MASTEROPPGAVE

Emnekode: MAT5006 | Navn: Karina Mikalsen

Sammenhengen mellom brøk og algebra – en kvantitativ studie av ungdomsskoleelevers forståelse av brøk og deres prestasjoner i algebra

Dato: 18.05.2022 | Totalt antall sider: 74

NORD universitet

www.nord.no

Forord

Ved levering av denne masteren er fem år ved Nord Universitet, Nesna avsluttet. Det har vært fem lærerike år med opp- og nedturer, det har også vært fantastiske år. Arbeidet med denne masteren har vært veldig lærerikt, og jeg sitter etter endt studie igjen med mye nyttig kunnskap som kommer godt med i min fremtidige jobb som lærer.

Når denne studien er over, er det noen jeg ønsker å takke. Først og fremst vil jeg takke deltakerne for deres bidrag i prosjektet mitt. Uten dem hadde det ikke blitt noe prosjekt!

Takk til mine gode studievenninner, dere vet godt hvem dere er og dere er gull verdt. Takk for gode samtaler både digitalt og når vi møtes, for godt humør og støtte igjennom studietiden. Og til mine venninner for at dere har hatt stor tro på meg, heiet og støttet meg igjennom studietiden, dere er best.

Takk til mine veiledere, Maria Klaussen Herset og Mohamed el Ghami, dere har vært gode å ha både i kriser og i gode tider, dere er gode på å holde meg på bakken. Deres faglige kunnskap har betydd mye for meg igjennom denne prosessen.

Takk til mine venninner Bente og Charlotte for korrekturlesing av oppgaven.

Tusen takk til mine foreldre, for at dere alltid stiller opp og har troa på meg! Og min kjære bestemor som har stilt opp når det har trengtes barnepass.

Tusen takk til min kjære lillesøster som har vært min «partner in crime» i studietiden! Takk for at du er du!

Sist med ikke minst tusen takk til min fantastiske familie som har gjort dette mulig for meg, mine tre barn som har sett mamma lese og gjøre oppgaver både kvelder, fridager og i helger, dere er så flotte, gode og nydelige barn. Og min fantastiske mann som har holdt ut med meg og mitt til tider lunefulle humør, og for å ha vist tålmodighet og hjelp. Du er og blir helt spesiell! Jeg digger dere!

Nesna, 18.05.2022

Karina Mikalsen

Sammendrag

Formålet med forskningsprosjektet var å undersøke sammenhengen mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og deres prestasjoner i algebra.

Valg av tema for masteroppgaven begrunnes med at dette er et veldig interessant og viktig tema. Temaet er viktig å se på fordi, dersom det viser seg at det er sammenheng mellom brøk og algebra, kan det være med på å endre/forbedre hvordan en tilnærmer seg disse emnene for å øke elevenes faglige prestasjoner. Temaet er relevant med tanke på at resultatene fra TIMSS i 2015 viser at norske elever på 9.trinn gjør det middels godt i matematikk, men at dårlige algebraprestasjoner trekker gjennomsnittsskåren ned (Bergem, 2016, s. 22). Ifølge kortrapporten av TIMSS undersøkelsen i 2019 har Norge hatt en signifikant tilbakegang i gjennomsnittsskår i matematikk i den siste fireårsperioden (Kaarstein et al., 2020, s. 16). Men det er ikke signifikante endringer i gjennomsnittsskåren innen emnet algebra, fra 2015 til 2019 (Kaarstein et al., 2020, s. 18).

På bakgrunn av dette ble følgende problemstilling formulert:

Hvilken sammenheng er det mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og deres prestasjoner i algebra?

For å måle sammenhengen mellom brøkforståelse og algebraprestasjoner ble det utformet et kvantitativt forskningsdesign med spørreundersøkelse for datainnsamling. Dermed må det antas at man kan måle abstrakte begreper som i denne oppgaven vil være forståelse. Det er brukt en tverrsnittsundersøkelse, en survey som gjennomføres på ett bestemt tidspunkt av de ulike deltakerklassene. Det ble gjort feltarbeid der forskeren møtte opp og ga deltakerne en survey med oppgaver innen brøk og algebra.

Analysene som ble kjørt er krysstabell, enveis ANOVA og Pearson’s korrelasjonsanalyse. Det mest sentrale funnet fra forskningsprosjektet er at det er sammenheng mellom forståelse av brøk og algebraprestasjoner.

