemlig at algebra er et helt separat emne i matematikken med lite eller ingen tilknytning til andre matematiske tema (Bjørnestad et al., 2013, s.203). Med andre ord kan algebra by på problemer både for elevene og lærere, da det kan være vanskelig å beskrive konkret hva algebra faktisk er og dermed vanskelig for elevene å forstå hvilken nytte det har for andre deler av matematikken.

Det er også ulike definisjoner i den foregående og dagens læreplan. LK06 definerte det som «Algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall. Det gir anledning til å beskrive og analysere mønster og sammenhenger. Algebra benyttes også i forbindelse med hovedområdene geometri og funksjoner.» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Her ser vi en relativt konkret beskrivelse hvor algebra blir knyttet til generalisering av aritmetikken og at det kan brukes som et verktøy i forbindelse med mønstre og sammenhenger. Likevel kan det argumenteres for at beskrivelsen er vag og at det er vanskelig å tolke hva de egentlig legger i sin forklaring av algebra. Gjennom fagfornyelsen (LK20) har algebra blitt et emne som skal trekkes inn i alle årstrinn og har dermed fått mer plass i kompetansemålene. I læreplanen for matematikk beskriver de temaet som «Algebra handlar om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Selv om beskrivelsen er kortet ned til kun en setning ser vi en tydelig endring i hvordan algebra blir forstått. Her er det lagt vekt på utforskning og modellering i tillegg til generalisering. Det presiseres også at algebra er en viktig faktor for å kunne gjennomføre dette i matematikken. Forståelsen er bredere enn den var i LK06, men det må likevel poengteres at det fortsatt kan være vanskelig å få grep om hva algebra egentlig er bare gjennom disse beskrivelsene.

2.3.2 Ulike teorier om algebra og algebraisk tenkemåte

For å få en bedre forståelse for hva algebra er må vi se videre på hva forskere på feltet har kommet frem til. Det kan virke som at forståelsen av algebra i skolen er det Kieran kaller *school algebra,* en tradisjonell og snever forståelse av hva emnet innebærer (Kieran, 1996, s. 271). Denne forståelsen innebærer algebra der bokstaver representerer tall og størrelser og reglene for manipulasjon av uttrykk og utregning av likninger. Men algebra kan forstås som mer enn dette.

Usisikin (1988, s. 11-18) utviklet en teori om at algebra er basert på fire oppfatninger basert på hvordan variabelen brukes. Den første oppfatningen er at algebra er *generaliserende aritmetikk*. Dette vil si at alle sammenhenger og relasjoner innenfor aritmetikken kan representeres og forenkles gjennom bruk av algebra. Den andre oppfatningen innebærer at algebra kan sees på som en studie av prosedyrer for å løse bestemte problem. Med dette mener han for eksempel å kunne løse en tekstoppgaver med en ukjent ved hjelp av algebra. Den tredje oppfatningen er at algebra er studien av relasjonen mellom størrelser, som for eksempel en formel i geometrien, et funksjonsuttrykk eller likning. Den siste oppfatningen er algebra som en studie av strukturer. Denne knytter Usiskin i hovedsak til matematikk på et høyere nivå som for eksempel trigonometri, men man kan likevel se spor av den på ungdomsskolen i eksempelvis faktorisering og generalisering av mønster. I alle disse fire oppfatningene brukes og fremstilles variabelen på ulike måter. Gjennom disse oppfatningene vil Usiskin frem til at algebra er mer enn det man tidligere har antatt, at algebra har innvirkning og infiltrerer flere emner enn vi først skulle tro og at dette er noe av grunnen til at algebra har fått en større rolle i matematikken.

Andre teoretikere har i senere tid gått lengre i sin forståelse og forklaring av algebra. Kaput (2000) mener at algebra kan sees på som et nett av kunnskap og ferdigheter og argumenterer for at algebra har dype, varierte tilknytninger til all matematikk. Han ser blant annet på algebra som et eget språk og mener at emnet bør implementeres i ung alder. Dette begrunner han med at språk lært før puberteten lettere vil føye seg til ens tenkemåte. Med andre ord vil en tidlig introduksjon til algebra føre til at dette blir en del av hvordan elevene tenker om matematikken. Kaput skriver i samme artikkel at algebra bør inkluderes på alle årstrinn i læreplaner og kaller det en «algebraifisering». Det sistnevnte virker det som om fagfornyelsen har gjort, da det nå er introdusert algebra i kompetansemålene for alle trinn i grunnskolen.

Kaput (2008) beskriver også algebra som fem sammenhengende grunnsyn og forgreninger som overlapper hverandre. Gjennom disse forklarer han algebra som 1) systematisk symbolisering og generalisering og 2) et syntaktisk verktøy for å løse oppgaver. Det første grunnsynet inkluderer det å se sammenhenger og mønster, mens det andre omfatter de konkrete reglene for manipulasjon og oppgaveløsning innenfor algebra. Disse to grunnsynene ligger over de tre neste forgreningene som blir forklart som 3) en studie av strukturer og system, 4) en studie av funksjoner, forhold og felles variasjon og 5) som et modelleringsspråk både i og utenfor matematikken. Gjennom denne tolkningen ser vi at det ikke kun er manipulasjon og generalisering av aritmetikk som er definert som algebra. Kaput tar høyde for både de konkrete reglene innenfor temaet, gjenkjennelse av sammenhenger, generalisering og at algebra kan brukes som et eget språk.

Flere forskere diskuterer dette med algebra som et eget språk. Kieran argumenterer for at teknologi og mer bruk av datamaskiner har åpnet opp for hvordan man kan forstå algebra (Kieran, 1996, 274). Med dette mener hun at vi har fått flere muligheter til å representere algebra gjennom teknologien og at disse representasjonsformene gjør at vi må tenke på algebra i en videre forstand. Denne nye teorien blir kalt algebraisk tenkemåte og innebærer bruk av ulike representasjoner for å gi elevene bedre forståelse av hva algebra er og kan brukes til. Senere har Kieran utvidet forståelsen av algebraisk tenkning:

> Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting. (Kieran, 2004, s. 149)

Her beskrives mange av de samme begrepene vi finner i kjerneelementene og innenfor algoritmisk tenkning. Vi ser at algebraisk tenkemåte ikke nødvendigvis trenger å innebære tradisjonell algebra av typen bokstaver i stedet for tall, men at dette kan brukes som et verktøy. Altså kan oppgaver og problemer som handler om for eksempel mønster, tallrekker eller virkeligheten både løses med og uten algebra, alt etter hvordan oppgaven er formulert. Oppgaver om mønster kan for eksempel være en nyttig måte til å få elevene til å diskutere og se endringer, strukturer og sammenhenger, uten at det nødvendigvis trengs algebra. Slike oppgaver vil kunne hjelpe elevene til å forstå konseptet algebra og hva det kan brukes til. Selv om Kieran legger stor vekt på begrepet algebraisk tenkemåte hvor det bør arbeides med problemløsningsoppgaver mener hun at også den mer tradisjonelle tilnærmingen til algebra, med manipulasjon og regler fortsatt skal være en del av opplæringen (Kieran, 1996, s. 283). Med andre ord bør det være en balanse, slik at elevene får erfaring med og kunnskap om algebra på flere ulike måter.

Teoriene til Usiskin, Kaput og Kieran har mange likheter, blant annet mener de alle tre at algebra er mer enn det som tidligere ble sett på som skolealgebra. Usiskin har sitt hovedfokus på variabelen og forklarer algebra gjennom dens mange egenskaper og bruksområder. Kaput og Kieran ser derimot mer på de ulike bruksområdene til algebra uten hovedfokus på variabelen, slik som generalisering, studering av strukturer og et verktøy for problemløsning. De ulike teoriene har alle sin verdi for å kunne få et helhetlig bilde av hva algebra er, både når det gjelder hvilke områder innenfor matematikken algebra brukes i, hva algebra kan forstås som og hvorfor variabelen er et viktig element. Videre vil vi se nærmere på hvilke typer aktiviteter algebra innebærer for elevene, noe vi kommer til å bruke i stor grad videre i denne forskningen.

2.3.3 Algebraiske aktiviteter

Kieran (1996 & 2004) har utviklet en teori om hvilke aktiviteter som kjennetegner algebraisk tenkemåte hvor hun beskriver tre ulike aktiviteter. Den første kalles *produserende aktiviteter* og omhandler de oppgavene hvor elevene må lage uttrykk og likninger med ukjente og variabler. Under denne aktiviteten kan man finne oppgaver hvor elevene skal lage likninger ut ifra et virkelighetsbasert problem eller for eksempel at de gjennom arbeidet kommer frem til en kjent og generell formulering av en kjent matematisk algoritme. Her vil vi også finne oppgaver hvor elevene må oversette fra tekst eller illustrasjon til likning eller uttrykk og motsatt.

Den andre faktoren kalles for *transformerende aktiviteter* og vil være oppgaver hvor elevene må manipulere uttrykk og likninger. Transformerende aktiviteter er regelbundet og følger de konkrete oppskriftene for manipulasjon hvor elevene skal løse algebraoppgaver uten å bryte likhetsprinsippet (Kieran, 2004, s. 124). Under denne aktiviteten finner vi oppgaver som baserer seg på eksempelvis faktorisering, utvidelse av et uttrykk, løse en likning eller forenkle et uttrykk. Transformerende og produserende aktivitetene er kanskje de aktivitetene som kan beskrives som tradisjonell algebra, hvor fokuset er på de algebraiske reglene. Dette vil være viktig for å kunne bruke algebra på en fornuftig og riktig måte og er et essensielt verktøy for å kunne bruke algebra i problemløsning. Derimot, om vi tenker på Kierans beskrivelse av algebraisk tenking trenger vi andre typer aktiviteter i tillegg til disse.

Den tredje aktiviteten til Kieran har fått navnet *global meta-level* og omhandler de aktivitetene som trengs for å utvikle algebraisk tenking, men som ikke nødvendigvis trenger å inneholde algebra i det hele tatt (Kieran, 2004, s.142). *Global meta-leve*l blir beskrevet som de aktivitetene som inneholder blant annet problemløsning, modellering, generalisering, kunne se sammenhenger, argumentere og bevise. Med andre ord samsvarer dette *global-meta level* relativt mye med det vi finner beskrevet i kjerneelementene. Kieran poengterer at alle disse aktivitetene trengs for å kunne få en god forståelse for algebra, uten alle tre vil meningen med algebra bli uklar og ufullstendig (Kieran, 2004, s. 142). Altså bør alle aktivitetene være representert ved undervisning og i lærebøker og det bør være en balanse mellom dem. Forskning viser at kun fokus på aktiviteter som problemløsning har ført til at elever ikke får nok kompetanse om reglene innenfor algebra og dermed mister forståelsen av for eksempel symbolaspektet (Kieran, 1996, s. 283). På motsatt side vil for stort fokus på transformerende og produserende aktiviteter gjøre at algebra blir et tema innenfor matematikken som ikke har tilhørighet eller sammenheng med andre tema.

2.3.4 Algebras tilknytning til andre emner

Algebras tilknytning til andre emner i matematikk og hva det kan ha å si er noe som har vært diskutert og forsket på av mange teoretikere. I den sammenheng har flere pekt på overgangen mellom aritmetikk og algebra. Algebra har flere sider og en av de er generalisering av aritmetikk og disse to matematiske grenene har stor tilknytning (Kieran, 2017). Likevel kan man se at flere elever har problemer med å se denne tilknytningen og dermed får problemer med algebra. Driscoll (1999) viser til et gap mellom læren om aritmetikk og læren om algebra. Han mener dette gapet kan gjøres mindre ved å ha fokus på sammenhenger og at lærere underviser med tanke på hva elevene skal lære senere. Kiziltorak og Köse (2017) setter fokus på relasjoner mellom tall og regneoperasjoner, som for eksempel det å se at $4 + 3$ er det samme som $2 + 2 + 3$ eller $3 + 4$. De mener at forståelsen for relasjoner i aritmetikken vil være viktig for videre læring av algebra. Dette vil si at et større fokus på relasjonene og sammenhengene i aritmetikken kan være gunstig for elevers læring og forståelse av algebra. Algebra har tilknytning til de fleste emner innenfor matematikk og har hatt det helt siden 1600-tallet (Sfard, 1995, s. 24). Noen tilknytninger er tydeligere enn andre. For eksempel er funksjoner et tema hvor algebra spiller en stor rolle. Flere mener at læren om funksjoner kan brukes som et bakteppe for å forstå algebra da mange situasjoner kan forklares ved hjelp av en funksjon og dens variabel (Chazan, 2014, s. 130 og Usiskin, 1988, s.11). Funksjoner kan med andre ord ha mye å si for elevenes forståelse av algebra om det blir introdusert på riktig måte. Likevel er ikke funksjoner det samme som algebra, men det er flere aspekt innenfor funksjonslæren som inneholder algebra. I grunnskolen ser vi mest oppgaver hvor det blir brukt algebraiske funksjoner[5] og slike funksjoner kan betraktes som en del av emnet algebra. Funksjoner er derimot mye mer enn kun algebraiske funksjoner og er et stort tema innenfor matematikken. I denne masteroppgaven vil vi derfor begrense oss til å se på funksjoner som et tema som har tilknytning til algebra, men ikke blir betraktet som algebra direkte.

Algebra er altså et komplekst aspekt ved matematikken, hvor det er flere faktorer som kan bidra til elvenes læring av algebra. Likevel ser vi at oppgaver i algebra kan deles inn i ulike aktiviteter som gir indikasjoner for hva elevene lærer. I tillegg er algebras tilknytning til andre matematiske emner viktig for å hindre at algebra oppleves som et atskilt emne. De ulike aktivitetene til Kieran gir oss en viss forståelse for hva oppgavene kan lære elevene, men denne inndelingen kan ikke bidra til innsikt i hvilken grad av forståelse elevene får. For å kunne få bedre kunnskap om dette må vi se på teorier om matematikkoppgaver generelt.

2.4 Kognitive krav i matematikkoppgaver

Innenfor matematikkoppgaver er det mange ulike forståelser og klassifiseringer. For å analysere oppgavene kunne vi valgt å bruke teorier om kreativ og imitativ resonnering, åpne og rike oppgaver eller for eksempel LIST-oppgaver. Nedenfor går vi kort inn på noen av teoriene og hvorfor vi har valgt å bruke teorien om kognitive krav i matematikkoppgaver.

LIST er en forkortelse for lav inngangsterskel, stor takhøyde (Matematikksenteret, u.å). Disse oppgavene baserer seg på at oppgavene skal være enkle å komme i gang med, men samtidig gi store utfordringer. Mattelist er en nettressurs fra matematikksenteret og er basert på en tilsvarende engelsk ressurs, NRICH, fra Universitetet i Cambridge. Matematikksenteret beskriver videre at oppgavene sammenlignes med det å utforske en ny by, i form av at alle kan starte å utforske en ny by, det finnes en rekke forskjellige måter å utforske på og en kan sammenligne erfaringene en tilegner seg. Denne typen oppgaver mener de kan være veldig verdifulle i matematikkundervisning og de er særlig aktuelle innenfor tilpasset opplæring (Matematikksenteret, u.å.). Vår erfaring tilsier at denne typen problemløsningsoppgaver kan være vanskelig å lage og tidkrevende å jobbe med. I en lærebok vil det være mange ulike typer oppgaver og en stor variasjon av oppgavetyper vil være fordelaktige innenfor emnet algebra (Kieran, 1996, s. 283). Med andre ord vil kun LIST-oppgaver ikke være gunstig for forståelsen for algebra. På grunn av dette og det faktum at et fåtall av oppgavene ville blitt analysert med fokus på LIST-oppgaver valgte vi en annen form for vurdering av oppgavene.

[5] En algebraisk funksjon er en funksjon som bygger på algebraiske likninger med en eller flere ukjente («algebraiske funksjoner», 2017).

Kreativ og imitativ resonnering handler om hvilke oppgaver som blir løst på hvilken måte (Lithner, 2006). En oppgave hvor eleven bruker *kreativ resonnering* vil være utfordrende for eleven, gi rom for ulike tilnærmingsmåter og baserer seg på gyldighet og matematiske begrep. En oppgave som løses ved *imitativ resonnering* vil derimot være basert på en kjent prosedyre eller modell som blir kopiert og fulgt slavisk av eleven. Imitativ resonnering kan også deles inn i underkategoriene memorerende og algoritmisk resonnering. *Memorerende resonnering* er oppgaver hvor eleven må huske svar, metoder eller fakta (Lithner, 2006). Her må eleven kun skrive et enkelt svar uten noen form for strategibruk. *Algoritmisk resonnering* går derimot ut på å huske hvilken algoritme som må brukes for å komme frem til rett svar (Lithner, 2006). Altså vil det kreve at eleven kan ulike regneoperasjoner, oppsett og strategier for å løse oppgaver. Denne metoden å analysere oppgaver ville gitt oss svar på hvilken type resonnering eleven må ta i bruk for å løse en oppgave. Kreativ og imitativ resonnering samstemmer derimot ikke med kjerneelementene på en optimal måte og vi valgte derfor ikke å bruke denne teorien.

Vi har derimot valgt å analysere oppgavene ut ifra deres *kognitive krav*, da disse nivåene får frem ulikhetene og mulighetene i oppgavene på en god måte. Det kognitive, eller hvordan elevene tenker og tolker har mye å si for hvordan oppgavene blir oppfattet, for motivasjon og for hva elevene lærer. Ut fra læreplanen skal elevene utforske, argumentere, reflektere, danne sine egne meninger og resonneringer og de skal gradvis utvikle en dypere og bredere forståelse for matematikken (Utdanningsdirektoratet, 2020). Derfor vil det kognitive nivået i oppgavene kunne gi oss en indikasjon på hvorvidt dette blir oppfylt. Smith og Stein (1998) har laget en inndeling for oppgaver i matematikk basert på fire kognitive krav, disse er igjen blitt presentert av Valenta (2016) gjennom Matematikksenteret hvor hun har presentert teorien med fokus på norske forhold. Begge disse artiklene er grunnlaget for forklaringen av de ulike nivåene nedenfor.

Det laveste nivået, som krever minst kognitivt av elevene kalles *memorering*. Dette nivået innebærer repetisjonsoppgaver, hvor elevene gjentar en gitt prosedyre. Her er det kun reproduksjon av fakta, regler og formler, uten at elevene skal reflektere eller forklare. På dette nivået er det heller ingen tilknytning til underliggende matematiske begrep eller sammenhenger. Et godt eksempel på en oppgave på dette nivået er multiplikasjonsstykker i gangetabellen eller enkle addisjonsoppgaver hvor det ikke trengs noe oppsett.

Det andre nivået heter *prosedyrer uten sammenhenger* og omhandler oppgaver hvor elevene skal reprodusere kunnskap, løse oppgaver hvor det er fokus på ett konkret svar og øve på en spesifikk algoritme. Ved slike oppgaver er det lite tvil om hvordan oppgaven skal løses og de krever ingen refleksjon eller forklaring fra eleven. Her vil oppgaver hvor elevene må sette opp regneoperasjoner på en bestemt måte for å finne riktig svar være inkludert.

Det tredje nivået er *prosedyrer med sammenhenger*. Innenfor dette nivået finner vi oppgaver som baserer seg på brede og generelle strategier og begreper i matematikken. Det er ikke fokus på algoritmer i disse oppgavene, selv om eleven kanskje må bruke kjente algoritmer for å komme frem til svaret. Her kan man finne oppgaver hvor elevene må gå fra en representasjonsform til en annen, for eksempel det å veksle mellom tabell, funksjon og graf. Elevene kan ikke følge en prosedyre uten å tenke seg om og de vil ofte bli bedt om å forklare, begrunne og argumentere for hvordan de har tenkt.

Det fjerde og siste nivået baserer seg på oppgaver hvor elevene får mulighet til å utforske og kalles *matematisk tenking*. Disse oppgavene krever mye av elevene og legger til rette for at elevene må tenke selv. Her vil elevene få bruk for flere aspekter av det de allerede innehar av kunnskap og ferdigheter og arbeidet fører ofte til en kjent algoritme, sammenheng eller relasjon. Gjennom slike oppgaver vil eleven utvikle det matematiske språket ved å reflektere, resonnere, argumentere og modellere. De vil bli bedt om å vurdere sine egne løsninger og se om det de har kommet frem til kan brukes i andre sammenhenger. Innenfor dette nivået vil vi også finne åpne oppgaver med flere riktige svar hvor inngangsterskelen er lav, for eksempel LIST-oppgaver. Slike oppgaver kan på denne måten tilpasses hver enkelt elev eller gruppe, slik at det ikke spiller noen rolle hvilke forutsetninger eleven har.

Oppgaver på alle de ulike nivåene vil være å finne i en lærebok i matematikk og så lenge det finnes en balanse vil dette være til fordel om vi tenker på Kierans og Kaputs teorier om hva algebra er og hvilke aktiviteter som gjøres (jf. 2.3). Likevel vil oppgaver med de høyeste kognitive kravene være med på å utvikle den matematiske forståelsen til elevene på en helt annen måte enn de som har lave kognitive krav. For å få grundig matematisk kompetanse må elevene få forståelse for begreper, øvelse i matematiske prosedyrer, strategikompetanse, lære seg å resonnere og være motiverte og engasjerte i matematikken (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Matematisk kompetanse krever altså fokus og øvelse på flere plan enn det henholdsvis memorering og prosedyrer uten sammenhenger kan gi. De oppgavene med høyest kognitivt krav vil også sammenfalle med kjerneelementene på flere områder enn det oppgaver på de laveste nivåene gjør. Valenta (2016, s. 10) poengterer at oppgaver med høye kognitive krav bør gjennomføres ofte, på hvert årstrinn og innenfor alle matematiske tema og at de bør inkludere alle elever uavhengig av hvilket nivå eleven er på. Med andre ord vil oppgaver med høye kognitive krav i lærebøkene være til fordel for elevenes læring og forståelse av algebra, samtidig som de skal få presentert oppgaver som dekker alle de fire nivåene. Hvordan forlagene velger å fremstille elevoppgavene i lærebøkene kan derfor ha stor betydning for hvilke muligheter elevene har for læring i matematikk.

2.5 Lærebøker og hvordan disse brukes i skolen

En lærebok blir definert som et trykt læremiddel og skal brukes regelmessig av elevene for å oppnå kompetansemålene i de enkelte fag (Opplæringslova, 1998, § 9-4). Dette kan tydes dit hen at lærebøker har en stor rolle i de norske klasserom og skal brukes som et verktøy for å bidra til elevers læring. Flere studier viser det samme, at lærebøker har en vesentlig rolle i undervisningssituasjoner og at lærebøker er en videreføring av læreplanen (Brehmer et al., 2015; Jablonka & Johansson, 2010). Dette gjelder ikke bare for elevene, men også for hvordan læreren legger frem sin undervisning. Flere lærere bruker begreper og introduserer nye tema ut ifra hvordan læreboken fremstiller det aktuelle temaet (Jablonka & Johansson, 2010). Med andre ord har valg av læreverk stor betydning for elevenes læring. Da er det også viktig at lærebøkene representerer læreplanen på en god måte.

Tidligere ble lærebøker brukt i den norske skole godkjent for bruk av Nasjonalt læremiddelsenter fastsatt som lov gjennom opplæringslova (Prop. 44 (1999-2000), s. 27). Proposisjonen viser videre at denne ordningen ble fjernet i 2000 på grunnlag av at det er læreplanen som skal være hovedfokuset for hva elevene skal lære og at lærebøker skal sees på som et hjelpemiddel som det er best at læreren velger. Med andre ord ble det i 2000 lagt betydelig større ansvar på den enkelte lærer og skole for valg av undervisningsmateriell. Selv om det er forståelige argument departementet har lagt til grunn for sin beslutning, bør det poengteres at flere var mot dette vedtaket. Flere argumenterte for at en statlig kontroll ville sikre godt innhold i lærebøkene og fjerningen av denne ordningen ville medføre økt risiko for dårlig kvalitet på lærebøkene (Prop. 44 (1999-2000), s. 28). I tillegg kan det påpekes at den økonomiske delen også er av betydning. Vi har begge vært i studentpraksis ved skoler hvor økonomien la begrensinger for hvilke læreverk som ble brukt i matematikk. Læreverkene var utdaterte både med tanke på innholdet i de matematiske temaene og hvordan oppgavene var laget. Dette er ikke noe vi skal diskutere videre i denne oppgaven, men det kan være et argument for hvorfor denne ordningen ikke er optimal. Om vi sammenligner med andre land som har statlig kontrollering av læreverk finner vi flere argument for at denne avgjørelsen kanskje ikke var så heldig.

Studier av deltakende land i TIMSS viser at lærere som underviser i *secondary school* bruker lærebøker i store deler av undervisningen (Wilkens, 2011). Både Norge, Sverige, Finland og Danmark, sammen med omtrent halvparten av landene som deltar i TIMSS var med i studien og resultatene viste at 77% av lærere bruker lærebok som hovedressurs i undervisningen og 5% i tillegg til disse brukte kun lærebok i undervisningen. Studien ser også nærmere på ulike godkjenningsordninger de forskjellige landene har for bruk av læreverk i skolen. Ser en på landene som har høyest resultat i matematikk på TIMSS, Taipei, Japan, Korea, Hong Kong og Singapore, har alle til felles at læreverkene må gjennom en eller annen form for statlig godkjenning før de tas i bruk i skolen. Alle de nordiske landene har ingen form for godkjenning av læreverk med argumenter som at lærerne i selv velger ut hvilke læreverk som er gode nok for deres undervisning (TIMSS & PIRLS International study center, u.å.). En av bakdelene kan være at dette valget krever høy kompetanse hos lærerne som skal gjøre utvelgelsen av de ulike læreverkene. I tillegg vil økonomien utgjøre en viktig faktor da det ikke kjøpes inn bøker hvert år, slik at lærere mest sannsynlig må ta til takke med læreverkene en tidligere lærer har valgt. Et annet moment er konkurransen mellom forlagene som gir ut læreverk. Tre forlag har gitt ut nye eller reviderte lærebøker for 8.trinn i matematikk, Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug. Mellom disse er det en forskjell på 146 kroner per bok fra den billigste læreboken til den dyreste. Om det er 40 elever på 8.trinn vil forskjellen utgjøre nesten 6000 kroner. Jo flere elever, jo større blir forskjellen. Økonomien til skolen kan derfor ha mye å si for valg av læreverk. Her kan det være tilstrekkelig å være bedre eller mer attraktiv enn konkurrenten, uavhengig av om det er et læreverk som er et godt nok verktøy til å hjelpe lærere og elever med å nå kompetansemålene og god læring i forhold til innholdet i læreplanen.

Det faktum at norske læreverk ikke må gjennom en statlig kvalitetssjekk eller godkjenning vil være med på å gjøre vårt prosjekt mer nyttig for samfunnet. Mangelen på en slik godkjenning kan være med på å bidra til at lærere bruker lærebøker som ikke er gode nok som hjelpemiddel til at elevene i størst mulig grad oppnår kompetansemålene i læreplanen.

3.0 Design og metode

Det er flere momenter som må avklares ved vårt design og vårt valg av metode. I dette kapittelet tar vi først for oss hvilket vitenskapelig ståsted vi arbeider ut fra i tillegg til en avklaring av forskjellen og balansegangen mellom kvalitativ og kvantitativ forskning. Deretter går vi nærmere inn på hvorfor vi har valgt dokumentanalyse som vårt design, samt hvordan vi har tenkt ved utvelgelse av lærebøker. Forskningen vår har en problemstilling som vanskelig kunne blitt besvart med et spørsmål, derfor har vi formulert fem analytiske spørsmål som blir konkretisert i delkapittel 3.2. Neste delkapittel tar for seg kategoriseringsprosessen generelt, i tillegg til at vi forklarer med eksempel hvordan vi tenker å finne svar på hvert enkelt analytiske spørsmål. Til sist i kapittelet drøfter vi datakvalitet, i form av reliabilitet og validitet før vi diskuterer de etiske hensynene som må tas i forbindelse med vår forskning.

3.1 Vitenskapelige betraktninger

Innenfor vitenskapelig forskning er det to hovedretninger, naturvitenskap og humanvitenskap. *Naturvitenskapen* er interessert i å finne ut hvordan ting fungerer og lite om hvorfor det er slik (Dalland, 2018, s. 40). Med andre ord konsentrerer naturvitenskapen seg kun om å beskrive og utdype hvordan ulike naturfenomen faktisk opptrer og bruker lite tid på om holdninger, meninger og menneskelige interaksjoner har noe å si for hvorfor de opptrer slik. *Humanvitenskapen* på den andre siden spør ofte hvorfor ulike fenomener forekommer. Denne vitenskapen undersøker og prøver å svare på aspekter som naturvitenskapen ikke baserer seg på, slik som rett og galt, vakkert og stygt (Dalland, 2018, s. 44). Altså vil humanvitenskapelige forskningsprosjekt prøve å forstå ulike fenomen, mens naturvitenskapen ønsker å forklare. Derimot vil en forskning som påberoper seg den ene eller den andre retningen ofte streife innom begge retninger i løpet av forskningsprosessen.

Forskning innenfor lærerstudiet vil være basert på humanvitenskap generelt og samfunnsvitenskap spesielt da læreryrket er en profesjon hvor man er i kontakt med mennesker kontinuerlig. *Samfunnsvitenskapen*, i motsetning til naturvitenskap baserer seg på mennesker, deres tanker og oppfatninger (Johannessen et al., 2016, s. 27). Gjennom dette synet vil forskeren bli en deltaker som kan påvirke samfunnet både ved selve forskningen og gjennom funnene sine. Med andre ord vil en forskning innenfor lærerstudiet bestrebe å finne ut hvorfor ulike aspekter er slik som de er, se etter sammenhenger og forklare menneskenes posisjon og innvirkning. Likevel kan ofte forskning innenfor feltet inneha mer eller mindre elementer av naturvitenskapen ut ifra hvilken vinkling forskeren påtar seg.

Samfunnsvitenskapen er delt opp i flere ulike retninger eller skiller. Det tydeligste skillet er mellom kvantitativ og kvalitativ forskning (Johannessen et al., 2016, s. 27-28). *Kvantitativ* metode baserer seg på innsamlede data, for eksempel fra spørreskjema hvor dataene blir talt opp, summert, sammenlignet og vurdert. En kvantitativ tilnærming vil også kreve et visst antall objekter og svar for å heve gyldigheten til undersøkelsen. En *kvalitativ* tilnærming vil derimot kreve færre objekter. Intervju og observasjon er to eksempler på kvalitativ forskning, hvor forskeren kan få mer nyanserte svar på spørsmålene sine. Kvantitative undersøkelser kan ofte ha aspekter fra naturvitenskapelig ståsted, hvor det presenteres tallbaserte funn som uten noen videre forskning kan mangle forklaring på hvorfor tallene er slik de er (Johannessen et al., 2016, s. 28). Med andre ord finner vi kombinasjoner og elementer fra flere retninger innenfor mange forskningsprosjekt.

Vår forskning har sin base innenfor samfunnsvitenskapen da det er tema innenfor læreryrket det blir forsket på. Som vi skal se nærmere på nedenfor, vil forskningen vår inneha elementer fra naturvitenskapen, da vi undersøker lærebøker og dermed ikke har direkte kontakt med mennesker. Gjennom analysen av disse lærebøkene vil vi tolke hvilken innvirkning oppgavene i lærebøkene kan ha for elevenes læring av algebra, altså hvordan og ikke hvorfor. Derimot kan de resultatene vi finner ha en betydning videre på flere aspekt. For det første for oss som fremtidige lærere og hvordan vi velger læreverk når vi underviser i matematikk. Dette vil igjen ha innvirkning for de elevene vi underviser. For det andre vil denne studien gi oss grunnlag for å gi anbefalinger videre til skoleledelsen ved innkjøp av nye læreverk i matematikk. Det siste aspektet er i forbindelse med forlagene og forfattere av fremtidige læreverk basert på fagfornyelsen. Forskningen vår kan ha innvirkning på hvordan disse utarbeider lærebøker fremover. På denne måten vil arbeidet med denne masteroppgaven være med å forme samfunnet og dermed ha en samfunnsvitenskapelig tilknytning.

3.2 Valg av metoder

Temaet for vår masteroppgave var fra starten av algebra tilknyttet fagfornyelsen. Vi hadde et ønske om å belyse hva som kunne forbedres med tanke på hvordan opplæringen i algebra er i dag. Her kunne vi valgt mange ulike metoder for å finne svar, men da vi fant ut at vi ville se nærmere på læreverk, ble metodene mer begrenset. Likevel var muligheten der for å gjennomføre eksempelvis intervju eller spørreskjema til elever eller lærere. Etter diskusjon og vurdering kom vi frem til at dette ikke ville være gunstig. Fagfornyelsen med alle dens endringer er inne i en implementeringsfase hvor elever og lærere må forholde seg til nye fokusområder. I tillegg er vi midt inne i en pandemi som gjør at skolehverdagen er litt annerledes og hektisk for de involverte. Et intervju ville gi oss lite informasjon om hvordan den nye læreplanen har blitt tatt i bruk da lærere og elever ikke har fått nok tid til å erfare hva fagfornyelsen kan bidra med. I tillegg har vi selv opplevd en avventende holdning til kjøp av nye læreverk. Et spørreskjema ville kunne gi oss svar på problemstillingen, men i en hektisk tid så vi for oss at det var få lærere som ville ta seg tid til å svare. Vi endte derfor med en metode som kunne gi oss svar uten mellomleddet av personer, nemlig dokumentanalyse.

3.2.1 Dokumentanalyse

En *dokumentanalyse* er en analyse hvor innholdet i dokumentene blir gjennomgått systematisk for å finne relevant informasjon og kan basere seg på mange ulike typer dokumenter (Grønmo, 2016, s. 175 & 213). I vårt tilfelle er det snakk om faglige dokument. Ved analyse av faglige dokumenter er det viktig å ikke tillegge analysen noen egne, ubegrunnede meninger og at forskeren er så nøytral som mulig (Johannessen et al., 2016, s. 99). Med andre ord må vi analysere lærebøkene ut ifra de forhåndsbestemte kategoriene og presentere de funnene vi kommer frem til med bakgrunn i teori og med støtte fra fagfornyelsen.

En dokumentanalyse kan enten være kvalitativt rettet, kvantitativt rettet eller inneholde elementer fra begge. En *kvalitativ innholdsanalyse* vil innebære vurderinger og analyse av sitater og tekster for å belyse hvilke verdier eller holdninger som er sentrale (Grønmo, 2016, s. 142). I tillegg vil en kvalitativ analyse stort sett først innhente data før denne dataen tolkes inn i ulike kategorier. En *kvantitativ innholdsanalyse* tar derimot for seg innholdet i dokumentet ut ifra allerede bestemte kategorier (Grønmo, 2016, s.143). Med andre ord vil forskeren først klargjøre ulike kategorier ut ifra for eksempel teori før selve analysen av dokumentet gjennomføres. Disse to kan også kombineres ved at man enten gjør kvalitative forundersøkelser før en større kvantitativ undersøkelse, eller gjennomfører en større kvantitativ studie før man ser nærmere på enkeltdeler kvalitativt (Grønmo, 2016, s.231). Det første alternativet vil gi forskeren et overblikk over dokumentet før den kvantitative undersøkelsen starter. Det andre alternativet er aktuelt for å gå dypere ned i det kvantitative materialet for å analysere videre. I vår undersøkelse var det naturlig å bestemme kategoriene på forhånd, da læreplanen legger føringer for hvordan et læreverk bør utformes og bestemmer hva elevene skal lære og beherske i fagene. Vår forskning kan sees på som en kombinasjon av både kvantitativ og kvalitativ innholdsanalyse. Den kvantitative delen er når vi gjennomfører analysen av alle oppgavene i de to lærebøkene ut fra forhåndsbestemte kategorier, mens den kvalitative delen går nærmere inn på ulike momenter og faktorer i denne analysen som vil være med på å besvare problemstillingen. Derfor har vi presisert fem analytiske spørsmål som inngår i den kvalitative analysen og som vi går grundigere inn på senere i dette kapittelet.

For å få svar på hva elevene kan oppnå av læring i algebraoppgavene har vi valgt å analysere oppgavene ut ifra deres kognitive krav, elementer fra læreplanen og algebraisk aktivitet. Derfor har teori om kognitive krav i matematikkoppgaver, teori om algebra og læreplanens formuleringer utgjort de ulike kategoriene på forhånd av den faktiske analysen. På denne måten vil undersøkelsen vår også være *strukturert* hvor alle oppgavene blir analysert på samme måte (Grønmo, 2016, s. 145). Med dette menes det at kategoriene er klargjort på forhånd med ulike kriterier og derfor vil forskningen bli strukturert på bakgrunn av at disse kategoriene ikke endres i løpet av undersøkelsen.

Gjennom forskningsarbeidet vårt er vi ute etter å finne et læreverk som introduserer algebraoppgaver på en måte som treffer kriteriene til læreplanen godt. På grunn av at vi ser nærmere på to lærebøker, vil dette også bli en *komparativ analyse* som tar utgangspunkt i prinsippet med sammenligning (Grønmo, 2016, s. 404-406). Her har vi valgt ut enheter som er mest mulig like. Begge lærebøkene er ment for 8.trinn, begge omhandler matematikk, de har likt format i form av at de er grunnbøker for 8.trinn og de er begge basert på den nye læreplanen. Den komparative analysen vil gi oss grunnlag for å se hvilke av lærebøkene som gir elevene best forståelse og læring når det kommer til emnet algebra.

For å besvare vår problemstilling har vi altså valgt å gjennomføre en dokumentanalyse av to lærebøker. Analysen omhandler kun elevoppgavene og ikke eksempler eller forklaringer i form av tekst. Valget om å kun fokusere på oppgavene er bevisst da vi i en masteroppgave ikke har tid eller ressurser til å ta for oss hele boken og dens innhold. Derimot har vi valgt å se på alle oppgavene og ikke bare oppgavene tilhørende algebrakapittelet. Valget om å se på oppgaver fra alle kapittel er basert på at algebra kan sees på som en tenkemåte og et verktøy for eksempelvis generalisering, samt at det har tydelig tilknytning både til aritmetikken, geometri og funksjoner. Algebra bør på bakgrunn av dette være representert i store deler av lærebøkene.

Oppgavene i lærebøkene skal analyseres i ulike kategorier som er utformet basert på teori om algebra, kognitive krav i matematikkoppgaver og læreplanen og dens krav. Gjennom selve analysen vil vi først og fremst vurdere om oppgaven kan knyttes til algebra eller ikke. De oppgavene som blir vurdert som utenfor vårt fokusområde vil ikke bli videre analysert.

Etter analysen vil vi kunne se 1) hvor mange oppgaver som er algebra og hvor mange som er tilknyttet algebra, 2) hvilke kognitive krav disse oppgavene har, 3) hvilke kjerneelement oppgavene dekker og 4) hvilken type algebraisk aktivitet oppgavene krever. Alle disse dataene vil kunne gi oss mulighet til å vurdere om lærebøkene dekker de kravene læreplanen legger til grunn for god opplæring i matematikk og dermed også algebra.

3.2.2 Valg av læreverk

For å belyse vår problemstilling har vi for det første valgt å analysere læreverk for 8. trinn. Algebra er et tema som er presentert i kompetansemål for alle trinn, men det er i 8. trinn elevene skal ha mest fokus på temaet. Dessuten, på grunn av at læreplanen blir innført gradvis over flere år var ikke læreverk for alle trinn utgitt da vi startet prosjektet vårt. Derfor ble det naturlig å velge lærebøker tiltenkt dette trinnet. Etter en rask undersøkelse fant vi ut at det var tre forlag som hadde gitt ut lærebøker innen matematikk til den nye læreplanen for 8. trinn, samt et digitalt læreverk, henholdsvis *Maximum 8* fra Gyldendal forlag, *Matematikk 8* fra Cappelen Damm, *Matemagisk 8* fra Aschehoug og *Campus Inkrement* som det digitale alternativet. Vi ønsket å gjøre en komparativ analyse basert på mest mulig like dokumenter og valgte på bakgrunn av dette å ikke ta med det digitale alternativet, *Campus Inkrement.* I tillegg til dette ønsket vi å bruke læreverk som var laget etter den nye læreplanen, da den nye læreplanen innehar store endringer. I motsetning til LK06 hvor kompetansemålene gikk over tre årstrinn og som la opp til at de matematiske emnene ble repetert for hvert skoleår, har LK20 nye kompetansemål for hvert trinn. Gjennom disse kan man se at fokusområdene i de ulike trinne endrer seg fra år til år noe som tyder på at læreplanen legger opp til læring av konkrete matematiske tema over lengre tid. Kompetansemålene i læreplanen for matematikk på 8. trinn dreier seg stort sett om algebra, funksjoner og aritmetikk. På grunn av de store endringene som ble innført med LK20 bestemte vi oss for å velge bort *Maximum 8,* da denne er en revidert utgave av samme læreverk basert på LK06. Denne beslutningen gjorde at vi også kunne bruke mer tid på analysen og gå grundigere til verks da vi fikk mer tid til de gjenværende lærebøkene. De to læreverkene vi tok med oss videre til analysen ble derfor *Matematikk 8* fra Cappelen Damm (Hjardar & Pedersen, 2020) og *Matemagisk 8* fra Aschehoug (Kongsnes & Wallace, 2020).