Signifikante funn i forskningen er korrelasjon mellom gjennomsnittsscore av brøkoppgaver og algebrapoppgaver. Men fra denne undersøkelsen er det ikke mulig å si noe om årsaken til dette. Det er en sterkere korrelasjon mellom brøkoppgavene som måler relasjonell forståelse og prestasjon i algebra, enn det er mellom brøkoppgavene som måler instrumentell forståelse og prestasjoner i algebra.

Abstract

The purpose of the research project was to investigate the connection between middle school students' understanding of fractions and their performance in algebra.

The choice of topic for the master's thesis is justified by the fact that this is a very interesting and important topic. The topic is important to look at because, if it turns out that there is a connection between fractions and algebra, it can help to change / improve how one approaches these topics to increase students' academic performance. The topic is relevant considering that the results from TIMSS in 2015 show that Norwegian students in 9th grade do moderately well in mathematics, but that poor algebra performance pulls the average score down (Bergem, 2016, s. 22). According to the short report of the TIMSS survey in 2019, Norway has had a significant decline in average scores in mathematics in the last four-year period (Kaarstein et al., 2020, s. 16). But there are no significant changes in the mean in the subject of algebra, from 2015 to 2019 (Kaarstein et al., 2020, s. 18).

Based on this, the following problem was formulated:

What is the connection between middle school students' understanding of fractions and their performance in algebra?

To measure the relationship between fraction understanding and algebra performance, a quantitative research design was designed with a questionnaire for data collection. Thus, it must be assumed that one can measure abstract concepts that in this thesis will be understanding. A cross-sectional survey has been used, a survey that is conducted at a specific time by the various classes of participants. Fieldwork was done where the researcher showed up and gave the participants a survey with problems in fractions and algebra.

The analyzes that were performed are cross-table, one-way ANOVA and Pearson's correlation analysis. The most central finding from the research project is that there is a connection between understanding fractions and algebra performance.

Significant findings in the research are a correlation between the average score of fractions and algebra problems. But from this study it is not possible to say anything about the reason for this. There is a stronger correlation between the fraction problems that measure relational understanding and performance in algebra, than there is between the fraction problems that measure instrumental understanding and performance in algebra.

Innholdsfortegnelse

Liste over tabeller

1. Innledning

I dette kapitlet beskrives bakgrunnen for temavalg og formålet med oppgaven. Her vil også problemstillingen presenteres, det kommer begrepsavklaringer og det gjøres rede for det som står i læreplanen (Kunnskapsløftet 2020) i matematikk om brøk, algebra, og resonnering og argumentering i faget.

1.1. Bakgrunn for temavalg og formål for oppgavevalg

Temaet for masteroppgaven er sammenhengen mellom brøk og algebra. Tidligere forskning viser at det er en sammenheng mellom brøk og algebra (Brown & Quinn, 2007b). På bakgrunn av tidligere forskning er ønsket å forske videre på temaet, for å se om det finnes en sammenheng mellom brøk og algebra hos norske ungdomsskoleelever. Temaet er relevant med tanke på at resultatene fra TIMSS i 2015 viser at norske elever på 9.trinn gjør det middels godt i matematikk, men at dårlige algebraprestasjoner trekker gjennomsnittsskåren ned (Bergem, 2016, s. 22). Ifølge kortrapporten av TIMSS undersøkelsen i 2019 har Norge hatt en signifikant tilbakegang i gjennomsnittsskår i matematikk i den siste fireårsperioden (Kaarstein et al., 2020, s. 16). Men det er ikke signifikante endringer innen emnet algebra, fra 2015 til 2019 (Kaarstein et al., 2020, s. 18).