De to læreverkene har ulike elementer. *Matematikk 8* har grunnbok og oppgavebok tilgjengelig i bokformat, mens *Matemagisk 8* har grunnbok og elevhåndbok i bokformat. Begge læreverkene har digitale ressurser som er et supplement til de fysiske bøkene. På grunn av ulikhetene i hvordan forlagene har valgt å fremstille sine læreverk måtte vi ta en beslutning om hva vi skulle inkludere i vår studie. Vi tenkte lenge at vi skulle analysere både grunnbøker og eventuelle oppgavebøker, men konkluderte til slutt med at det kun var aktuelt med analyse av de to grunnbøkene. Dette valget ble tatt både på grunn av tiden som er avsatt for denne masteroppgaven og begrensningene dette utgjør, samt at vi gjennom å kun fokusere på grunnbøkene ville få et større grunnlag for en god komparativ analyse basert på mest mulig like forutsetninger.

I et større prosjekt ville det derimot vært mulig å gjennomføre en analyse av alle fire læreverkene som er tilgjengelige og samtidig gjennomføre analysen på alle plattformer som forlagene har inkludert i sine læreverk, slik at en sammenligner alt som er tilgjengelig for lærere som undervisningsmateriell i matematikk. Analysen vi gjør av disse grunnbøkene vil likevel kunne gi en god sammenligning av to av lærebøkene på markedet og vil kunne gi oss implikasjoner på hva oppgavene i algebra kan bidra med for elevenes læring. Selv om formatet til lærebøkene er like er det fortsatt forskjeller innholdsmessig som må sees nærmere på.

3.2.3 Kort beskrivelse av læreverkene

Det er flere ulikheter på utformingen av bøkene og disse vil bli redegjort for nedenfor. *Matemagisk 8* fra Aschehoug er inndelt i ti kapittel som omhandler temaene tall og tall-lære, algebra, likninger, funksjoner og sammensatte måleenheter. Boken er videre delt inn i underkapitler. Fremst i boka går de gjennom de ulike elementene som finnes i boka, videre kommer en kort oppsummering av dette (Kongsnes og Wallace, 2020, s.4-5). Gjennom hvert kapittel finnes det oppgaver som blir kalt «Fellesløypa» og som indikerer at disse oppgavene skal alle elever kunne løse. I enkelte delkapitler er det inkludert større oppgaver som omhandler et spesielt tema basert på virkeligheten slik som «Hund», «Smoothie» og «Mønster». Etter hvert delkapittel følger repetisjonsoppgaver på to ulike nivå, «Følg stien» og «Terrengløypa». Oppgavene under det første nivået er ren repetisjon og inneholder kun det temaet som nettopp er gjennomgått i delkapittelet. Det andre nivået inneholder oppgaver som kan kombinere ulike tema, men som samtidig er innenfor det elever på dette årstrinnet skal lære. Etter hvert kapittel finner vi oppgaver under overskriften «Topptur» som går utenfor det elevene skal lære, som går videre i fagstoffet og byr på mer utfordring. Etter enkelte kapittel finner vi oppgaver under navnet «Ekspedisjon». Disse oppgavene ligger langt utenfor det elevene er forventet å kunne og «gir særlig god trening i abstraksjon, generalisering og avansert problemløsning.» (Kongsnes og Wallace, 2020, s. 5). I tillegg til disse oppgavene har boka inkludert «Snakke matte»-oppgaver hvor elevene skal diskutere, forklare og opparbeide matematisk språk.

Utenom oppgavene starter hvert kapittel med en forside med illustrasjoner og tilhørende spørsmål som kan diskuteres. Hvert delkapittel starter med korte setninger om hva eleven skal lære i løpet av gjennomgangen. Det finnes eksempler og forklaringer, i tillegg til spill og aktiviteter.

Matematikk 8 fra Cappelen Damm er inndelt i fire kapittel, henholdsvis *Tall og tallforståelse, Delelighet og brøk, Algebra* og *Funksjoner*. Også i denne læreboka gir forfatterne en kort innføring i bokens oppbygging og hvordan elevene kan bruke boka (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 3). Oppgavene løper gjennom hele boka og er inndelt i ulike nivå, ett som alle skal gjennom, disse har ingen markering, og tre nivå som øker i vanskelighet som er markert med en til tre prikker. I tillegg til oppgavene som løper kontinuerlig gjennom boka er det også oppsummerende oppgaver for repetisjon etter hvert kapittel, disse kalles «Underveisvurdering». På slutten av hvert kapittel finner vi også tverrfaglige oppgaver hvor elevene jobber med noen av FNs bærekraftsmål. I tillegg til disse elevoppgavene har forfatterne inkludert bokser markert med spørsmålstegn plassert på strategiske steder i boka, hvor det finnes oppgaver og spørsmål som skal diskuteres i fellesskap.

Generelt starter hvert kapittel med en forside hvor tilhørende elevmål og viktige begrep blir presentert. Bakerst i boka har de inkludert en manual for bruk av *Geogebra* og regneark. Metoder og utregninger blir forklart med tilhørende eksempler og informerende tekst. I motsetning til *Matemagisk 8* er det ingen aktiviteter eller spill i *Matematikk 8*.

3.2.4 Oppgavene i lærebøkene

De to bøkene har ulikt design og ulike hensyn er blitt tatt. Det er kun oppgavene i bøkene som er blitt analysert. Eksempler, informativ og introduserende tekst, aktiviteter og spill er ikke inkludert i vår analyse. Selve utformingen av bøkene med kapitler og underkapitler blir heller ikke analysert eller tatt hensyn til.

Alle oppgavene i begge bøkene er blitt analysert, uavhengig av nivå, utforming og oppgavetype. For eksempel har begge bøkene diskusjonsoppgaver som faller litt utenfor den naturlige veien for en elev å arbeide i boka. Slike diskusjonsoppgaver kan ofte bli oversett av elevene om ikke læreren bruker tid på å implementere de i undervisningen. Derimot er det ikke i hvilken grad læreren bruker de ulike oppgavene vi skal analysere, men hvilken type oppgaver lærebøkene presenterer for elevene. Disse diskusjonsoppgavene kan være veldig gode for refleksjon og utvikling av det matematiske språket. Derfor har også disse oppgavene blitt analysert på samme grunnlag som de andre oppgavene i boka.

For at analysen av oppgavene skal kunne gi svar på problemstillingen må vi definere nærmere hva vi ser etter i oppgavene. I de neste underkapitlene vil dette bli presisert.

3.3 Analytiske spørsmål

Det er flere momenter vi ønsker svar på gjennom dette prosjektet. Oppgavene i lærebøkene blir analysert ut fra forhåndsbestemte kategorier basert på teorier om kognitive krav i matematikkoppgaver, kjerneelementer i læreplanen for matematikk og algebraisk aktivitet. Dataene i seg selv vil kunne gi delvis svar på problemstillingen, men vi må klargjøre hva vi ønsker å se nærmere på innenfor de ulike kategoriene. Videre vil fem analytiske spørsmål bli presentert.

3.3.1 Algebra og algebraisk tilknytning

Det første vi ønsker å finne svar på gjennom dette forskningsprosjektet er hvor mange av oppgavene i lærebøkene som er algebraiske. Motpolen blir her oppgaver som ikke omhandler algebra. Problemstillingen vår sier i tillegg at vi ønsker å vite om lærebøkene har oppgaver som kan hjelpe elevene til å forstå algebra. Derfor har vi også inkludert en kategori hvor oppgaver som har tilknytning til algebra blir plassert. Her baserer vi oss på teorier om algebras tilknytning til andre tema, slik som blant annet aritmetikk, geometri og funksjoner. Første analytiske spørsmål baserer seg altså på hvor mange oppgaver som inneholder algebra eller har tilknytning til algebra. Begge disse kan være med på å øke elevenes forståelse og læring av emnet.

3.3.2 Kognitivt nivå

For det andre vil vi finne ut hvilket kognitivt nivå de algebraiske oppgavene ligger på. Da forskningen viser at oppgaver med høye kognitive krav kan gi elevene en bredere og dypere forståelse for matematikk vil også en høy representasjon av disse nivåene være et tegn på at elevene får bedre forståelse for algebra. De laveste nivåene, memorering og prosedyrer uten sammenhenger er også en nødvendig del i en lærebok, men en overvekt av disse kan føre til en snever forståelse for algebra spesielt og matematikk generelt. Gjennom å analysere oppgavene inn i de fire ulike nivåene vil vi få en indikasjon på om det er god nok representasjon av de høyeste nivåene i de to lærebøkene.

3.3.3 Kjerneelement

For det tredje vil vi prøve å finne svar på om lærebøkene dekker kjerneelementene i læreplanen når det kommer til de algebraiske oppgavene. Læreplanen påpeker at kjerneelementene skal være til stede gjennom alle tema og over tid (Utdanningsdirektoratet, 2017). Derfor ønsker vi å vite hvilke kapitler som inkluderer kjerneelement, om bøkene dekker alle kjerneelementene og i hvilken grad de blir representert.

3.3.4 Algebraisk aktivitet

For det fjerde ønsker vi å få svar på hvilke typer algebraiske oppgaver elevene møter i lærebøkene. Her tar vi utgangspunkt i Kierans (1996) inndeling i aktiviteter som dekker oppgaver av typen transformerende, produserende og *global-meta level*. Alle de ulike oppgavetypene er nødvendige, men en overvekt av transformerende algebraoppgaver kan føre til at elevene får et snevert syn på temaet (Kieran, 2004, s. 142). Derfor vil en god representasjon av alle de tre aktivitetene være nødvendig for å gi elevene best mulig forutsetning for å forstå algebra.

3.3.5 Tilpasset opplæring

Det femte analytiske spørsmålet omhandler opp lærebøkene legger opp til tilpasset opplæring. Tilpasset opplæring kan generelt være vanskelig å se eller måle, men er en viktig del i all undervisning. Lærebøker kan tilpasse oppgaver på ulike nivå for å treffe ulike forutsetninger, men de kan også legge opp til oppgaver hvor det er lav inngangsterskel hvor elever med ulike forutsetninger for matematikk kan delta. I tillegg vil oppgaver som er åpne og gir rom for flere svar kunne inkludere flere elever. Innenfor de ulike kognitive nivåene vil oppgaver med høye kognitive krav kunne gi rom for at de ulike forutsetningene til elevene ikke spiller noen rolle, men heller kan være en fordel for eksempel i samarbeid. De ulike kjerneelementene legger også opp til tilpasset opplæring, da disse skal bidra til å utvikle forståelsen av og kunnskapen om matematikk. Kierans *global-meta level* vil også inneholde oppgaver av typen som kan bidra til dette. Å se nærmere på tilpasset opplæring i matematiske oppgaver kan være utfordrende, men er et viktig aspekt for å se om lærebøkene får med seg alle elevene med deres forutsetninger for matematikk.

Disse fem delanalysene vil igjen kunne gi oss svar på problemstillingen om nye lærebøkene inkluderer oppgaver som gir elevene gode forutsetninger for å lære algebra ut ifra den nye læreplanen.

3.4 Kategoriseringsprosess

Det er flere faktorer som bør redegjøres for i forbindelse med utarbeidelsen av kategoriene og prosessen rundt analyseringen. Vi bestemte oss tidlig for at det kun var elevoppgavene som skulle analyseres og ikke eksempler eller introduserende tekst. Oppgaver fra hele boken ble analysert da vi gjennom teori om algebra har fått forståelse for hvor altomfattende algebra kan være og hvor mye andre emner kan ha å si for forståelsen for algebra.

Tidlig i prosessen så vi at en oppgave med deloppgaver ofte endret karakter fra eksempelvis transformerende til produserende aktivitet eller fra et kognitivt nivå til et annet. På grunn av dette valgte vi å analysere hver deloppgave for seg. Hver deloppgave blir først vurdert som enten algebra, tilknytning til algebra og ikke algebra. Om deloppgaven blir vurdert som alt annet enn algebra vil den ikke bli analysert videre. Alle oppgaver som faller innenfor kategorien «algebra», blir videre analysert i forhold til kognitive krav, kjerneelement og algebraisk aktivitet. Hver deloppgave kan kun plasseres i en av de fire kognitive nivåene. En oppgave kan inkludere ett, flere eller alle kjerneelementene, mens andre ikke dekker noen av dem. Når det kommer til algebraisk aktivitet vil de aller fleste oppgavene enten være transformerende, produserende eller *global-meta*, men kan også være flere samtidig.

Ved bruk av *Excel* har vi delt opp skjemaet i kapitler og underkapitler i de tilhørende bøkene. Dermed har vi muligheten til å se hvilke kapitler som inkluderer algebra og videre hvilke kjerneelement som blir presentert i hvilke kapitler.

Videre vil vi gå nærmere inn på hvordan vi skal kunne svare på de analytiske spørsmålene samtidig som vi gir eksempler på hvordan vi har analysert innenfor de ulike kategoriene.

3.4.1 Algebra og algebraisk tilknytning

Det første analytiske spørsmålet baserer seg på antall oppgaver som kan bidra til bedre forståelse og læring av algebra. For å svare på dette ser vi på to ulike faktorer – hvor mange oppgaver som inneholder algebra og hvor mange som har tilknytning til algebra. For å få svar på dette har vi i første omgang analysert hver deloppgave hver for seg og plassert de innenfor en av kategoriene som vist nedenfor.

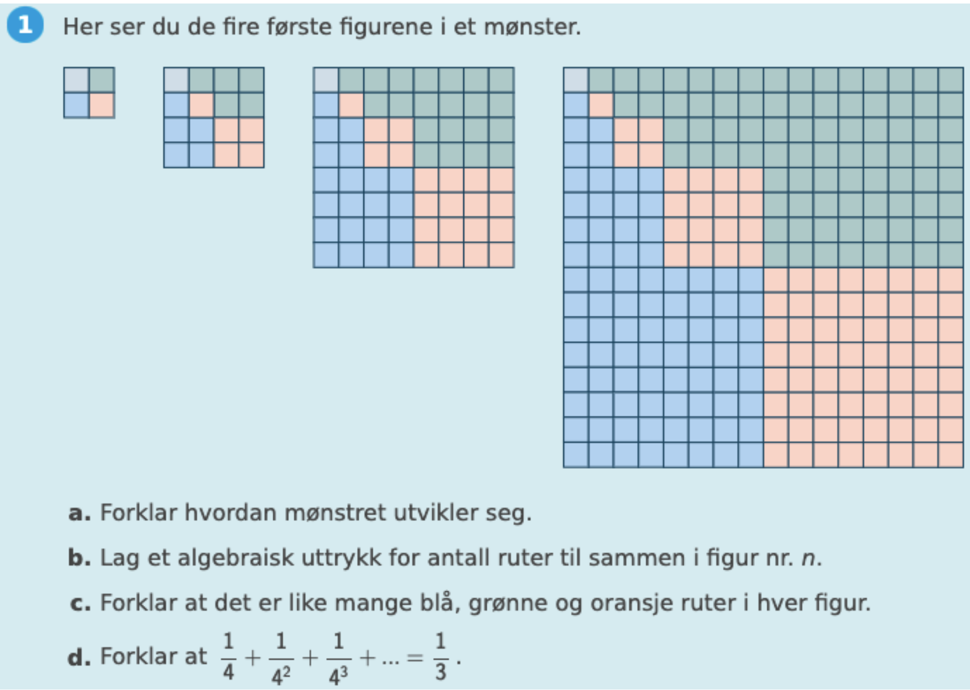
Algebra	Tilknytning til algebra	Ikke algebra

Tabell 1:Kategoriene for første analytiske spørsmål.

Her er det enten eller, ingen oppgaver kan analyseres inn i flere av disse kategoriene. Etter alle oppgavene i lærebøkene er analyserte vil vi få datamateriale på hvor mange oppgaver som finnes totalt i lærebøkene, hvor mange som er oppgaver innenfor algebra, hvor mange som har tilknytning og hvor mange som ikke kan defineres som algebra. Dette datamaterialet vil vi da sammenligne på ulike måter. Først og fremst vil vi se på hvor mange prosent av oppgavene som er algebraoppgaver og hvor mange som har tilknytning til algebra. Deretter kan vi sammenligne de to bøkene og se om det er noen forskjeller på hvor stor del av innholdet som kan gi elevene bedre forståelse for algebra.

Da problemstillingen vår poengterer at det er algebra vi er interessert i har vi i første omgang analysert om den enkelte deloppgave er algebra eller ikke. I denne fasen har vi også vurdert om en oppgave har tilknytning til algebra, altså om den kan hjelpe eleven med forståelsen av algebra. Innenfor tilknytning til algebra er oppgaver som poengterer relasjoner innenfor aritmetikk, men uten å bruke algebra spesifikt, oppgaver som omhandler for eksempel funksjonsmaskiner, geometriske formler eller sammensatte måleenheter. En siste vurdering vi måtte ta hensyn til var oppgavene som omhandlet programmering. Dette er et tema som har fått et eget kompetansemål i 8.trinn, men som faller utenfor området for vår forskning og derfor har programmeringsoppgaver blitt vurdert til oppgaver som ikke har noe med algebra å gjøre.

Eksempel 1 viser en oppgave hvor deloppgavene faller innenfor ulike kategorier.



1 Her ser du de fire første figurene i et mønster.

a. Forklar hvordan mønstret utvikler seg.

b. Lag et algebraisk uttrykk for antall ruter til sammen i figur nr. *n*.

c. Forklar at det er like mange blå, grønne og oransje ruter i hver figur.

d. Forklar at $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \frac{1}{3}$.

Eksempel 1: Eksempel fra Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s.146).

Deloppgave a), b) og c) blir vurdert som tilknytning til algebra da de krever at elevene skal følge et mønster, videreutvikle dette og forklare mønsteret. Deloppgave b) vil bli analysert til kategorien «algebra» da elevene spesifikt blir bedt om å lage et algebraisk uttrykk.

For å klargjøre enda tydeligere hvordan vi har tenkt ved denne første fasen av analysen trenger vi å eksemplifisere dette med algebra og tilknytningen til aritmetikk. Oppgaver som kun omhandler regneferdigheter, vil ikke bli vurdert som algebra, se eksempel under.

OPPGAVE 1.4

Regn ut. Skriv bare svaret.

a. $52 \cdot 10$

b. $100 \cdot 423$

c. $890 : 10$

d. $40\,500 : 100$

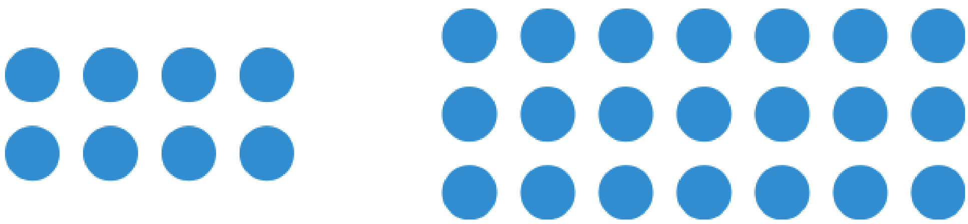
Eksempel 2: Dette er en oppgave som blir kategorisert som «ikke algebra» (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 12).

Om oppgaven derimot poengterer likheten eller balansen i et regnestykke vil dette bli vurdert som en oppgave som viser tilknytningen mellom aritmetikk og algebra. Oppgaven nedenfor viser i tillegg til dette relasjonen mellom tallene og regneoperasjonen og blir derfor vurdert til å ha tilknytning til algebra.

OPPGAVE 1.32

a. Hva betyr $4 \cdot 2$, og hva betyr $2 \cdot 4$?

b. Ta utgangspunkt i figurene og forklar med egne ord at $4 \cdot 2 = 2 \cdot 4$, og at $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.



Eksempel 3: Eksempel på oppgave med tilknytning til algebra (Kongsnes & Wallace, 2020, s.25).

Algebras tilknytning til funksjoner og hvordan vi har tenkt under analysen må forklares tydeligere. Flere funksjoner kan bli betraktet som algebraiske eller med elementer av algebra inkludert. Vi har valgt å behandle funksjoner som en egen del av matematikken, da funksjoner ligger litt utenfor vårt fokus på algebra.

Alle oppgaver hvor eleven får oppgitt en algebraisk funksjon i starten av oppgaven, for så å lage tabeller, grafer eller tyde grafen blir analysert til «tilknytning til algebra» da slike oppgaver starter med funksjonen og deretter tolkninger av den og kan derfor være til hjelp med forståelsen for algebra (Chazan, 2014, 130). Oppgaver hvor funksjonsuttrykket ikke blir definert i starten blir analysert annerledes da det algebraiske funksjonsuttrykket ikke kommer tydelig frem før en eventuell deloppgave.

OPPGAVE 8.13

Her ser du verditabellen til en funksjon. I tabellen representerer *x*-verdiene førstekoordinaten til punkter. Funksjonsverdiene representerer andrekoordinaten til punkter.

a. Fyll ut tabellen.

x	*f*(*x*)	Punkt (*x*, *f*(*x*))
5	10	(5 , 10)
1	6	
0	5	
−1	4	
−5	0	

b. Lag et koordinatsystem i skriveboka di, og tegn punktene i koordinatsystemet.

c. Hvis du har plassert punktene riktig, skal de ligge på en rett linje. Bruk linjal, og tegn denne linja.

d. Finn funksjonsuttrykket, og legg deretter til flere rader i verditabellen. Velg *x*-verdier som ligger mellom −5 og 5.

e. Tegn de nye punktene inn i koordinatsystemet du laget i oppgave **b**. Havner alle på den rette linja du tegnet i oppgave **c**?

f. Gjenta oppgave **b** og **c** ved å bruke verktøyene **Punkt** og **Linje** i GeoGebra.

Eksempel 4: Eksempel på funksjonsoppgave (Kongsnes & Wallace, 2020, s.228).

Oppgaven ovenfor illustrerer dette. Deloppgave a), b), c), e) og f) er oppgaver uten tilknytning til algebra, mens oppgave d) vil bli analysert til kategorien «tilknytning til algebra» da elevene her må skrive det aktuelle funksjonsuttrykket. På denne måten får vi med oss betydningen og sammenhengen mellom algebra og funksjoner.

Alle oppgaver som omhandler funksjonsmaskiner og hvordan disse fungerer vil bli analysert som oppgaver med tilknytning til algebra.

OPPGAVE 7.2

En funksjonsmaskin fungerer slik:

- Multipliser tallet som sendes inn med 2.

Hva blir svaret som kommer ut når vi sender disse tallene inn i maskinen?

a. 1

b. 2

c. 0

d. 10

e. -2

f. Skriv regelen maskinen bruker som et algebraisk uttrykk.

Eksempel 5: Eksempel på oppgave om funksjonsmaskiner (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 203).

Oppgaven ovenfor er et eksempel på en slik oppgave. Deloppgave a) – e) vil her bli analysert til kategorien «tilknytning til algebra». Deloppgave f) ber eleven spesifikt om å lage regelen for maskinen gjennom et algebraisk uttrykk. Her ser vi en funksjonsoppgave som direkte bruker algebra og derfor vil denne deloppgaven bli plassert i kategorien «algebra». Alle slike oppgaver som direkte ber eleven om å bruke algebra eller hvor det er tydelig at algebra skal brukes vil bli analysert som algebraoppgaver, selv om de omhandler funksjoner.

Oppgaven nedenfor viser en oppgave som generaliserer funksjonsuttrykket ved hjelp av algebra. På grunn av dette vil en slik oppgave bli analysert til kategorien «algebra».

OPPGAVE 9.23

$f(x) = ax + b$ er funksjonsuttrykket til en lineær funksjon. Her er a og b tall. Beskriv sammenhengen mellom grafen og tallene a og b i funksjonsuttrykket. Du kan gjerne bruke funksjonene nedenfor til å eksperimentere med. Bruk gjerne GeoGebra.

$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x + 1$
$h(x) = 2x + 3$	$k(x) = 2x - 3$
$p(x) = x - 3$	$r(x) = -2x - 3$

Eksempel 6: Eksempel på funksjonsoppgave som blir analysert som algebra (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 256).

Om en oppgave blir definert som algebra vil den bli videre analysert. I denne delen ser vi på tre ulike kategorier med tilhørende underkategorier, 1) kognitive krav til matematikkoppgaver, 2) kjerneelement i matematikk og 3) ulike områder innenfor algebra.

Videre vil vi gå inn på hvordan vi har tenkt ved kategorisering og analyse innenfor de ulike kategoriene.

3.4.2 Kognitivt nivå

Vårt andre analytiske spørsmål dreier seg om hvilke kognitive krav oppgavene legger opp til. Her har vi delt inn kategoriene ut ifra Smith og Steins (jf. 2.4) fire kognitive nivå. Det er kun de oppgavene som blir vurdert som algebra som analyseres videre i denne delen. Hver enkelt algebraiske deloppgave blir plassert i kun en av de ulike nivåene.

Lave kognitive krav		Høye kognitive krav	
Memorering	Prosedyrer uten sammenheng	Prosedyrer med sammenheng	Matematisk tenkning

Tabell 2: Kategoriene innenfor kognitivt nivå.

Ved gjennomføring av en slik analyse vil vi kunne få oversikt over hvor mange prosent av algebraoppgavene som treffer innenfor de ulike nivåene. Her vil vi også kunne sammenligne de to lærebøkene prosentvis ut ifra oppgavenes kognitive nivå. Dermed vil vi få et større grunnlag for å sammenligne kvaliteten på oppgavene i bøkene.

Det første nivået kalles memorering og omhandler elevoppgaver hvor det er fokus på repetering, regler og elevenes hukommelse. Her finner vi oppgaver som krever svært lite av eleven, har et høyt fokus på riktig svar og hvor det er enkelt å se hvordan man kommer frem til løsningen. Innenfor denne kategorien kan det argumenteres for at vi har inkludert oppgaver som krever en form for prosedyre av elevene og dette må forklares. Vi har tidligere eksemplifisert at gangestykker fra den lille gangetabellen er oppgaver innenfor memorering. Slike oppgaver er det lite av når det kommer til algebra, da de krever at elevene for eksempel må sette inn et tall for en ukjent før de løser oppgaven. Derfor har vi i denne kategorien inkludert de oppgavene som krever minst av elevene innenfor algebra. I tillegg kan det argumenteres for at i 8. trinn bør prosedyrene som kreves i disse oppgavene være så pass innarbeidet at det mest sannsynlig blir memorering av enkle regler og regnerekkefølger. På bakgrunn av dette vil oppgaver som krever at eleven setter inn en verdi for en ukjent i et algebraisk uttrykk og finner svaret eller som ber eleven trekke sammen et uttrykk bli vurdert som memorering.

Nedenfor er et eksempel på en oppgave innenfor det laveste kognitive kravet, memorering. Her blir eleven kun bedt om å trekke sammen bokstavene, det er kun ett riktig svar og dette er en oppgave som krever lite av eleven.

OPPGAVE 5.1

Skriv så enkelt som mulig.

a. $x + x + x + x$

b. $n + n + n$

c. $a + a + a + a + a + a - a - a$

d. $4a + 2a$

e. $9y - 3y$

f. $5s - 4s$

Eksempel 7: Eksempel på oppgaver innenfor kategorien «memorering» (Kongsnes & Wallace, 2020, s.152).

Det andre nivået heter prosedyrer uten sammenhenger. Her finner vi oppgaver hvor eleven bruker konkrete algoritmer og prosedyrer, men som ikke har noen tilknytning til bakenforliggende begreper eller konsepter. Eleven trenger ikke forklare prosedyren eller hvordan svaret er funnet. Det er liten tvil om hvordan oppgavene skal løses og fokuset er på riktig svar. Oppgaven under er et eksempel på en oppgave som vi har analysert til denne kategorien. Her er det liten tvil om hva eleven skal gjøre, men den krever mer enn en enkel memoreringsoppgave, her er det fokus på øving på en bestemt algoritme for å løse oppgaven. Eleven blir heller ikke spurt om å forklare eller begrunne det som blir gjort.

OPPGAVE 5.27

Løs likningene.

a. $4x - 5 = x + 7$

b. $6 - x = x$

Eksempel 8: Eksempel på oppgave innenfor kategorien «prosedyrer uten sammenhenger» (Kongsnes & Wallace, 2020, s.164).

De to første nivåene kan være vanskelig å skille fra hverandre. Memorering er for eksempel enkel multiplikasjon fra gangetabellen hvor eleven støtter seg på hukommelsen og ikke en konkret prosedyre. Prosedyrer uten sammenhenger vil innebære oppgaver som krever at eleven bruker en prosedyre, et oppsett eller en strategi som er kjent, eksempelvis et standard multiplikasjonsoppsett. Dette nivået trenger ikke kreve mye mer av eleven, men den må ha utviklet kunnskapen og ferdighetene i den grad at det finnes et system som eleven kan følge for å løse oppgaven.

For å illustrere forskjellen mellom nivåene kan vi ta et eksempel med algebraiske uttrykk og likninger. Oppgaver innenfor memorering vil innebære at eleven løser et uttrykk når de får opplyst hva den ukjente er. Oppgaver innenfor nivået prosedyrer uten sammenheng vil få eleven til å løse en likning uten at de vet hva den ukjente er og hvor de da må ta i bruk en prosedyre for å komme frem til svaret. Nedenfor er denne forskjellen eksemplifisert med oppgaver fra en av lærebøkene vi analyserte.

1 Sett $x = 3$ og $y = -2$ inn i uttrykkene og regn ut.

a) $x + y$ b) $y + 3x$ c) $2x - 4y$

Eksempel 9: Eksempel på memoreringsoppgave (Hjardar & Pedersen, 2020, s.234).

11 Løs likningene.

a) $x - 8 = 32$ b) $23 - x = 9$ c) $-9 + x = 2x + 1$

Eksempel 10: Eksempel på oppgave innenfor prosedyrer uten sammenhenger (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 235).

Det første eksempelet krever at eleven har lært hva det vil si å sette inn et tall for en bokstav om vi ser på det enkelt. Eleven bør også ha forståelse for hva likhetstegnet har å si og grunnleggende kunnskap om fortegn. Likevel krever den ikke en strategi, men bruk av regler og fakta for å komme frem til løsningen. Det er heller ingen tvil om hvordan eleven skal gå frem for å løse oppgaven. Det andre eksempelet krever at eleven kan håndtere en likning og innehar verktøy for å følge algoritmen for å løse den. Det er fortsatt liten tvil om hva eleven skal gjøre, men her skal det øves på en kjent strategi for likningsløsning. Oppgaven har ingen tilknytning til underliggende begreper og krever heller ingen forklaring fra eleven. Disse to eksemplene vil tydeliggjøre hvordan vi tenker når vi analyserer og differensierer mellom disse to kategoriene.

Det tredje nivået innenfor kognitive krav kalles prosedyrer med sammenhenger. Her finner vi oppgaver hvor elevene må bruke mer tid, forklare hvordan de tenker eller begrunne hvordan de har kommet frem til svaret. Her kan prosedyrene bli brukt slik at eleven kan utvikle forståelse for hvorfor de brukes, ikke bare hvordan. Oppgavene kan ha tydelig tilknytning til underliggende begreper og konsepter. Prosedyrene som blir presentert kan derimot ikke følges blindt, men krever at elevene må vurdere hvordan de skal gå frem. Nedenfor er et eksempel på en oppgave vi har plassert under denne kategorien. Her må elevene gå fra et algebraisk uttrykk til en regnefortelling. For å gjøre dette må elevene sette seg inn i hva uttrykket egentlig kan stå for, de må ha en forståelse for hva de ulike symbolene og tallene kan være og de må vurdere hva som vil passe.

OPPGAVE 5.46

Lag regnefortellinger som passer til likningene.

a. $x + 2x = 12$

b. $12 + 4x = 32$

c. $\frac{x}{4} = 15$

d. $x + \frac{x}{2} = 6$

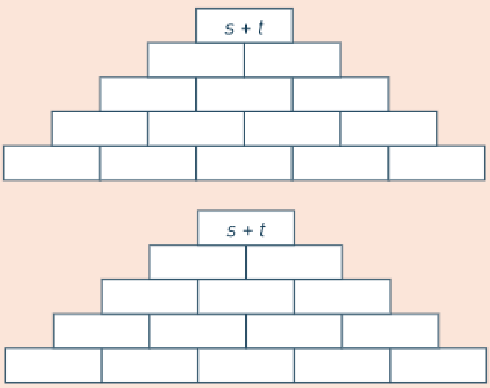
Eksempel 11: Eksempel på oppgave innenfor kategorien «prosedyrer med sammenhenger» (Kongsnes & Wallace, 2020, s.172).

Nivå fire er det høyeste kognitive nivået og blir kalt *doing mathematics* eller matematisk tenking. Oppgaver på dette nivået krever en dypere forståelse for de underliggende matematiske begrepene og konseptene. Her er det ikke tydelig hvilken strategi som må brukes, heller ingen klar prosedyre. Noen elementer i oppgaven kan være ukjent, noe som gjør at de krever mer selvregulering fra elevene. Oppgavene kan ofte være åpne med lav inngangsterskel og flere muligheter for svar. Her er det ikke fokus på riktig svar, men at elevene bruker tid på å forstå og forklare hvordan de kommer frem til riktig svar.

OPPGAVE 5.12

Fyll ut to tomme algebrapyramider der du bruker ledd av typen s, t og tall. Her fins det mange mulige løsninger. Hvis du føler at du er klar for det, kan du også prøve å legge inn noen brøker i den andre algebrapyramiden.

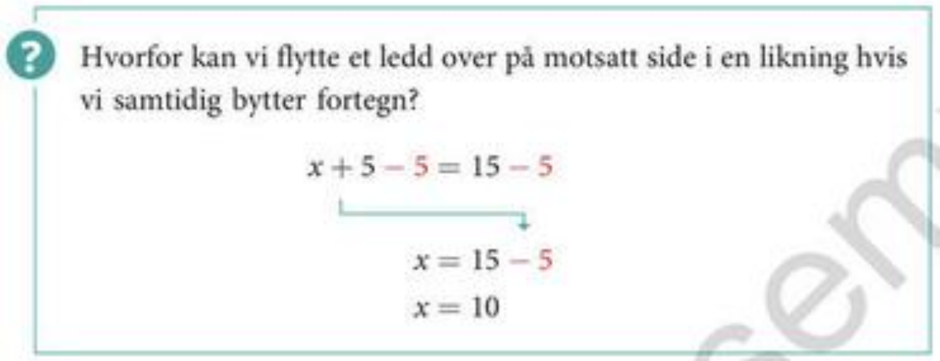
Uttrykket i den øverste ruta skal bli $s + t$ i begge pyramidene.



Eksempel 12: Eksempel på oppgave innenfor kategorien «matematisk tenking» (Kongsnes & Wallace, 2020, s.157).

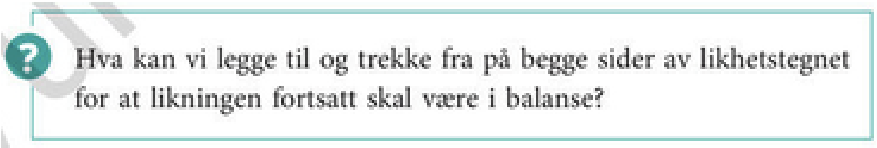
Oppgaven i eksempel 12 er blitt vurdert til det høyeste nivået da den er åpen, med lav inngangsterskel og mange ulike riktige svar. Meningen med oppgaven er at elevene skal bruke tid på å forstå hvordan pyramiden fungerer og hvilke prinsipper som ligger bak.

Igjen kan det være vanskelig å skille nivå tre oppgaver fra nivå fire. For å tydeliggjøre forskjellen kan vi se nærmere på to eksempler fra *Matematikk 8*.


Hvorfor kan vi flytte et ledd over på motsatt side i en likning hvis vi samtidig bytter fortegn?

$$x + 5 - 5 = 15 - 5$$
$$x = 15 - 5$$
$$x = 10$$

Eksempel 13: Eksempel på oppgave innenfor kategorien «prosedyrer med sammenhenger» (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 207).


Hva kan vi legge til og trekke fra på begge sider av likhetstegnet for at likningen fortsatt skal være i balanse?

Eksempel 14: Eksempel på oppgave innenfor kategorien «matematisk tenking» (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 204).

Det første eksempelet vil at eleven skal forklare teknikken «flytt og bytt» som er en forenkling av det man faktisk gjør når man løser en likning hvor man må opprettholde prinsippet med likhetstegnet. Denne er en oppgave innenfor kategorien «prosedyrer med sammenheng» på grunn av den krevet at eleven har skjønt likhetsprinsippet, samtidig som at dette må forklares og begrunnes. Det andre eksempelet er mer åpent og hører til kategorien «matematisk tenking». Mens den første oppgaven har et ganske tydelig svar, er denne mer åpen da det er mulig å svare alt fra at det kan trekkes fra 5 på begge sider til en mer utdypende forklaring rundt likhetsprinsippet. Her er det muligheter for elever med ulike forutsetninger å svare, samtidig som det krever en viss kunnskap og forståelse for hvordan en likning fungerer.

De ulike kognitive nivåene er relativt klare i hva som skiller dem. Likevel kan det være utfordrende å vurdere for hver deloppgave, spesielt om oppgavene ligger nært to kognitive nivå. Gjennom eksemplene i dette delkapittelet har vi prøvd å presisere hvordan vi har tenkt gjennom analysen, slik at resultatene fra analysen på de ulike kognitive nivåene skal være lettere å sette seg inn i.

3.4.3 Kjerneelement

Det tredje spørsmålet vi ønsker å finne svar på dreier seg om kjerneelementene, nærmere bestemt hvilke kjerneelement som blir presenter og i hvilken grad disse blir presentert blant algebraoppgavene. Innenfor denne hovedkategorien kan en deloppgave falle innenfor en eller flere kjerneelement, eller ingen av dem. I Excel-skjemaet har vi brukt koder for kjerneelementene. Kode 1 står for det første kjerneelementet, utforsking og problemforskning, kode 2 står for modellering og anvendelser, kode 3 er resonnering og argumentasjon, kode 4 er representasjon og kommunikasjon, kode 5 blir da abstraksjon og generalisering og kode 6 står for matematiske kunnskapsområder.

Kjerneelementer					
1	2	3	4	5	6

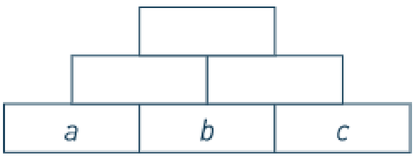
Tabell 3: Kategoriene for kjerneelementer i matematikk.

Hver deloppgave som har blitt analysert inn i kategorien «algebra» har videre blitt vurdert for om den inneholder kjerneelement og i så fall hvilke. Hver deloppgave blir vurdert for seg selv og kan inneholde mye av et kjerneelement eller bare en liten del av det. Kjerneelementene i matematikk inneholder mange ulike begreper og faktorer, derfor vil også oppgaver som faller innenfor samme kjerneelement fremstå som ganske ulike. Her har vi vurdert om de ulike algebraoppgavene inneholder en eller flere av faktorene vi finner i de ulike kjerneelementene. Videre viser vi eksempler på oppgaver som er blitt analysert til å inneholde ulike kjerneelement og eksempler på oppgaver hvor flere kjerneelement er representert.

3.4.3.1 Kategori 1 – Utforsking og problemløsning

Nedenfor er eksempel på en oppgave som representerer kategori 1, her blir eleven bedt om å fylle ut en generell tallpyramide.

g. Vi kaller tallene i nederste rad for *a*, *b* og *c*. Fyll ut denne generelle tallpyramiden.



Eksempel 15: Eksempel på oppgave plassert i kategori 1 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 155).

Denne oppgaven har blitt plassert i denne kategorien på grunn av at den får eleven til å lete etter et mønster og en sammenheng med de oppgavene som er blitt gjort tidligere med tall i stedet for bokstaver. Her ser vi ett av elementene innenfor kjerneelementet «utforsking og problemløsning», derimot inkluderer ikke oppgaven direkte problemløsning eller en vurdering om løsningen er riktig. Oppgavene vil altså bli plassert innenfor de ulike kjerneelementene ut ifra om de inneholder en eller flere faktorer som er inkludert i de respektive kjerneelementene. De trenger ikke oppfylle alle elementene som står beskrevet.

3.4.3.2 Kategori 2 - Modellering og anvendelser

Eksempel 16 viser en oppgave som er analysert inn i kategori 2. Denne oppgaven knytter sammen en virkelighetsbasert situasjon med matematikken, samtidig som elevene blir bedt om å lage en matematisk modell gjennom et algebraisk uttrykk.

OPPGAVE 5.40

I en rød sjokoladeeske er det noen sjokolader. I en blå sjokoladeeske er det 10 flere sjokolader enn i den røde esken.

Vi lar y være antall sjokolader i den røde esken.

a. Lag et algebraisk uttrykk for hvor mange sjokolader det er i den blå sjokoladeesken.

Eksempel 16: Eksempel på oppgave analysert til kategori 2 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 168).

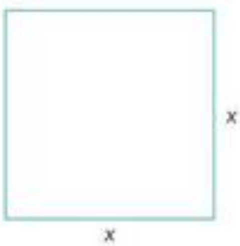
Oppgaven tar derimot ikke med delen om å vurdere om modellen er gyldig eller om den kan brukes i andre situasjoner, likevel er det en oppgave som blir vurdert inn i kategori 2.