Bakgrunnen for valget er at dette er et veldig interessant og viktig tema. Temaet er viktig å se på fordi, dersom det viser seg at det er sammenheng mellom brøk og algebra, kan det være med på å endre/forbedre hvordan en tilnærmer seg disse emnene for å øke elevenes faglige prestasjoner. Artikkelen som først fanget min interesse for temaet var forskning gjennomført i USA, der de hadde oppgavebaserte intervju med elever i både brøk og algebra (Hackenberg & Lee, 2015). All forskning jeg har lest har vært gjennomført utenfor Norge, derfor det er viktig å undersøke om man kan se en sammenheng hos norske ungdomsskoleelever. Kan en eventuell sammenheng mellom brøk og algebra være en forklaring på dårlige algebraprestasjoner hos norske elever på 9.trinn? Som nevnt viste TIMSS resultatene fra 2015 at norske elevers prestasjoner i algebra er svake (Bergem, 2016, s. 22, 36). TIMSS resultatene fra 2019 viste ikke signifikante endringer i algebraprestasjon hos norske ungdomsskoleelever (Kaarstein et al., 2020, s. 18).

Dersom det skulle vise seg å være en sammenheng mellom brøk og algebra hos norske ungdomsskoleelever, må man undersøke hvilken sammenheng det er. Selv om tidligere forskning viser at det er en sammenheng mellom brøk og algebra, er den nødvendige koblingen ukjent (Booth et al., 2014). En mulig forklaring på elevers lave algebraprestasjoner kan være at de ikke ser strukturene mellom de ulike relasjonene. Skemp (1976) påpeker viktigheten av en relasjonell forståelse, og er grunnen til at jeg ønsker å studere dette nærmere.

Ut fra dette kan en være mer bevisst sammenhengen mellom brøk og algebra når man underviser, og på den måten muligens bedre elevenes algebraprestasjon. Mye av forskningen viser at det er en sammenheng mellom brøk og algebra, men ifølge Booth et al, (2014) ser det ut til at den nøyaktige koblingen mellom brøkkunnskap og algebra er ukjent.

Formålet med studien var å se nærmere på om det kan være en sammenheng mellom hvilken forståelse elevene har i brøk og hvilken forståelse elevene har i algebra

1.2. Problemstilling

På bakgrunn av prosjektets formål, eksisterende teori og forskning og mitt vitenskapelige ståsted er følgende forskningsspørsmål formulert:

Hvilken sammenheng er det mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og deres prestasjoner i algebra?

For at problemstillingen skal forstås klart og tydelig defineres begrepene «brøk», «algebra» og «forståelse» slik:

Algebra: I læreplanen i matematikk står det skrevet at «Algebra, handler om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Algebra er et stort tema i matematikk, for denne oppgaven måtte begrepet avgrenses. Begrepet algebra er valgt å avgrenses til; ligning med én ukjent, altså en lineær likning eller førstegradslikning. Dette er gjort ut fra hva deltakerne blir testet i, altså hva som skal forskes på.

Brøk: «Brøk er rasjonelle tall, et rasjonelt tall kan defineres som et tall uttrykt av kvotienten a/b av heltall, der nevneren, b, ikke er null» (Gabriel et al., 2013). Verdien til brøk er bestemt av det multiplikative forholdet mellom teller og nevner (Empson & Levi, 2011, s. 3-4). Det multiplikative forholdet mellom en del og dens hele er reversibelt i den forstand at det hele kan deles inn i brøker og brøkene kan bli satt sammen igjen til det hele (Empson & Levi, 2011, s. 75).

Prestasjon: I denne oppgaven har jeg avgrenset begrepet prestasjon i algebra til om deltakerne har klart å løse oppgavene i algebra eller ikke. Det er ikke tatt hensyn til delvis riktig svar på oppgavene.

Forståelse: I denne oppgaven defineres begrepet forståelse ut fra Skemp sin definisjon på begrepene. Forståelse er ifølge Skemp et ord som kan ha to betydninger, det er relasjonell forståelse og instrumentell forståelse (Mellin-Olsen, referert i Skemp, 1976). Skemp definerer relasjonell forståelse som, å både vite hva en skal gjøre og hvorfor (Skemp, 1976). Instrumentell forståelse har ikke Skemp tidligere sett på som forståelse i det hele tatt, men beskrevet det som regler uten resonnement, evnen til å bruke en regel (Skemp, 1976). Instrumentell forståelse beskriver Skemp (1976) som «rules without reasons», mens ved relasjonell forståelse vet en både hvordan og hvorfor. Ifølge Wæge (2015) handler instrumentell forståelse om at elevene har lært en rekke instrukser som de kan bruke for å komme seg fra spesifikke oppgaver til svar på oppgavene. Elevene er avhengige av ekstern veiledning for å lære seg måter å «komme seg frem» på, fordi de ikke har utviklet en forståelse av de underliggende relasjonene mellom de ulike stegene og endepunktet (Wæge & Nosrati, 2015). Elever med relasjonell forståelse har i motsetning til dette bygd mentale strukturer slik at de kan lage nærmest uendelig mange forskjellige planer for å komme seg fra et punkt til hvilket som helst annet punkt (Wæge & Nosrati, 2015). Å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom begrepene, det å vite både hvordan en oppgave skal løses og hvorfor det blir sånn, er det som er relasjonell forståelse (Wæge & Nosrati, 2015).