3.4.3.3 Kategori 3 - Resonnering og argumentasjon

Nedenfor er et eksempel på fire algebraoppgaver hvor de tre første ikke inneholder noen kjerneelement, mens den siste vil bli plassert i kategori 3, altså resonnering og argumentasjon.

1.130 Et kvadrat har sider med lengde x.
Du finner arealet av kvadratet ved å regne ut $x \cdot x$ eller x^2.
Hva blir arealet når

a) $x = 5$ m?
b) $x = 50$ dm?
c) $x = 500$ cm?
d) Hva er sammenhengen mellom svarene i a), b) og c)?



Eksempel 17: Eksempel på oppgaver hvor deloppgave d) er plassert i kategori 3 (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 83).

Her må eleven forklare sammenhengen mellom de andre svarene og gjennom dette prøve å forstå at regler innenfor matematikken ikke er tilfeldige. Oppgaven tar derimot ikke med elementene som det å begrunne og lage egne resonnementer som også er nevnt i kjerneelement 3.

3.4.3.4 Kategori 4 - Representasjon og kommunikasjon

Eksempel 18 inneholder tre deloppgaver hvor alle tre blir plassert i kategori 4. Alle de tre oppgavene ber elevene om å oversette mellom dagligdags språk til et mer abstrakt matematisk språk.

3.15 I en butikk koster et par solbriller 289 kroner.

• Lag et uttrykk som viser hva x par solbriller koster.

•• Lag et uttrykk som viser hva x par solbriller koster hvis de selges til halv pris.

••• I en annen butikk koster de samme solbrillene tre firedeler av prisen i den første butikken.
Lag et uttrykk som viser prisforskjellen for x par solbriller.

Eksempel 18: Eksempel på oppgaver som er plassert i kategori 4 (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 170).

Disse oppgavene inneholder kun denne delen av kjerneelementene og mangler derfor kommunikasjonsdelen og det som omhandler ulike representasjonsformer.

3.4.3.5 Kategori 5 - Abstraksjon og generalisering

Eksempelet nedenfor inneholder tre deloppgaver som ber eleven lage formel for alle tall i tallrekken.

8 Lag en formel for den n-te tallet.
a) 15, 30, 45, 60
b) 3, 5, 7, 9, 11
c) 2, 5, 8, 11, 14

Eksempel 19: Eksempel på deloppgave plassert i kategori 5 (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 234).

Denne oppgaven krever at elevene kan se sammenhengen mellom tallene i tallrekken og deretter formalisere dette gjennom algebra. Her må de også bruke et formelt symbolspråk. Oppgaven krever derimot en konkret løsning, det er bare ett svar her, mens kjerneelementet påpeker at elevene skal få mulighet til å oppdage sammenhenger og strukturer uten fokus på ferdige løsninger. Likevel blir denne oppgaven plassert i kategori 5 da den inneholder mange av elementene fra kjerneelementet.

3.4.3.6 Kategori 6 – Matematiske kunnskapsområder

Dette kjerneelementet er annerledes enn de andre da det ikke går ut på å utvikle spesifikke ferdigheter slik som kommunikasjon, resonnering, abstraksjon eller argumentasjon. I stedet går det ut på å se sammenhengen mellom de matematiske temaene og utvikle matematisk forståelse. På grunn av dette vil flere av de andre kjerneelementene være representert i oppgaver innenfor denne kategorien.

b. La a, b og c være tall. Lag en regnefortelling, og bruk den til å forklare hvorfor $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Eksempel 20: Eksempel på oppgave innenfor kategori 6 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 27).

Oppgaven ovenfor er et eksempel tilhørende kategorien «matematiske kunnskapsområder» da den bygger på grunnleggende prinsipper for både algebra og tallforståelse. Den gir dermed eleven mulighet til å se sammenhengen mellom disse to emnene. Oppgaven inneholder også andre kjerneelement, da den generaliserer, eleven må bruke modellering og se sammenhengen til en virkelighetsbasert situasjon.

Alle kjerneelementene er viktig for analysering av oppgavene, men vi må også gå nærmere inn på hva oppgavene byr på av algebraisk aktivitet.

3.4.4 Algebraisk aktivitet

Det analytiske spørsmålet om hvilken aktivitet oppgavene innenfor algebra legger opp til blir besvart gjennom å analysere hver enkelt algebraiske deloppgave inn i en eller flere av Kierans aktiviteter.

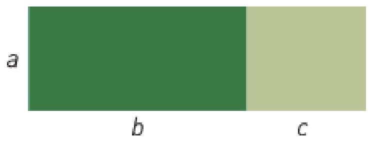
Algebraisk aktivitet		
Produserende aktivitet	Transformerende aktivitet	Global-meta level

Tabell 4: Kategoriene for algebraisk aktivitet.

Hver oppgave kan her være en eller flere aktiviteter, oftest i kombinasjonen transformerende eller produserende sammen med *global-meta level*. En oppgave kan ofte be om at elevene skal endre på noe i et uttrykk, eller få de til å lage et uttrykk samtidig som oppgaven krever at de bruker de ulike verktøyene og strategiene som inkluderes i *global-meta level*. Ved endt analyse vil vi kunne få en oversikt over hvilke aktiviteter de algebraiske oppgavene krever, samt om det er overvekt av en aktivitet eller om det finnes en balanse mellom dem. I tillegg vil vi igjen få grunnlag til å sammenligne mellom de to lærebøkene for å kunne se likheter og ulikheter i algebraoppgavene.

Kieran har som beskrevet i teoridelen delt inn algebra i tre ulike aktiviteter, produserende aktivitet, transformerende aktivitet og *global-meta level*. De oppgavene hvor elevene blir bedt om å lage noe har blitt plassert i kategorien for produserende aktivitet. Nedenfor er et eksempel på en slik oppgave hvor elevene blir bedt om å lage et algebraisk uttrykk.

Her ser du et rektangel der a, b og c er positive tall.



c. Lag to ulike algebraiske uttrykk som viser hva arealet av rektanglet er.

Eksempel 21: Eksempel på oppgave innenfor kategorien «produserende aktivitet» (Kongsnes & Wallace, 2020, s.176).

Den neste kategorien er «transformerende aktivitet» og omhandler alle oppgaver hvor elevene for eksempel skal gjøre om, trekke sammen eller regne ut. Eksempel 22 viser en slik oppgave.

OPPGAVE 6.5

Skriv så enkelt som mulig.

a. $2(a + 3)$

b. $5 + 4(6 + x)$

c. $3(2x + 4) - 7$

d. $4(2x + 3y) - 12y$

Eksempel 22: Eksempel på oppgave innenfor kategorien «transformerende aktivitet» (Kongsnes & Wallace, 2020, s.179).

Den siste kategorien går ut på at elevene skal utvikle forståelse og bruke algebra som et verktøy for problemløsning og utforsking. Dette nivået inkluderer mange faktorer vi også kan finne i kjerneelementene. Eksempel 23 viser en oppgave som blir analysert som *global-meta level*.

3 Lag en generell formel for hvor mange måter du kan skrive om det algebraiske uttrykket ax (der a er et positivt heltall) som en sum av to ledd dersom du bare skal bruke variabelen x, tallet 0, positive heltall og addisjonstegn. I denne oppgaven spiller ikke rekkefølgen leddene står i noen rolle. Det betyr for eksempel at vi regner $x + 2x$ og $2x + x$ for å være det samme uttrykket.

Eksempel 23: Eksempel på oppgave innenfor kategorien «global-meat level» (Kongsnes & Wallace, 2020, s.173).

Oppgaven krever mye av eleven med tanke på hvilke forkunnskaper som trengs. Eleven blir bedt om å lage en generell formel, altså blir det lagd en matematisk modell. I tillegg må eleven studere uttrykket og finne ut hvordan det endrer seg og analysere hvordan en slik formel bør se ut. På grunn av at eleven må lage formelen er oppgaven også analysert til kategorien «produserende aktivitet».

3.4.5 Tilpasset opplæring

For å kunne svare på det siste analytiske spørsmålet må vi gå frem på en litt annen måte. Vi har ikke inkludert en egen kategori for tilpasset opplæring da det er flere elementer som spiller inn for å kunne avgjøre dette. Her er det altså flere momenter som er aktuelle for å finne svar. For det første vil et variert kognitivt nivå kunne bidra til at forutsetningene til flere elever blir møtt. Et vidt spekter av alle de ulike nivåene vil kunne sikre at flere elever får bedre forståelse for algebra. For det andre vil en høy representasjon av kjerneelementene være en faktor som gjør at elevene lærer faget på mange ulike måter og gjennom ulike strategier. Kjerneelementene er introdusert som en indiksjon for hva som skal til for at den enkelte mestrer faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). Dermed kan en tenke seg til at jo mer fokus på kjerneelement, jo mer sannsynlig vil det være at elever med ulike forutsetninger oppnår kompetanse i faget. For det tredje vil en god og balansert representasjon av de ulike algebraiske aktivitetene kunne bidra til at elevene får variasjon i oppgaveløsningen og dermed gir flere inngangsvinkler til forståelse for algebra. For det fjerde vil vi se nærmere på differensieringsoppgavene og hvordan disse er plassert. Et siste element som kan bidra til tilpasset opplæring er å se på oppgavene innenfor det høyeste kognitive kravet, kjerneelement 1 og 2 og *global-meta level*. Innenfor disse områdene vil vi finne de oppgavene som lar eleven utvikle de matematiske kunnskapsområdene gjennom utforsking og problemløsning og dermed får bedre forståelse for algebra. I tillegg viste forskningen presentert i teoridelen at slike oppgaver også kan være en fordel for elever med høy måloppnåelse i matematikken.

3.5 Datakvalitet

I samfunnsvitenskap er god datakvalitet avgjørende for å kunne få forskningsresultater som er hensiktsmessige og pålitelige. Datakvaliteten kan ikke måles generelt, men må vurderes i sammenheng med hvordan materialet skal brukes. De to viktigste kvalitetskriteriene for datakvalitet er reliabilitet og validitet (Grønmo, 2016, s. 237). I hvor stor grad disse kriteriene innfris bestemmer hvor godt datamaterialet egner seg til å belyse problemstillingen vår og vil være avgjørende for dette prosjektets anvendelighet i et samfunnsvitenskapelig perspektiv.

Videre går vi nærmere inn på reliabilitet, validitet og etiske hensyn, gjennom teori som igjen blir knyttet opp til vårt forskningsprosjekt.

3.5.1 Reliabilitet

Reliabilitet handler i hovedsak om påliteligheten til det innsamlede datamateriale (Grønmo, 2016, s. 240). Dette betyr at et innsamlet datamateriale med høy reliabilitet er mer til å stole på enn et datamateriale med lav reliabilitet. For å oppnå høy pålitelighet i datamaterialet, må undersøkelsesopplegg og datainnsamlingen være gjort på en slik måte at en vil observere de samme fenomenene dersom en gjentar opplegget eller bruker det i andre innsamlinger av datamateriale. Dersom datamaterialet har variasjoner og disse variasjonene skyldes utformingen av undersøkelsesopplegget, vil datamaterialet og undersøkelsen ha lav reliabilitet (Grønmo, 2016, s.241). På bakgrunn av dette bør forskeren tenke gjennom reliabiliteten av et undersøkelsesopplegg før oppstart, slik at forskeren kan utforme dette på en måte som sikrer en så høy som mulig reliabilitet.

Vi kan skille mellom flere typer reliabilitet og vanligvis er det to typer reliabilitet som blir vektlagt, stabilitet og ekvivalens. *Stabilitet* dreier som om samsvaret mellom data innsamlet i samme undersøkelsesopplegg på ulike tidspunkt (Grønmo, 2016, s. 242). Kategoriene vi har utarbeidet til analysen er tydelig beskrevet og inneholder mange eksempler. I tillegg vil lærebøkene som analyseres være de samme om analysen gjennomføres på nytt. Disse momentene vil bidra til en høyere stabilitet i undersøkelsesopplegget i denne masteroppgaven.

Sammen med stabilitet, utgjør ekvivalens den andre hovedtypen reliabilitet. *Ekvivalens* er basert på samsvaret mellom forskjellige datainnsamlinger gjort på samme tidspunkt (Grønmo, 2016, s. 243). I studier med høy ekvivalens vil det være stort samsvar mellom innbyrdes uavhengige datainnsamlinger. Dette vil si at dersom ulike personer for eksempel gjennomfører datainnsamlingen eller kodingen, vil det gi like resultat. For vårt prosjekt vil ekvivalensen i stor grad avgjøres av hvordan vi bruker teorien om algebra og hvor tydelig vi definerer de ulike kategoriene for oppgavene. Her er det utarbeidet kategorier som er tydelig forklart med både teori og eksempler, slik at dersom andre utfører samme undersøkelse vil de kunne oppnå forholdsvis like resultater. Det kan på grunn av dette være vanskeligere å oppnå høy reliabilitet i en kvalitativ studie, som for eksempel et intervju, enn i en kvantitativ studie hvor datamaterialet holder seg relativt stabilt.

I vår oppgave analyserer vi oppgavene i to lærebøker og bruker tydelige rammer for analysen. På denne måten vil det være enkelt å både gjenta undersøkelsesopplegget og overføre det til andre læreverk i matematikk. For å sikre en høy reliabilitet i dette prosjektet har vi samarbeidet om analysen og gjort kategoriseringen sammen. Ettersom vi begge har hatt samme fagkrets gjennom hele studiet, har vi begge en veldig lik bakgrunn som forskere i sammenheng med denne masteroppgaven. Dette påvirker ekvivalensen, da det er sannsynlig at vår analyse av oppgavene vil ha et høyere samsvar enn om vi hadde sammenlignet med samme analyse gjort av noen andre.

Vi har gjennomført flere stikkprøver i hver lærebok for å kunne måle reliabiliteten. I den første omgangen med stikkprøver analyserte vi oppgavene hver for oss og sammenlignet resultatene, mens i den andre omgangen så vi på oppgavene sammen på nytt ved en senere anledning. I begge omgangene gjorde vi to stikkprøver på 30 oppgaver fra hver lærebok slik at totalt 120 oppgaver har blitt testet. I skjemaet for analysen har vi totalt 11 variabler, fordelt slik at alle oppgaver som er kategorisert som algebra har 11 variabler og de tre andre kategoriene har kun en variabel, da disse ikke er videre analysert med tanke på kjerneelement, kognitivt nivå og algebraisk aktivitet.

	Felles stikkprøve			Individuell stikkprøve				
	Antall	Antall korrekte	Samsvar	Antall	Antall korrekte	Samsvar	Totalt antall	Totalt korrekt
Matematikk 8	620	612	98,70 %	660	648	98,20 %	2176	2126
Matemagisk 8	360	350	97,20 %	536	516	96,30 %		

Tabell 5: Oversikt over reliabilitetstester.

Tabell 5 viser at ved stikkprøvene som ble gjennomført sammen ble det foretatt 620 vurderinger fra *Matematikk 8* og 360 vurderinger fra *Matemagisk 8*. Her var antallet korrekte vurderinger på henholdsvis 612 og 350 vurderinger, som ga et samsvar på 98,7% og 97,2%. I stikkprøvene vi foretok individuelt ble det sammenlignet 660 vurderinger fra *Matematikk 8* og 536 vurderinger fra *Matemagisk 8*. Her var resultatet henholdsvis 648 og 516 korrekte vurderinger, som gir et samsvar på 98,2% og 96,3%. Totalt ble det i disse stikkprøvene gjennomført 2176 vurderinger, hvor 2126 av disse var identiske med den opprinnelige analysen, som gir et samsvar på 97,7% totalt. Disse resultatene tilsier at gjennomføringen av analysen har høy reliabilitet, både med tanke på stabilitet og ekvivalens.

Bakdelen med denne måten å måle reliabilitet på er at den ikke tar hensyn til hvor høy reliabiliteten ville blitt dersom det var gjort et tilfeldig utvalg på vurderingen. Eksempelvis vil man i den første vurderingen på hver oppgave ved å gjøre et tilfeldig valg, fremdeles ha en 25% sjanse for at resultatet samsvarer med vår analyse. Denne metoden tar heller ikke hensyn til at vi som har analysert oppgaven har den samme bakgrunnen og antakelig vil ha et høyere samsvar i analyseringen enn hvis noen andre har gjort analysen. Metoden vi har brukt for å analysere oppgavene gjør også at vi får veldig mange vurderinger på hver enkelt oppgave vi vurderer som algebra og dersom vi hadde valgt en annen form for koding i analysen av oppgavene ville dette antakeligvis gitt mindre samsvar i stikkprøvene. Likevel viser disse stikkprøvene at det ikke er stor variasjon i måten vi analyserer på, både sett opp mot tidspunkt analysen er gjennomført på og hvem som har gjennomført analysen, da alle stikkprøver totalt viser et samsvar på 97,7% på total 2176 vurderinger i analysen. Til tross for at dette tallet er høyt, må vi likevel ta med i betraktningen bakdelene ved denne typen måling av reliabilitet, slik at vi ikke ser på dette tallet som en objektiv sannhet, men som en metode vi har brukt for å vurdere vår analyse.

3.5.2 Validitet

Et innsamlet datamateriale vil ikke være samfunnsnyttig dersom bare reliabiliteten er høy og det vil derfor være viktig å etterstrebe høy validitet på innsamling av data og analysen av disse (Grønmo, 2016, s. 239). *Validitet* handler mye om det innsamlede datamaterialets gyldighet ovenfor problemstillingen og de analytiske spørsmålene. Den forteller i hvor stor grad datamaterialet er relevant for problemstillingen og svarer på intensjonene til forskeren. Høyere validitet tilsier høyere sammenheng mellom innsamlede data og problemstillingen forskeren ønsker å få svar på (Grønmo, 2016, s. 241). Det kan være vanskelig å fastslå validiteten til et prosjekt, men den burde likevel drøftes og etterstrebes innenfor samfunnsvitenskapen.

For vårt prosjekt handler validiteten om hvilke kategorier vi har utarbeidet for å kunne svare på vår problemstilling. Her har vi valgt kategorier som vi bruker for å analysere algebraoppgavene på et kognitivt nivå, i tillegg til å se nærmere algebraisk aktivitet og hvordan kjerneelementene i læreplanen for matematikk er representert. Denne analysen gir tydelige resultater vi kan drøfte opp mot problemstillingen vår. Likevel er dette forskningsarbeidet påvirket av vår bakgrunn som forskere og det finnes muligheter for at vi overser sammenhenger, som andre vil finne relevante for denne problemstillingen. Prosjektet vårt ser også i hovedsak på antall oppgaver og det vil her være vanskelig å kunne trekke noen konklusjoner for i hvor stor grad disse oppgavene hjelper elevene med forståelsen av algebra.

I vårt forskningsarbeid har vi valgt å gjøre en avgrensning, slik at vi i hovedsak ser på lærebøkene opp mot hverandre, som igjen styrker validiteten for denne oppgaven. Oppsummert er ikke validitet det enkleste å måle i et slikt prosjekt, men her har vi gjort de nødvendige avgrensningene og etterstrebet høyest mulig validitet for å få et best mulig resultat.

3.6 Etiske hensyn

Den som gjennomfører et forskningsprosjekt, vil være nødt til å ta flere etisk hensyn i gjennomføringen. For å sikre at dette blir gjort i forskning i Norge har de nasjonale forskningsetiske komiteene satt en rekke retningslinjer som skal følges. For vårt prosjekt vil det være De forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi (NESH) som vil være aktuell. Disse retningslinjene har som formål å gi forskere kunnskap om anerkjente forskningsetiske normer (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2019). I tillegg har universiteter og høyskoler et lovpålagt ansvar for å sikre høy kvalitet på forskning som gjennomføres. Forskningsetikkloven skal være med å bidra til at slik forskning blir gjennomført med tanke på de etiske normene som er fastlagt i loven (Forskningsetikkloven, 2017, § 1). Det er altså flere organisasjoner og lover som ligger til grunn for at forskningen skal ta hensyn til etikken slik at forskningen blir av høy kvalitet.

Det kan være fristende å tenke at det er få etiske hensyn å ta ved en dokumentanalyse da man ikke er i direkte kontakt med mennesker (McCulloch, 2011, s. 254). Arbeid med en komparativ dokumentanalyse vil ha færre etiske hensyn, sammenlignet med andre forskningsmetoder i samfunnsvitenskapen som innebærer datainnsamling i menneskelige relasjoner, likevel er det flere faktorer forskeren her bør være oppmerksom på. Ettersom vi ikke har samlet inn noen form for personopplysninger trenger vi ikke ta noen etiske hensyn til dette.

I forskningsarbeid skal man alltid etterstrebe redelighet (Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, 2016, s. 5). Dette innebærer at forskeren alltid skal lete etter sannheten og ikke forfalske eller fabrikkere data. For vårt prosjekt innebærer dette at vi viser tydelig hvilken informasjon i vårt arbeid som er hentet fra andre og hva som er produsert av oss. Dette gjør vi gjennom en tydelig og god kildehenvisning som går gjennom hele teksten.

I tillegg handler det om å gjøre en korrekt sammenligning av lærebøkene. Forskeren bør etterstrebe mest mulig objektivitet ved gjennomføring av en komparativ analyse, slik at sammenligningen blir rettferdig (Grønmo, 2016, s. 406-407). Dette er et ansvar vi har, spesielt ovenfor forfatterne av lærebøkene. For gjennomføringen av vårt forskningsprosjekt vil dette bety at vi må utarbeide undersøkelsen på en slik måte at begge lærebøkene kan analyseres på likt grunnlag. Selv om vi i størst mulig grad etterstreber denne objektiviteten, vil det likevel være viktig å presisere at våre tolkninger i dette prosjektet ikke kan sees på som en objektiv sannhet, men en tolkning basert på teori tilknyttet temaet. Derimot er det sannsynlig at våre resultater og analyser vil være nærme det vi er i stand til å oppnå med tanke på objektivitet, da et objektivt og korrekt resultat vil gagne oss som fremtidige lærere. Disse resultatene kan være med på å påvirke jobben vi skal gjøre som lærere i matematikk, da resultatene i analysen mest sannsynlig vil være med på å påvirke valg av læreverk på skolene vi skal arbeide ved. Derfor har vi også et ønske om å finne den læreboken som representerer algebra på best mulig måte for elevene og er lite preget av pris, type forlag eller andre utenforstående faktorer.

4.0 Resultat

Problemstillingen vår var å finne ut om algebraoppgavene i lærebøker basert på fagfornyelsen kunne bidra til bedre forståelse og læring av algebra. For å få svar på dette har vi analysert to lærebøker for 8.trinn. Videre vil vi redegjøre for resultatene av denne analysen og går strategisk gjennom de ulike kategoriene i den rekkefølgen vi har analysert oppgavene.

4.1 Algebra og algebraisk tilknytning

Først og fremst har vi analysert hver enkelt deloppgave med tanke på dens innhold sett opp mot algebra. Alle oppgaver i kategorien «algebra» er oppgaver som direkte omhandler algebra, altså likninger, algebraiske uttrykk eller oppgaver innenfor andre emner hvor algebra blir brukt til for eksempel generalisering og modellering. I kategorien «tilknytning til algebra» er alle oppgaver som ikke direkte omhandler algebra, men som kan få frem ulike aspekter ved algebra som kan hjelpe med forståelsen av emnet. Her finner vi oppgaver som viser poenget med likhetstegnet, relasjoner mellom tall og sammenhenger i regneoperasjoner i aritmetikken. I tillegg finner vi flere oppgaver som omhandler algebraiske funksjoner i kategorien «tilknytning til algebra». Oppgavene som ikke har noen tilknytning til algebra, er blitt analysert til «ikke algebra».

		Algebra	Algebraisk tilknytning	Ikke algebra	Totalt
Matemagisk 8	Antall	553	456	1182	2191
	Prosent	25,24 %	20,81 %	53,95 %	
Matematikk 8	Antall	494	149	1187	1830
	Prosent	27,00 %	8,10 %	64,90 %	

Tabell 6: Oversikt over fordelingen av oppgavene i de to lærebøkene.

I *Matemagisk 8* ser vi at det er 2191 oppgaver totalt i boka. Av disse er 553 oppgaver analysert inn i kategorien «algebra», 456 har tilknytning til algebra og 1182 har blitt definert som oppgaver som ikke har noe med algebra å gjøre. Dette vil si at omtrent 25 % av oppgavene er rene algebraoppgaver, hvor elevene arbeider med eksempelvis en ukjent, variabler, likninger eller algebraiske uttrykk. Totalt utgjør oppgavene som enten er rene algebraoppgaver eller oppgaver som har tilknytning til algebra 46 % av alle oppgavene i boka.

I *Matematikk 8* er det 1830 oppgaver totalt i boka, altså 361 færre oppgaver enn i *Matemagisk 8*. Av disse var det 494 rene algebraoppgaver, 149 av oppgavene har tilknytning til algebra og 1187 er vurdert til ikke å ha noe med algebra å gjøre. Oppgaver direkte knyttet til algebra og de som har tilknytning til algebra utgjør 35,1 % av oppgavene i boka.

Vi ser at det er en høyere prosentandel av oppgavene som kan være til hjelp med forståelsen av algebra i *Matemagisk 8* enn i *Matematikk 8*, derimot er det en høyere prosentandel rene algebraoppgaver i den sistnevnte boken.

Vi har også sett på hvor i bøkene vi finner algebraoppgavene og oppgavene tilknyttet algebra.

Matemagisk 8	Antall algebraoppgaver	Antall oppgaver med tilknytning til algebra
1 Hele tall	29	41
2 Brøk og desimaltall	29	40
3 Algebraiske uttrykk og formler	114	16
4 Potenser, kvadratrøtter og regnerekkefølge	47	37
5 Algebra og likninger	191	20
6 Parenteser og likninger	109	17
7 Hva er en funksjon?	7	114
8 Grafen til en funksjon	9	31
9 Lineære funksjoner	6	91
10 Sammensatte måleenheter	12	49
Totalt	553	456

Tabell 7: Oversikt over oppgaver fordelt på kapittel i Matemagisk 8.

I *Matemagisk 8* er det tre kapitler som omhandler algebra direkte, kapittel 3, 5 og 6 og alle disse har en høyere representasjon av algebraoppgaver enn de andre kapitlene. Alle kapitlene i *Matemagisk 8* har både rene algebraoppgaver og oppgaver med tilknytning til algebra.

Matematikk 8	Antall algebraoppgaver	Antall oppgaver med tilknytning til algebra
1 Tall og tallforståelse	30	28
2 Delelighet og brøk	13	12
3 Algebra	451	68
4 Funksjoner	0	41
Totalt	494	149

Tabell 8: Oversikt over oppgaver fordelt på kapittel i Matematikk 8.

Tabellen viser at algebraoppgavene i *Matematikk 8* har sin hovedvekt i kapittel 3 *Algebra.* Det er 43 oppgaver innenfor kategorien «algebra» i de andre kapitlene og alle kapitlene har oppgaver med tilknytning til algebra.

De to bøkene har henholdsvis 414 algebraoppgaver i *Matemagisk 8* og 451 i *Matematikk 8* i kapitlene som omhandler algebra. Her ser vi at representasjonen av rene algebraoppgaver er ganske lik, med 37 flere oppgaver i *Matematikk 8*. I de samme kapitlene har *Matemagisk 8* 53 oppgaver tilknyttet algebra, mens *Matematikk 8* har 68, altså 15 flere oppgaver.

I teoridelen påpekte vi hvor viktig tilknytningen mellom aritmetikk og algebra kunne være for forståelsen av algebra og for at emnet ikke skulle virke separert fra andre områder i matematikken. Begge bøkene har kapittel som omhandler aritmetikk, kapittel 1, 2 og 4 i *Matemagisk 8 og* kapittel 1 og 2 i *Matematikk 8*. Vi kan sammenligne disse kapitlene for å se hvor mange oppgaver som dekker algebra eller tilknytningen til algebra. I *Matemagisk 8* er det 223 oppgaver i de tre kapitlene som enten er rene algebraoppgaver eller oppgaver som har tilknytning til aritmetikk, mens det i *Matematikk 8* er 83 oppgaver. Det er altså en forskjell på 140 oppgaver.

Om vi sammenligner funksjonskapitlene som i *Matemagisk 8* er kapittel 7, 8 og 9 og i *Matematikk 8* er kapittel 4 kan vi se flere forskjeller. Matemagisk 8 har 22 oppgaver med algebra og 236 med tilknytning, mens *Matematikk 8* ikke har noen rene algebraoppgaver i dette kapittelet og 41 med tilknytning. Forskjellen på rene algebraiske oppgaver i disse kapitlene kommer av at forfatterne av *Matemagisk 8* har knyttet flere funksjonsoppgaver til generaliseringsaspektet ved hjelp algebra. På grunn av algebrabruken i slike oppgaver vil disse bli analysert inn i kategorien «algebra». Dette fokuset på generalisering av funksjoner finner vi kun i *Matemagisk 8*. Forskjellen på 195 oppgaver med tilknytning til algebra kommer av at *Matematikk 8* har fokusert på koordinatsystemer og grafer som illustrerer virkelighetsbaserte situasjoner, noe som ut ifra våre tolkninger ikke har tilhørighet eller tilknytning til algebra. *Matemagisk 8* har derimot et større fokus på funksjonsmaskiner, lineære funksjoner i tillegg til virkelighetsbaserte situasjoner. De to første fokusområdene vil tilsi oppgaver som inkluderer algebraiske funksjoner og dermed også tilknytningen til algebra.

Generelt ser vi at *Matemagisk 8* har algebraoppgaver i alle kapitlene sine, mens *Matematikk 8* mangler dette i siste kapittel. I tillegg har *Matemagisk 8* en høyere andel av oppgaver med tilknytning til algebra gjennom hele boken og i alle kapitler.

4.2 Kognitivt nivå

De 553 og 494 rene algebraoppgavene fra henholdsvis *Matemagisk 8* og *Matematikk 8* er blitt videre analysert. Først har vi sett på hvilke kognitive krav oppgavene stiller. Disse kravene er videre delt inn i fire nivå. Inndelingen består av det laveste kognitive nivået, «memorering», som krever minst av elevene da disse oppgavene i større grad baserer seg på enkle strategier som å fylle inn for en ukjent eller huske enkle formler. I den andre enden av skalaen i kategorien «matematisk tenking», har oppgavene det høyeste kognitive kravet og gir større utfordring da det innebærer en mer kompleks form for tenking, bruk av ulike strategier og utforsking. Dette betyr likevel ikke at disse oppgavene nødvendigvis ligger på et høyt vanskelighetsnivå. Noen oppgaver kan bygge på det å se sammenhenger, forstå begreper og vurdere løsninger uten at oppgaven er av høy vanskelighetsgrad.

		Kognitivt nivå			
		Memorering	Prosedyrer uten sammenhenger	Prosedyrer med sammenhenger	Totalt
Matemagisk 8	Antall	132	172	210	514
	Prosent	23,87 %	31,10 %	37,97 %	
Matematikk 8	Antall	218	172	101	491
	Prosent	44,10 %	34,80 %	20,40 %	

Tabell 9: Tabell over fordeling av algebraoppgavene på kognitivt nivå.

Resultatene viser at *Matemagisk 8* har en relativt jevn fordeling av oppgaver på de ulike nivåene, med minst oppgaver innenfor «matematisk tenking». Om vi sammenligner mellom de to laveste og de to høyeste nivåene er det nesten 55% på de to laveste og 45% på de høysete nivåene. *Matematikk 8* har oppgaver innenfor alle nivåene, men fordelingen er mer ujevn. 78,9% av oppgavene ligger innenfor de to laveste kognitive nivåene, mens 21% av oppgavene ble analysert til de to med høyest kognitive krav.

Analysen viser at *Matemagisk 8* har flest oppgaver innenfor nivået som heter «prosedyrer med sammenhenger», altså det nest høyeste nivået. Her finner vi oppgaver som ikke har fokus på algoritmer, men heller det å utvikle strategier og gi elevene forståelse for underliggende begreper. Oppgaver hvor elevene må skifte mellom representasjonsformer er også inkludert i dette nivået.

OPPGAVE 8.19

Løs likningene grafisk og ved regning.

a. $x + 1 = 5 - 3x$

b. $0{,}5x + 10 = 4 + 1{,}5x$

c. $x - 3 = -2$

d. $x + 4 = 0$

Eksempel 24: Eksempel på oppgave i kategorien «prosedyrer med sammenheng» i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 233).

Oppgaven ovenfor er et eksempel på en oppgave innenfor kategorien «prosedyrer med sammenhenger». Grunnen til dette er at elevene må løse likningene på to ulike måter og dermed bruker to ulike representasjonsformer. Gjennom å løse likningene med begge metodene kan dette hjelpe elevene til å se sammenhengen mellom grafen og hva de gjør gjennom manipulasjon av likningene.

Matematikk 8 har flest oppgaver innenfor nivå 1, «memorering» hvor 40,8 % av oppgavene befinner seg. I boken finner vi mange oppgaver av typen som i eksempel 25, gjerne repeterende innenfor alle de tre vanskelighetsgradene.

3.6 Sett inn $x = 3$, $y = 4$ og $z = 2$ og regn ut.

•

a) $x + y + z$ c) $2x + 2y - 2z$

b) $x - y + z$ d) $\frac{y}{z}$

••

a) $4x - 2y + 2z$ c) $\frac{x \cdot y}{z}$

b) $\frac{4x}{z}$ d) $2x - 2y + 3z$

•••

a) $\frac{2x + y}{z}$ c) $\frac{2x + 2y}{z} \cdot x$

b) $\frac{z \cdot x}{2y} - 2x$ d) $xy + yz$

Eksempel 25: Eksempel på oppgave innenfor memorering (Hjardar & Pedersen, 2020, s.167).

Selv om vanskelighetsgraden øker for hver «prikk», vil ikke det kognitive nivået påvirkes, da det fortsatt er snakk om å sette inn et tall for en ukjent for så å gjøre utregningen. Det er ingen tvil om hvordan oppgaven skal løses og ingen tilknytning til underliggende begreper og sammenhenger.

Matematikk 8 har tre oppgaver som er blitt analysert til det høyeste nivået, «matematisk tenking». Alle disse oppgavene finner vi i diskusjonsoppgavene markert med spørsmålstegn som er plassert sporadisk i boka. Det er altså ingen algebraoppgaver på det høyeste nivået innenfor de nummererte oppgavene som elevene ofte løser individuelt.

? Undersøk disse regnestykkene og skriv en regel ved hjelp av a, b og c når bokstavene representerer hvert sitt tall.

$2 \cdot (3 \cdot 4)$ $3 \cdot (2 \cdot 4)$ $4 \cdot (3 \cdot 2)$

Eksempel 26: Eksempel på oppgave i kategorien «matematisk tenking» fra Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 89).

Oppgaven ovenfor viser en av oppgavene som ble analysert til «matematisk tenking» i *Matematikk 8*. Gjennom denne diskusjonsoppgaven får elevene mulighet til å undersøke hvordan parenteser i regnestykket fungerer før de lager en generell regel. En slik oppgave kan bidra til at elevene får større forståelse for det underliggende begrepet som omhandler parenteser i matematikk. Her får de systematisert og utforsket en regel som de kanskje bare har godtatt før, men som gjennom denne oppgaven blir oppdaget av elevene selv.

4.3 Kjerneelement

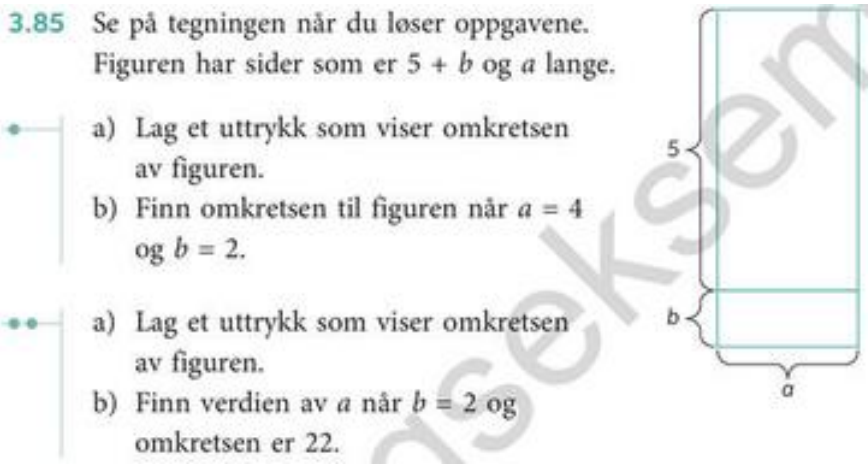
Analysen av algebraoppgavene viser også hvor mange av oppgavene som kan knyttes til de ulike kjerneelementene i den nye læreplanen i matematikk. Innenfor denne kategorien kan en oppgave enten ikke ha noen tilknytning til kjerneelementene, ha tilknytning til ett, flere eller alle kjerneelementene. Av *Matemagisk 8* sine 553 algebraoppgaver var 261 oppgaver med ett eller flere kjerneelement. Av de 494 algebraoppgavene i *Matematikk 8* var det 91 oppgaver som inneholdt ett eller flere kjerneelement. Altså var det 170 flere oppgaver i *Matemagisk 8* med tilknytning til kjerneelementene enn i *Matematikk 8*.

Tabellen under viser at kjerneelement 4 og 5 har hyppigst forekomst i *Matemagisk 8* med henholdsvis 28,9 % og 21,0 %. I *Matematikk 8* var det flest algebraoppgaver innenfor kjerneelement 3 og 4. Algebraoppgaver som kunne knyttes til kjerneelement 1, 2 og 6 hadde alle lav forekomst i *Matematikk 8* med omtrent 1% av oppgavene som kunne knyttes til hvert av disse kjerneelementene. Alle kjerneelementene var betydelig høyere representert i *Matemagisk 8* enn i *Matematikk 8*. Begge bøkene hadde lavest forekomst av kjerneelementet matematiske kunnskapsområder.

		Kjerneelement				
		1	2	3	5	6
Matemagisk 8	Antall	57	77	80	116	44
	Prosent	10,30 %	13,90 %	14,50 %	21,00 %	8,00 %
Matematikk 8	Antall	7	5	37	24	3
	Prosent	1,40 %	1,00 %	7,50 %	4,90 %	0,60 %

Tabell 10: Tabell over fordeling av algebraoppgavene på kjerneelement.

Den store andelen av kjerneelement 4 kan komme av at det her blir inkludert oppgaver hvor elevene må diskutere, men spesielt ser vi en stor andel av oppgaver hvor elevene må gå fra en representasjonsform til en annen. Oppgaver som krever at elevene tolker tekst og svarer med et algebraisk uttrykk og oppgaver som ber elevene finne et funksjonsuttrykk gjennom å lese av en graf er inkludert her. I tillegg kommer de oppgavene som tar utgangspunkt i et bilde eller en illustrasjon og ber elevene skrive tekst eller uttrykk basert på dette. Begge bøkene har mange slike oppgaver hvor elevene skal veksle mellom representasjonsformer. Oppgaven i eksempel 27 viser dette.



3.85 Se på tegningen når du løser oppgavene.
Figuren har sider som er $5 + b$ og a lange.

• a) Lag et uttrykk som viser omkretsen av figuren.
b) Finn omkretsen til figuren når $a = 4$ og $b = 2$.

•• a) Lag et uttrykk som viser omkretsen av figuren.
b) Finn verdien av a når $b = 2$ og omkretsen er 22.

Eksempel 27: Eksempel på oppgave som går fra en representasjonsform til en annen (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 220).

Oppgaven ber eleven om å lage uttrykk for omkretsen av figuren før de blir bedt om å regne ut for en gitt verdi. Første og tredje deloppgave er derfor analysert til kjerneelement 4, mens andre og fjerde deloppgave ikke inneholder kjerneelement da disse kun krever at eleven kan regne ut et uttrykk.

Som sagt kan en oppgave bli analysert til flere av kjerneelementene og noen få oppgaver har blitt plassert i alle seks. I *Matemagisk 8* er det tre oppgaver som inkluderer alle kjerneelementene samtidig. Nedenfor er et eksempel på dette som vi går grundigere gjennom.

d. Forklar at alle lineære funksjoner kan skrives på formen $f(x) = ax + b$, der a og b er tall.

Eksempel 28: Eksempel på oppgave som inneholder alle kjerneelementene i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 240).

I denne oppgaven blir elevene bedt om å forklare den generelle formen for lineære funksjoner. For det første er dette en diskusjons- og samarbeidsoppgave, noe som utgjør at oppgaven dekker kjerneelement 3 og 4 som omhandler kommunikasjon og argumentasjon, da elevene må diskutere seg frem til hvorfor dette stemmer. For det andre skal de komme frem til en generell formel i matematikken, altså bruke et formelt symbolspråk (kjerneelement 5) og lage en modell og vurdere gyldigheten av den (kjerneelement 2). Gjennom dette arbeidet vil de kunne se at algebra kan brukes til å generalisere og forenkle elementer innenfor området om funksjoner, altså se sammenhengen mellom ulike matematiske tema (kjerneelement 1 og 6). Dette vil derfor være en oppgave som inneholder alle kjerneelementene. Derimot vil ikke dette si at den dekker alle aspekt innenfor hvert kjerneelement, men deler av alle kjerneelementene er representert i oppgaven. Det finnes ingen oppgaver i *Matematikk 8* som inneholder alle kjerneelementene ut ifra vår analyse

Vi har også sett på fordelingen av kjerneelement for hvert enkelt kapittel. Her må det poengteres at det kun er algebraoppgavene som er blitt analysert og det kan derfor være mange flere oppgaver utenom algebra som dekker kjerneelementene enn det vi ser i vår analyse. Det må også presiseres at en oppgave kan inneholde ett, flere eller alle kjerneelementene, i tillegg til at det kan være oppgaver som ikke inneholder kjerneelement. Det vil si at tabellene nedenfor viser hvor mange ganger vi ser bruk av kjerneelement i ulike algebraoppgaver, ikke hvor mange oppgaver som inneholder kjerneelement.