1.3. Algebra i læreplanen i matematikk 1.-10.klasse

Hvis en leter spesifikt etter begrepet algebra i læreplanen i matematikk, finner man det første gang nevnt i kompetansemål etter 8.trinn. Men hvis en leser på begrepene som brukes i kompetansemål etter hvert trinn ser man at det er innslag av algebra flere steder, men uten bruk av ordet algebra. For eksempel står det i kompetansemål etter 7.trinn:

- «bruke samansette rekneuttrykk til å beskrive og utføre utrekningar»
- «bruke ulike strategiar for å løyse lineære likningar og ulikskapar og vurdere om løysingar er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Og etter 8.trinn står det at elevene skal kunne

- «utforske algebraiske reknereglar»
- «beskrive og generalisere mønster med eigne ord og algebraisk»
- «lage og forklare rekneuttrykk med tal, variablar og konstantar knytte til praktiske situasjonar»
- «lage, løyse og forklare likningar knytte til praktiske situasjonar» (Utdanningsdirektoratet, 2020)

1.4. Brøk i læreplanen i matematikk 1.-10.klasse

Når det gjelder brøk i læreplanen i matematikk har fokuset i denne studien vært på 7.-, 8.- og 9.trinn, siden undersøkelsen skal gjennomføres av elever på 8. og 9.trinn. Etter 9.trinn er det ikke nevnt brøk spesifikt.

Etter 7.trinn skal elevene kunne:

- «utvikle og bruke formålstenlege strategiar i rekning med brøk, desimaltal og prosent og forklare tenkjemåtane sine»
- «representere og bruke brøk, desimaltal og prosent på ulike måtar og utforske dei matematiske samanhengane mellom desse representasjonsformene» (Utdanningsdirektoratet, 2020).

etter 8.trinn skal elevene kunne:

- «utforske og beskrive primtalsfaktorisering og bruke det i brøkrekning» (Utdanningsdirektoratet, 2020)

1.5. Resonnering og argumentering i læreplanen

Under underveisvurdering i læreplanen i matematikk står det : «Vidare viser og utviklar dei kompetanse i matematikk når dei resonnerer over og argumenterer for løysingar og matematiske samanhengar» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Denne setningen står fra 5.trinn til og med etter 10.trinn. Det står også at «Læraren skal leggje til rette for elevmedverknad og stimulere til lærelyst ved at elevane får utforske matematikk og løyse matematiske problem gjennom å vere kreative, resonnere og reflektere» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Denne setningen er også en gjenganger i læreplanen i matematikk. Den setningen er nedfelt under underveisvurderingen under kompetansemålene etter 5.trinn til og med etter 9.trinn.

Å kunne resonnere og argumentere på løsninger og matematiske sammenhenger skal derfor settes høyt i matematikk. Ut fra definisjonen i denne oppgaven handler relasjonell forståelse om å se sammenhenger. Da kan det komme godt med å vite at det står så sterkt i matematikkfaget at elevene skal ha jobbet med resonnement og argumentasjon i matematikk.

1.6. Oppbygning av oppgaven

I dette kapitlet ble det redegjort for bakgrunnen for temavalg og formål med oppgavevalg, problemstillingen, begrepsavklaring, om algebra og brøk i læreplanen i matematikk og relasjonell forståelse.

Denne oppgaven består videre av de fem kapitlene teori, metode, resultater, diskusjon og avslutning med oppsummering og avsluttende kommentar.

I kapittel 2 gjøres det rede for tidligere teori under inndelinger med brøk, algebra og sammenhengen mellom brøk og algebra og om forståelse. Denne redegjørelsen er bakgrunnen for problemstillingen, og danner grunnlaget for å kunne besvare den.