	Kjerneelement						
Matemagisk 8	1	2	3	4	5	6	Sum
1 Hele tall	6	0	7	1	15	7	36
2 Brøk og desimaltall	8	0	11	11	12	7	49
3 Algebraiske uttrykk og formler	4	57	9	64	18	3	155
4 Potenser, kvadratrøtter og regnerekkefølge	5	0	10	6	12	5	38
5 Algebra og likninger	16	9	16	48	14	12	115
6 Parenteser og likninger	14	1	18	19	27	2	81
7 Hva er en funksjon?	0	0	0	0	5	0	5
8 Grafen til en funksjon	0	0	0	0	0	0	0
9 Lineære funksjoner	2	3	2	4	6	5	22
10 Sammensatte måleenheter	2	7	7	7	7	3	33

Tabell 11: Oversikt over kjerneelement fordelt på kapittel i Matemagisk 8.

Oversikten ovenfor viser fordelingen i *Matemagisk 8* og at det er kapittel 3, 5 og 6 som dekker kjerneelementene best, noe som har sin forklaring i at dette er algebrakapitlene i boka. Det er kun ett kapittel som ikke inneholder kjerneelement, nemlig kapittel 8 og til tross for at det er 9 algebraoppgaver i dette kapittelet.

Matematikk 8	Kjerneelement 1	2	3	4	5	6	Sum
1 Tall og tallforståelse	3	1	5	0	6	2	17
2 Delelighet og brøk	0	0	0	0	0	0	0
3 Algebra	4	4	32	34	18	1	93
4 Funksjoner	0	0	0	0	0	0	0

Tabell 12: Oversikt over kjerneelement fordelt på kapittel i Matematikk 8.

Tabellen ovenfor viser fordelingen i *Matematikk 8* og at det i hovedsak er kapittel 3 *Algebra* som dekker kjerneelementene best, i tillegg til at vi ser noe tilknytning til kjerneelement i kapittel 1 *Tall og tallforståelse.* I kapittel 2 er det 13 algebraoppgaver, men ingen av disse dekker noen kjerneelement. I kapittel 4 er det ingen algebraoppgaver som er forklaringen på at det ikke er funnet kjerneelement her.

For å sammenligne de to bøkene kan vi se på hvordan de ulike kjerneelementene er fordelt på de ulike kapitlene. I *Matemagisk 8* er det kun ett kapittel som ikke dekker noen kjerneelement, mens det i *Matematikk 8* er kapittel 1 og 3 som inneholder kjerneelement.

4.4 Algebraisk aktivitet

Oppgavene ble også analysert etter algebraisk aktivitet (jf. 2.3.3) hvor hver oppgave kan inneholde en eller flere av de tre aktivitetene. I det analytiske spørsmålet for denne kategorien ble det poengtert at en jevn fordeling av de ulike aktivitetene ville være fordelaktig.

		Algebraisk aktivitet		
		Produserende	Transformerende	Global-meta level
Matemagisk 8	Antall	143	308	110
	Prosent	29,90 %	55,70 %	19,90 %
Matematikk 8	Antall	59	422	13
	Prosent	11,90 %	85,40 %	2,60 %

Tabell 13: Tabell over fordeling av algebraoppgavene ut ifra algebraisk aktivitet.

Begge lærebøkene hadde høyest forekomst av transformerende aktivitet, hvor *Matemagisk 8* hadde 55,7 % og *Matematikk 8* hadde 85,4 %. Dette er oppgaver som eksempelvis krever at elevene skal løse en ligning, fylle inn for en ukjent eller forenkle et algebraisk uttrykk.

OPPGAVE 5.27

Løs likningene.

a. $4x - 5 = x + 7$

b. $6 - x = x$

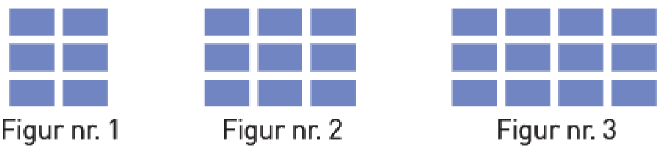
Eksempel 29: Eksempel på oppgaver som krever transformerende aktivitet (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 164).

Oppgaven ovenfor finner vi lignende av i begge bøkene, hvor eleven får beskjed om å komme frem til riktig svar, uten å bryte likhetsprinsippet.

Den laveste andelen oppgaver finner vi i *global-meta level*, hvor elevene ikke nødvendigvis trenger å bruke algebra, men hvor algebra kan bli brukt som et verktøy for å løse oppgaven.

OPPGAVE 6.4

Her ser du de tre første figurene i et mønster.



a. Maja kommer fram til at et uttrykk for antall brikker som trengs for å lage figur nr. n, er $3(n + 1)$. Forklar med utgangspunkt i figurene hvordan Maja har tenkt.

b. Kristoffer kommer fram til at et uttrykk for antall brikker som trengs for å lage figur nr. n, er $3n + 3$. Fargelegg deler av figurene for å vise tydelig hvordan Kristoffer har tenkt.

c. Hvorfor har de to uttrykkene alltid samme verdi?

Eksempel 30: Oppgaver hentet fra Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 178).

Eksempelet ovenfor viser tre oppgaver hvor første og siste oppgave er analysert til *global-meta level*, mens den andre oppgaven blir sett på som produserende. Den første deloppgaven er *global-meta level* på grunn av at eleven blir bedt om å forklare hvordan noen andre har tenkt da de løste oppgaven. Her må eleven argumentere og bevise hva som er tenkt og hvorfor den generelle formelen fungerer. Deloppgave c) tar for seg en påstand som eleven må forholde seg til og igjen må det argumenteres og forklares hvorfor dette stemmer. Begge disse utgjør elementer vi ser i kategorien «*global-meta level*». Deloppgave b) er analysert til produserende aktivitet på grunn av at eleven må tegne, altså produsere noe når oppgaven skal løses. Den kunne muligens vært plassert i *global-meta level*, men da det ikke krever noen form for argumentasjon eller forklaring for tegningen mener vi den hører hjemme i kategorien for produserende aktivitet.

I *Matemagisk 8* er det 561 tilfeller av algebraisk aktivitet, noe som tilsier at vi fant flere av aktivitetene i en og samme deloppgave. I *Matematikk 8* er det akkurat 494 oppgaver med algebraisk aktivitet og ingen av oppgavene ble analysert til mer enn en algebraisk aktivitet.

5 Farey-naboer er to brøker som står ved siden av hverandre i en Farey-liste.

La $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ være Farey-naboer.

Regn ut $b \cdot c - a \cdot d$ for noen

Farey-naboer. Hva oppdager du?

Eksempel 31: Eksempel på oppgave som inneholder to algebraiske aktiviteter (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 95).

Oppgaven ovenfor er et eksempel på en algebraoppgave som inneholder to ulike algebraiske aktiviteter. Først og fremst blir eleven bedt om å regne ut, altså en transformerende aktivitet, før eleven blir spurt om hva som oppdages. Det siste spørsmålet innebærer at eleven må forklare, resonnere og analysere sammenhenger. I tillegg bygger oppgaven på generalitetsaspektet til algebra, noe som gjør den til en oppgave innenfor aktiviteten *global-meta level*.

Noen oppgaver er ikke blitt plassert i en algebraisk aktivitet, slik som eksempelet nedenfor.

OPPGAVE 5.20

a. Hva synes du gjør en algebrapyramide lett å løse?
Hva synes du gjør en algebrapyramide vanskelig å løse?

Eksempel 32: Eksempel på oppgave uten aktivitet (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 159).

En slik oppgave ber kun eleven beskrive hva som er lett og vanskelig ved en oppgave, noe som kan være nyttig for å forstå hvordan man lærer. Derimot innebærer den hverken noe produksjon, transformasjon eller det som kan inkluderes i kategorien «*global-meta level*».

Analysen viser også at *Matemagisk 8* har en jevnere fordeling på de tre algebraiske aktivitetene enn *Matematikk 8*, hvor kun 2,6% av oppgavene er analysert til å være på *global-meta level*.

4.5 Tilpasset opplæring

Når det kommer til resultater for oppgaver som kan bidra til tilpasset opplæring må vi gå grundigere inn i strukturen i bøkene og noen enkelte oppgaver. For det første har begge bøkene nivåinndeling med tanke på vanskelighetsgrad, i tillegg til at begge bøkene har oppgaver som alle elevene skal følge og som dermed dekker det mest vesentlige for hvert emne. Det at bøkene har differensiert oppgavene i form av vanskelighetsgrad kan sees på som en positiv faktor for tilpasset opplæring. I teoridelen kom det frem at læreren har mye å si for hvordan det arbeides med de ulike nivåene og at elevene trenger veiledning for å velge riktig vanskelighetsgrad. Dette er derimot ikke noe vi kan vurdere ut ifra denne analysen og dermed blir oppgaver på ulike vanskelighetsgrader positivt da det gir muligheten til tilpasset opplæring.

Begge bøkene har diskusjonsoppgaver hvor elevene blir oppfordret til å snakke om matematikk i grupper eller i fellesskap. I *Matemagisk 8* var det totalt 145 diskusjonsoppgaver hvor 41 av de handlet direkte om algebra og 54 hadde tilknytning til algebra. I *Matematikk 8* var det 71 diskusjonsoppgaver totalt hvor 19 av de omhandlet algebra og 22 hadde tilknytning til algebra. Vi ser her at begge bøkene har over 50% diskusjonsoppgaver som har noe med algebra å gjøre, med 54 flere oppgaver i *Matemagisk 8*. Generelt vil disse diskusjonsoppgavene kunne bidra til bedre tilpasset opplæring da elevene får mulighet til å diskutere i fellesskap eller i grupper.

Innenfor hovedkategorien «kognitive krav» og det høyeste nivået «matematisk tenking» finnes det oppgaver som gir muligheten til alle å svare. Diskusjonsoppgaven nedenfor er et eksempel på en slik oppgave.

SNAKKE MATTE

Hva er forskjellen på et algebraisk uttrykk, en formel og en likning?

Eksempel 33: Eksempel på oppgave i kategorien «matematisk tenking» (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 163).

Denne oppgaven er ment å bli diskutert i fellesskap, enten få elever sammen eller hele elevgruppen. Gjennom et slik spørsmål er det rom for flere svar, alt fra uformelle beskrivelser til mer formell matematisk forklaring. Likevel krever oppgaven at elevene reflekterer, argumenterer og resonnerer seg frem til løsningen gjennom relevante forkunnskaper. Dette kan igjen føre til at elevene får bedre forståelse for de underliggende begrepene.

SNAKKE MATTE

Hvilke strategier kan vi bruke når vi lager algebraiske uttrykk for figur nr. n i et mønster?

Eksempel 34: Eksempel på oppgave fra Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 119).

Oppgaven ovenfor spør om hvilke strategier som kan være gunstig å bruke når elevene skal finne uttrykket for den n-te figuren i et mønster. Gjennom diskusjon og utveksling av hvilke strategier elevene foretrekker vil elevene bli mer bevisste sin egen strategi. Samtidig kan slike oppgaver bidra til at elevene lærer av hverandre. På denne måten kan diskusjonsoppgaver bidra til at elevene får bedre forståelse og læring om algebra, samtidig som undervisningen blir mer tilpasset hver enkelt elev.

5.0 Drøfting av resultater

Resultatene av analysen viser at det er noen forskjeller mellom de to lærebøkene vi har analysert og som må diskuteres videre.

5.1 Algebra og algebraisk tilknytning

Av alle oppgavene i de to lærebøkene var det i begge over en fjerdedel som var rene algebraoppgaver. Dette i seg selv viser at forlagene har tatt til seg det endrede fokuset i læreplanen, hvor algebra har fått større pass på 8.trinn. I læreplanen er det fire kompetansemål som direkte kan knyttes til algebra av totalt 11. Ut ifra dette så vi kanskje for oss at det kom til å være en større andel algebraoppgaver enn det vi har sett.

For å få et tydeligere svar på om oppgavene i boka kan være med på å hjelpe elevene til å forstå algebra må vi også se på de som har tilknytning til algebra. I *Matemagisk 8* utgjør de rene algebraoppgavene og oppgavene med tilknytning til algebra til sammen 46% i, altså nesten halvparten av oppgavene. I *Matematikk 8* er prosentandelen i disse to kategoriene til sammen på 35,1 %, altså mer enn 10% mindre enn i *Matemagisk 8*. Dette utgjør en forskjell på 366 oppgaver. Ut ifra dette tallet kan vi si at *Matemagisk 8* har større grunnlag i antall oppgaver for å kunne gi elevene gode forutsetninger for å forstå algebra.

Begge bøkene bruker algebra for å vise tilknytningen mellom algebra og aritmetikk. Vi sammenlignet kapitlene om aritmetikk i de to bøkene og fant en forskjell på 140 oppgaver hvor *Matemagisk 8* hadde 223 oppgaver i disse kapitlene innunder kategoriene «algebra» og «tilknytning til algebra». Med andre ord har *Matemagisk 8* flere oppgaver som kan bidra til at elevene ser sammenhengen mellom aritmetikk og algebra.

Resultatene viste også at *Matemagisk 8* hadde algebraoppgaver innenfor alle kapitlene i boka, mens *Matematikk 8* manglet dette i ett kapittel. Dette kan vi tolke dithen at lærebøkene prøver å vise algebras tilknytning til andre matematiske tema. Kapittelet i *Matematikk 8* som ikke inneholder algebrakapitler er kapittelet om funksjoner. Læreplanen poengterer ganske tydelig at elevene på 8.trinn skal få muligheten til å utforske og se sammenhengen mellom funksjoner og algebra (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12). Med andre ord kan fraværet av algebraoppgaver i dette kapittelet være uheldig for elevenes forståelse av algebra og dets tilknytning til funksjoner. Denne forskjellen mellom bøkene ble forklart i resultatdelen med at *Matematikk 8* har større fokus på koordinatsystemer og grafer som illustrasjon av virkelige situasjoner, som ikke har blitt vurdert til algebra eller oppgaver som har tilknytning til algebra. *Matemagisk 8* har derimot fokus på funksjonsmaskiner og lineære funksjoner i tillegg til koordinatsystemer og virkelighetsbaserte grafer. Dessuten har denne læreboken også fått frem generaliseringsaspektet gjennom oppgaver hvor elevene må bruke algebra for å generalisere funksjoner.

Man kan argumentere for at jo flere oppgaver innenfor et emne, jo bedre læring, men antall oppgaver gir oss ikke konkret svar på problemstillingen da det ikke sier noe om hva elevene møter. Her må vi gå nærmere inn på hva disse oppgavene inneholder både i form av kognitive krav, kjerneelement og algebraisk aktivitet for å kunne gi et tydelig svar.

5.2 Kognitivt nivå

Det kognitive nivået til oppgavene kan ha mye å si for elevenes forståelse og læring av algebra. Resultatene er bare basert på oppgaver som inkluderer algebra, derfor kan det være andre oppgaver i bøkene som også dekker de kognitive nivåene. Forskningen vår er derimot begrenset til emnet algebra og derfor er det kun disse oppgavene som er blitt videre analysert.

Resultatene viser at *Matemagisk 8* hadde en relativt jevn fordeling av oppgaver på de ulike kognitive nivåene, med lavest antall på det høyeste nivået «matematisk tenking» på 7,05%. *Matematikk 8* hadde derimot en overvekt av oppgaver på det laveste nivået «memorering» med 44,1% av oppgavene plassert her. For å kunne gjøre en enklere sammenligning ser vi på de to laveste nivåene opp mot de to høyeste. Teorien vi har støttes oss på om kognitive krav i matematikkoppgaver viser at oppgaver innenfor både «prosedyrer med sammenhenger» og «matematisk tenking» vil kunne gi elevene bedre forståelse for matematiske begreper, prosesser og ideer (Valenta, 2016, s. 8). Det må likevel påpekes at oppgaver på alle nivå er nødvendig, men det bør være en balanse. I *Matemagisk 8* ble 45,02% av oppgavene analysert til de to høyeste nivåene, mens det i *Matematikk 8* var 21%. Dette er en betydelig forskjell. Kun tre oppgaver oppfylte kravene til kategorien «matematisk tenking» i *Matematikk 8,* i motsetning til 39 oppgaver i *Matemagisk 8*. Tallene viser oss at *Matematikk 8* har en overvekt av oppgaver på de to laveste kognitive nivåene, noe som gjør at elevene i denne boken blir presentert for en overvekt av repetisjon, reproduksjon av regler og øving på algoritmer. I tillegg vil det være liten tvil for elevene hvordan de skal løse oppgavene, samt at det er få oppgaver som viser tilknytning til andre matematiske tema, begreper og sammenhenger. Dette kan sies å være uheldig da forskning og læreplan legger stor vekt på hva en slik forståelse kan ha å si for læring og utvikling i matematikk. Læreplanen i matematikk presiserer ganske tydelig at «Når elevene får mulighet til å løse problemer og mestre utfordringer på egen hånd, bidrar dette til å utvikle utholdenhet og selvstendighet.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2).

Oppgaver basert på de to laveste nivåene vil ikke gi elevene denne utfordringen, da de krever lite gjennom repetisjon og øving på regler og algoritmer som elevene skal følge.

5.3 Kjerneelement

Kjerneelementene i matematikk er grunnlaget for hva elevene må beherske for å mestre faget og skal være til stedet gjennom alle tema (Utdanningsdirektoratet, 2019). Derfor er også dette et viktig aspekt for å kunne svare på problemstillingen. Vi har kun sett på kjerneelement som forekommer i algebraoppgaver og ikke på kjerneelement i alle oppgavene i boka, derfor kan denne delen av analysen kun gi svar på om kjerneelementene blir representert godt nok med tanke på algebraoppgavene, som også er det vi ønsker svar på i problemstillingen.

Begge bøkene har algebraoppgaver som representerer alle de ulike kjerneelementene. Det er høyest representasjon av kjerneelement 3 og 4 som omhandler resonnering, argumentasjon, representasjon og kommunikasjon. Begge bøkene har altså mange algebraoppgaver hvor elevene må begrunne hvordan de kommer frem til et svar, følge, vurdere og forstå hvordan andre har tenkt før dem og argumentere for hvorfor det de har kommet frem til er riktig. I tillegg finnes det mange oppgaver som viser sammenhengen mellom representasjonsformer, hvor elevene må veksle mellom disse og hvor elevene må bruke språket til å forklare matematikken. Begge disse kjerneelementene kan hjelpe elevene til å lære algebra og få forståelse for hva algebra innebærer.

Det er relativt høy forekomst av kjerneelement 5, abstraksjon og generalisering, med 21% i *Matemagisk 8* og 4,9% i *Matematikk 8*. Abstraksjon og generalisering går ut på blant annet formalisering av matematisk språk og generalisering gjennom algebra. På bakgrunn av dette er kanskje ikke disse prosentene så gode, da dette kjerneelementet bygger på mye av det læreplanen definerer algebra som, nemlig at «Algebra [...] er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Derfor skulle gjerne dette kjerneelementet vært inkludert i flere av algebraoppgavene enn det vi har sett ut ifra vår analyse.

Det er lavest representasjon av kjerneelement 1 og 6. Kjerneelement 1, utforskning og problemløsning er noe av det læreplanen har størst fokus på. Bare i første avsnitt i læreplanen for matematikk er «utforsking og problemløsning» nevnt tre ganger (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). Ut ifra dette skulle en kanskje tro at dette kjerneelementet hadde høyere representasjon i lærebøkene enn det viste seg at det har. I *Matemagisk 8* var det 57 oppgaver som ble analysert til å inneholde kjerneelement 1, mens det kun var 7 oppgaver som inneholdt samme kjerneelement i *Matematikk 8*. Det var altså 50 flere algebraoppgaver som inneholdt elementer av utforskning og problemløsning i *Matemagisk 8*. Dette er en betydelig forskjell og kan ha mye å si for elevenes opplevelse av faget generelt og algebra spesielt. Læreplanen i matematikk er tydelige på dette da de skriver at «Elevene viser og utvikler kompetanse i faget på 8. trinn når de utforsker og generaliserer matematiske sammenhenger algebraisk.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.12). Med andre ord bør kjerneelement 1 være godt representert i lærebøker når det kommer til algebraoppgaver.

Kjerneelement 6, matematiske kunnskapsområder omhandler blant annet det å se sammenhenger mellom matematiske tema og utvikle varierte regnestrategier. Det er verdt å nevne at begge bøkene har underkapitler som tar for seg regnestrategier spesifikt, men da disse kapitlene ikke er direkte tilknyttet algebra var det få av oppgavene som ble analysert som algebraoppgaver. Det må også påpekes at *Matemagisk 8* hadde 44 oppgaver innenfor dette kjerneelementet, mens *Matematikk 8* hadde 3. I den sistnevnte boken var det kun i diskusjonsoppgavene kjerneelement 6 var å finne. *Matemagisk 8* hadde derimot oppgaver med kjerneelement 6 både i diskusjonsoppgavene og i andre oppgaver rundt om i boka, det var kun to kapittel som ikke hadde noen oppgaver med dette kjerneelementet. Slutningen vi kan trekke fra dette er at *Matemagisk 8* kan ha fått frem sammenhengen mellom algebra og andre emner bedre gjennom flere oppgaver som viser disse tilknytningene.

Resultatene fra analysen viser at *Matemagisk 8* har en vesentlig høyere andel forekomster av kjerneelement i algebraoppgavene, i tillegg er de fordelt over alle kapitlene bortsett fra ett. *Matematikk 8* har kjerneelement i to kapittel med en betydelig lavere andel. De ulike kjerneelementene skal være til stede gjennom alle tema og over tid slik at elevene får utviklet ferdighetene og forståelsen for grunnleggende begrep og mestre faget i sin helhet (Utdanningsdirektoratet, 2017). Med bakgrunn i dette kan vi si at *Matemagisk 8* i større grad oppfyller i det læreplanen påpeker om kjerneelementene når det kommer til algebraoppgaver.

5.4 Algebraisk aktivitet

Ut ifra teori om algebraisk aktivitet har vi kommet frem til at alle de ulike aktivitetene bør være godt representert (Kieran, 2004, s. 142). Altså bør det ikke være overvekt av noen aktivitetstyper, da alle tre trengs for å få en god forståelse og læring av algebra. Igjen er det kun algebraoppgavene som er blitt analysert, noe som ikke gir oss et helhetlig bilde av alle oppgavene i boka. Det gir oss likevel en indikasjon på om algebraoppgavene kan hjelpe elevene i å forstå algebra ut ifra hvilken aktivitet oppgavene krever.

Begge bøkene har oppgaver innenfor alle de tre aktivitetene. Med litt ulik fordeling. Begge har flest oppgaver innenfor transformerende aktivitet, noe som kanskje er selvforklarende da det er her mye av regelbyggingen og automatikken med algebra kommer inn. Her så vi at *Matemagisk 8* hadde færre av denne typen oppgaver enn *Matematikk 8*. Over 85% av oppgavene i *Matematikk 8* var av den transformerende typen, noe som kan sies å være en for stor andel. Denne høye forekomsten av transformasjon kan gjøre at elevene ikke får innsyn i hva algebra kan brukes til og hvor mye emnet har å si for andre områder i matematikken. Elevene vil derimot få god læring i manipulasjon og reglene for dette, men disse ferdighetene må da kunne bli brukt i andre sammenhenger slik som for eksempel problemløsning som vi finner i *global-meta level*. Når vi da ser at det er 2,6% av oppgavene som blir analysert inn i denne kategorien blir fordelingen av aktivitetene veldig ujevn, noe som er uheldig.

Resultatet fra analysen viser at *Matemagisk 8* har en relativt jevn fordeling av oppgaver innenfor alle de tre aktivitetene. Selv om det kun er 19,9% oppgaver innenfor *global-meta level* utgjør dette 110 algebraoppgaver, altså 97 flere oppgaver enn i *Matematikk 8*. På grunn av dette kan vi si at *Matemagisk 8* gir elevene bedre forutsetning for å arbeide med ulike aktiviteter innenfor algebra og dermed kan gi bedre forståelse og læring av algebra.

5.5 Tilpasset opplæring

Tilpasset opplæring er et begrep som innebærer at elevene skal få undervisning slik at de mestrer faget og at opplæringen treffer elevene på det nivået de er og ut ifra forutsetningene de har (Opplæringslova, 1998, § 1-3). Begrepet er stort og handler om mer enn det læreren gjør av justeringer i undervisningen eller det en lærebok kan legge opp til. Likevel vil det være visse elementer i en lærebok som kan være med å bidra til bedre tilpasset opplæring. Vi har sett spesielt på differensieringsoppgaver og visse typer oppgaver.

Bøkene har valgt ulike utforminger på differensieringsoppgavene, hvor de i *Matematikk 8* blir presentert kontinuerlig etter hverandre, mens i *Matemagisk 8* er det egne seksjoner for ulik vanskelighetsgrad. I *Matematikk 8* vil det dermed bli mindre synlig at elever arbeider med ulike oppgaver, samtidig som det kan være enklere å gå videre til en oppgave på et vanskeligere nivå da de står rett etter hverandre, se eksempel 35.

3.84 Løs likningene.

• a) $\frac{x}{5}+2=5$ b) $\frac{x}{3}-\frac{1}{3}=8$ c) $\frac{8}{x}+4=6$

•• a) $\frac{5}{2}=\frac{x}{2}-1$ b) $\frac{24}{7}=\frac{2x}{7}-2$ c) $6=\frac{9}{x}+\frac{6}{2}$

••• a) $\frac{-2x}{3}-4=\frac{6}{3}$ b) $\frac{4-3}{2}=\frac{x}{6}+3$ c) $\frac{1}{4}+\frac{3}{x}=\frac{3}{2}-\frac{2}{x}$

Eksempel 35: Eksempel fra Matematikk 8 på oppgaver med ulik vanskelighetsgrad (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 220).

Om en elev da føler at det første nivået var enkelt og ga motivasjon vil det være kort vei til å prøve seg på neste nivå. Dette kan bidra til at elever med lav måloppnåelse utfordrer seg selv og dermed får mer øving og kunnskap i faget.

I *Matemagisk 8* er differensieringsoppgavene på ulike sider og disse sidene har hver sin farge. Ved å gjøre det på denne måten kan det bli veldig tydelig for elevene hvem som arbeider på hvilket nivå noe som kan virke stigmatiserende for enkelte. Vi har selv erfart hvor oppmerksomme elever kan være på dette, mens det i andre tilfeller ikke trenger å være noe problem. Denne konklusjonen er kun basert på egne opplevelser som elever og lærere og trenger ikke ha noe å si for elevene som bruker boken, men det er verdt å ta med som en eventuell virkning på elevene.

I teoridelen om tilpasset opplæring (jf. 2.2.7) ble det presisert at oppgaver som bygger på grunnleggende matematiske begrep og problemløsning vil kunne være med å gi elevene bedre forståelse for et emne. Om vi ser på resultatet fra de andre hovedkategoriene og da spesielt høye kognitive krav, kjerneelement 1 og 6 og *global-meta level* viser det at begge bøkene har oppgaver innenfor disse kategoriene. Derimot har *Matemagisk 8* flere algebraoppgaver som inneholder elementer fra disse kategoriene enn det *Matematikk 8* har.

I tillegg vil samarbeidsoppgaver kunne bidra til bedre tilpasset opplæring. Begge bøkene har over halvparten av diskusjonsoppgavene innenfor tema som direkte omhandler algebra eller har tilknytning til algebra. Dette kan være gunstig for elevenes utvikling i matematikken og forståelse for algebra, samt at dette kan bidra til bedre tilpasset opplæring. Elevene lærer og tenker på ulike måter og slike diskusjonsoppgaver kan derfor bidra til at flere lærer på ulike måter, samtidig som elevene kan hjelpe hverandre i å vise hvordan de selv tenker. Her er det også mulighet for at elevene får utviklet sin proksimale utviklingssone (jf. 2.2.7). Dette kommer selvsagt an på hvordan læreren velger å bruke disse oppgavene, hvordan gruppene eller parene blir satt sammen og hvordan elevene i klassen mottar oppgaven. Derimot er ikke dette noe vi tar hensyn til i denne masteroppgaven og konklusjonen blir da at diskusjonsoppgavene kan være gunstig for tilpasset opplæring.

Oppgaver som har høye kognitive krav vil kunne være med å øke den tilpassede opplæringen, da disse oppgavene baserer seg på begreper og underliggende sammenhenger i matematikken. Dette kommer selvsagt an på den enkelte oppgave, men det kan argumenteres for at jo flere oppgaver med høye kognitive krav, jo bedre for elevene og for tilpasset opplæring. Her så vi i resultatene fra analysen at *Matemagisk 8* hadde flere oppgaver innenfor de to høyeste kognitive nivåene enn det *Matematikk 8* hadde. Gjennom direkte tolkning av disse tallene kunne vi sagt at *Matemagisk 8* legger opp til mer tilpasset opplæring når det kommer til algebraoppgaver. På den andre siden er det kun oppgaver innenfor algebra som er blitt presentert, noe som gjør at vi ikke får et helhetlig bilde av oppgaver som kan bidra til bedre tilpasset opplæring gjennom hele boka.

Tilpasset opplæring er vanskelig å måle ved analyse av lærebøker, spesielt når vi ikke går grundigere inn i hele boken. Hvordan forfatterne forklarer begreper, hvilke eksempler de bruker og hvilke oppgaver som finnes innenfor andre matematiske tema er ikke inkludert i vår analyse. På grunn av dette kan vi kun si noe om hvordan lærebøkene fremstår med tanke på algebra og om de resultatene vi får kan ha noe å si for tilpasset opplæring for akkurat dette temaet.

5.6 Analyse opp mot tidligere forskning

Ettersom fagfornyelsen nylig har blitt implementert i den norske skolen og at læreverk tilpasset den nye læreplanen først ble utgitt i 2020, finnes det i skrivende stund ikke noe publisert forskningsarbeid om læreverk i matematikk produsert etter denne. Likevel er det de samme forlagene som har laget tidligere læreverk, derfor vil vi se nærmere på resultatene fra vår studie med Kongelfs studie på læreverk basert på LK06.

Kongelf (2019) konkluderte i delstudie tre med at det var lite samsvar mellom LK06 sin definisjon av algebra og hvordan algebra ble presentert i læreverk. Studien viste at det var lite oppgaver som ga elevene mulighet til refleksjon og utforskning og et for stort fokus på *transformerende* manipulasjonsoppgaver.

Vår forskning opp imot LK20 viser at *Matematikk 8* har tendenser til det samme, med en høy andel oppgaver som krever transformerende aktiviteter, en lav representasjon av kjerneelement og fokus på lave kognitive krav. Her ser vi en del oppgaver som kan minne om det vi selv oppfatter som tradisjonell skolealgebra, hvor algebras inngripen i andre matematiske tema blir mindre synlig. Likevel må det presiseres at vår forskning ikke tar hensyn til oppgaver utenfor vår definisjon av algebra basert på teori. Det kan derfor være flere oppgaver i læreboken som oppfyller både høyere kognitive krav og inneholder flere kjerneelement. For eksempel har denne læreboken oppgaver innenfor tverrfaglige tema etter hvert kapittel, som er ett av fokusområdene i alle fag i den nye læreplanen. Disse oppgavene hadde dessverre ingen algebraoppgaver og er derfor ikke blitt vurdert i vår analyse. Mange av elementene vi har observert når vi har gjennomført analysen av læreboka tyder på at mye har endret seg fra Kongelfs studie, men da disse ikke er en del av vår studie er det kun hvordan algebraoppgavene blir presentert som er aktuell å diskutere.

Om vi ser på *Matemagisk 8* opp mot Kongelfs studie kan vi si at fokusområdet har endret seg. I *Matemagisk 8* finner vi jevnere fordeling av de algebraiske aktivitetene, flere oppgaver innenfor de høye kognitive kravene og en høyere representasjon av kjerneelement fordelt ut over algebraoppgaver gjennom hele boken. Boken inkluderer oppgaver som gir tydeligere sammenhenger mellom algebra og andre matematiske emner. Den har flere oppgaver innenfor utforskning og problemløsning, men her kunne det vært enda flere. Generelt sett virker det som forfatterne og forlagene er på riktig vei når det gjelder tolkning av læreplanen og hvordan lærebøkene blir utformet.

6.0 Oppsummering

Dette forskningsprosjektet har fått oss til å innse hvor mye forståelsen for algebra kan ha å si for matematikken generelt. Vi har fått satt oss grundig inn i kognitive krav i matematikkoppgaver, samtidig som læreplanen i matematikk har blitt gjennomgått flere ganger. De lærebøkene vi har analysert har gitt oss muligheten til å få et innblikk i hvordan forfatterne introduserer algebra for elevene. Alt dette gir oss en stor fordel videre i vår profesjon. Resultatene viser at det er en bok som kommer bedre ut av analysen enn den andre. Derimot har vi kun sett på ett av temaene i matematikken og analysen vår er derfor begrenset. Vi kan ikke gjennom vår forskning si om den ene boken er bedre enn den andre, men kun om oppgavene i bøkene kan gi elevene bedre forståelse for algebra. I tillegg er det kun lærebøker for 8.trinn som er blitt analysert, mens skoler som velger det ene eller det andre alternativet mest sannsynlig vil ha samme læreverk gjennom hele ungdomsskolen. Hvordan forlagene har valgt å utforme lærebøkene for andre trinn er ikke blitt vurdert i denne studien. Derfor er det kun hvordan algebraoppgavene fremstår i lærebøker for 8.trinn vi kan vurdere og diskutere.

Begge bøkene har mange oppgaver innenfor emnet, som inneholder ulike krav, dekker forskjellige kjerneelement og alle de tre algebraiske aktivitetene. Bøkene er ganske like når det kommer til hvor mange algebraoppgaver de presenterer til elevene, forskjellen ligger i antall oppgaver som har tilknytning til algebra og hvordan bøkene har valgt å utforme algebraoppgavene. Det vi ønsket å finne ut av gjennom dette forskningsprosjektet var om lærebøkene ga elevene gode forutsetninger for å lære algebra ut ifra den nye læreplanen. Begge bøkene vil gi elevene opplæring i algebra, men på ulike vis. *Matematikk 8* vil introdusere elevene for algebra hovedsakelig i ett kapittel. Her finnes det oppgaver som inkluderer kjerneelement og som har høye kognitive krav. Derimot er det flest oppgaver hvor de får øve seg på regler, algoritmer og manipulasjon, som de igjen kanskje får bruk for i andre oppgaver i boken. *Matemagisk 8* vil gi elevene algebraoppgaver i alle kapitlene. Disse oppgavene vil både inkludere enkle repetisjonsoppgaver som krever lite av eleven og oppgaver med høye kognitive krav, samtidig som kjerneelementene er representert i flere av dem.

Valget av lærebok ligger hos skolen, men det er til syvende og sist læreren som tar valget på hvilken bok som blir tatt med inn i klasserommet. Gjennom denne forskningen har vi fått innblikk i hva som er gunstig for elevenes læring av algebra og vi vet hvilken bok vi ville valgt ut ifra dette. En annen lærer vil kanskje ha andre fokusområder som avgjør hvilken lærebok de velger.

Litteraturliste

algebraiske funksjoner. (2017, 8. august). I *Store norske leksikon.* https://snl.no/algebraisk_funksjon

aritmetikk. (2020, 30. januar). I *Store norske leksikon.* https://snl.no/aritmetikk

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag* (s. 22-43). Universitetsforlaget. https://www.idunn.no/file/pdf/66911876/vi-kan-lykkes-i-realfag.pdf

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2013). *Alfa: Matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10* (2.utg.). Fagbokforlaget.

Brehmer, D., Ryve, A. & Van Steenbrugge, H. (2015). Problem solving in Swedish mathematics textbooks for upper secondary school. *Scandinavian Journal of Education Research 60*(6), 577-593. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066427

Chazan, D. (2014). Algebra. I P. Andrews & T. Rowland (Red.), *MasterClass in Mathematics Education: International Perspectives on Teaching and Learning* (s. 125-135). Bloomsbury.

Dalland, O. (2018). *Metode og oppgaveskriving* (6.utg.). Gyldendal akademisk.

Damsgaard, H. L. & Eftedal, C. I. (2014). *...men hvordan gjør vi det?: Tilpasset opplæring i grunnskolen.* Cappelen Damm AS.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2019, 17. juni). *Om NESH.* Hentet 28. april 2021 fra https://www.forskningsetikk.no/om-oss/komiteer-og-utvalg/nesh/om-nesh/

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teknologi.* Hentet 28. april 2021 fra https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi.pdf

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers Grades 6-10*. Heinemann.

Ekeberg, T. R. & Holmberg, J. B. (2004). *Tilpasset og inkluderende opplæring i en skole for alle.* Universitetsforlaget.

Espeland, H. (2017). *Algebra at the start of Upper Secondary School. A case study of a Norwegian mathematics classroom with emphasis on the relationship between the mathematics offered and students' responses.* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Agder.

Forskningsetikkloven. (2017). *Lov om organisering av forskningsetisk arbeid* (LOV-2017-04-28-23). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2017-04-28-23

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2.utg.). Fagbokforlaget.

Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A. & Gustavsen, T. S. (2011). *QED 5-10: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen.* Høyskoleforlaget.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2020). *Matematikk 8.* Cappelen Damm.

Jablonka, E. & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks: Swedish studies on mathematics textbooks. I B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Plasdottir, B. Dahl, B. D. Söndergaard & L. Haapasalo (Red.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark and Contributions from Finland* (363-372). IAP-Information Age Publishing.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5.utg.). Abstrakt forlag.

Kaput, J.J. (2000). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum. (ED441664).

Kaput, J.J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J.J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 5-17). Taylor & Francis Group.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. I C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Red.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (s. 271-290). S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educatior, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2017). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice.* (s. 79-105). Springer International Publishing.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press.

Kiziltorak, A. & Köse, N. Y. (2017). Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *Internnational Electronic Journal of Elementary Education, 10*(1), 131-145.

Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Agder. http://hdl.handle.net/11250/2616438

Kongsnes, A. L. & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 8.* Aschehoug Forlag.

Lithner, J. (2006). A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics 67*(3), 255-276.

Matematikksenteret. (u.å). *Hva er MatteLIST og hvordan kan du bruke nettsidene?* MatteLIST. Hentet 16. april 2021 fra https://www.mattelist.no/artikkel/elev

McCulloch, G. (2011) Historical and documentary research in education. I Cohen, L., Manion, L. & Morrison K. (2011). *Research Methods in Education* (7.utg.). Taylor & Francis Group.

Meld. St. 16 (2006-2007). *...og ingen sto igjen: Tidlig innsats for livslang læring.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-16-2006-2007-/id441395/

NOU 2016: 14. (2016). *Mer å hente – Bedre læring for elever med stort læringspotensial.* Kunnskapsdepartementet.

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa* (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61

Prop. 44 (1999-2000). *Om lov om endringar i lov 17. juli 1998 nr. 61 om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (opplæringslova) m.m.* Kyrkje-, utdannings- og forskingsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/6908c4adbf6c46ce962d3042c9fc12c2/nn-no/pdfa/otp199920000044000dddpdfa.pdf

Sfard, A. (1995). The development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Smith, M., & Stein, M. (1998). Reflections on Practice: Selecting and Creating mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350. http://www.jstor.org/stable/41180423

Teigen, K. H. (2020, 14. august). *heuristikk.* Store norske leksikon. https://snl.no/heuristikk

TIMSS & PIRLS International Study Center. (u.å.). Curriculum Questionaire Exhibits. *Processes for Approving Instructional Materials for Mathematics and Science* http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/curriculum-questionnaire-exhibits/processes-for-approving-instructional-materials-for-mathematics-and-science/

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. I A. F. Coxford (Red.), *The ideas of Algebra, K-12* (s. 8-19). The national council of teachers of mathematics, Inc.

Universitetet i Oslo. (2020, 8. desember). *Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS). https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/timss/*

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2017). *Kjerneelementer – fag i grunnskolen og gjennomgående fag i vgo. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/*

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn* (MAT01-05). https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Valenta, A. (September, 2016). *Kognitive krav i matematikkoppgaver.* Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta%20Kognitive%20krav%20i%20matematikkoppgaver_0.pdf

Vygotsky, L.S. (1978/2004) Interaksjon mellom læring og utvikling. I E. L. Dale (Red.), *Om utdanning: Klassiske tekster* (s. 151-165). Gyldendal Akademisk.

Wilkens, H. J. (2011). Textbook approval systems and the Program for International Assessment (PISA) results: A preliminary analysis. *1ARTEM e-Journal 4*(2), 63-74.

Tabell og eksempeloversikt