I kapittel 3 blir det metodiske designet for oppgaven presentert. Det redegjøres for valg av metode, valg av oppgaver til surveyen, i tillegg til utvalg og datainnsamling. Videre presenteres kvalitet av studien, validitet og reliabilitet. Avslutningsvis i kapitlet handler det om forskningsetikk og analysemetodene.

I kapittel 4 blir resultater fra spørreundersøkelsen presentert og analysert. Først prosentandel riktige svar på oppgaver, krysstabeller og korrelasjonsanalyse, deretter enveis ANOVA.

I kapittel 5 diskuteres resultatene opp mot tidligere forskning som ble presentert i kapittel 2.

Kapittel 6 inneholder en oppsummering av undersøkelsen og hovedfunn. Studiens problemstilling besvares og kritisk refleksjon til undersøkelsen presenteres. Oppgaven avsluttes med konklusjon og tanker om videre forskning

2. Relevant teori

I dette kapitlet presenteres tidligere forskning under algebra, brøk og under forståelse og kunnskap i brøk.

2.1. Algebra

Allerede i barnehagen starter algebraisk tenkning ettersom barna representerer addisjon og subtraksjon med gjenstander, fingre, mentale bilder, tegninger, lyder, utfører situasjoner, verbale forklaringer, uttrykk eller ligninger (Van de Walle et al., 2019, s. 299). Ifølge Van de Walle et al. (2019, s. 299) er barneskoleelever i stand til å forstå og bruke algebraiske ideer, som inkluderer koblinger mellom aritmetikk og algebra. På ungdomsskolen begynner elevene å lære algebra på en mer abstrakt og symbolsk måte med fokus på å forstå og bruke variabler, uttrykk og ligninger, sentralt i matematisk resonnement står algebraisk tenkning (Van de Walle et al., 2019, s. 299).

Empson et al (2010) hevder at relasjonell tenkning er en kritisk forløper – kanskje den mest kritiske – for å lære algebra med forståelse, fordi hvis barn forstår regnestykket de lærer, er de bedre forberedt til å løse problemer og generere nye ideer innen algebradomenet.

Et lite sett av matematiske forhold styrer hvordan tall, operasjoner og ligninger fungerer både i regning og i algebra, disse forholdene kalles de grunnleggende egenskapene til operasjoner og likhet (Empson & Levi, 2011, s. 73). Empson & Levi (2011, s. 73) kaller strategiene der barn trekker på disse grunnleggende egenskapene, enten implisitt eller eksplisitt, for relasjonell tenkende strategier. Videre skriver Empson & Levi (2011, s. 74) at elever som kan uttrykke et tall ved hjelp av andre tall og operasjoner på disse tallene, har en relasjonell forståelse av tallet. For eksempel, et barn som forstår at tallet 7 kan brytes ned til 3 og 4 kan bruke den forståelsen for å løse 6+7=n ved først å addere 6+4 for å få 10 og deretter addere 3 mer for å få n=13 (Empson & Levi, 2011, s. 74). Et annet eksempel kan være når et barn som forstår at 48 kan bli sett på som 4 tiere, og 8 enere, og at 44 er 4 tiere og 4 enere, kan bruke denne forståelsen for å addere 48 og 44 ved å kombinere tiere og enere, og deretter kombinere resultatet: 40+40 =80; 8+4=12; så 48 + 44 = 80 + 12=92 (Empson & Levi, 2011, s. 73). I begge eksempler bruker elevene forståelsen av hvordan en mengde kan uttrykkes gjennom andre mengder for å forenkle problemet og legge til rette for en løsning (Empson & Levi, 2011, s. 74).

Ifølge Empson & Levi (2011, s. 86) er nøkkelen til å hjelpe elvene å bygge en dyp forståelse av brøk og operasjoner på brøk å gjenkjenne og dyrke elevenes bruk av relasjonell tenkning. Empson & Levi (2011, s. 86) hevder at inngående forståelse av aritmetikk er preget av evnen til å bruke relasjonell tenkning for å gi mening om tall, operasjoner og ligninger. Å utvikle elevenes relasjonelle tenkning mens de lærer brøk integrerer kunnskapen deres om heltallsregning med brøkregning, og det legger et kritisk grunnlag for fremtidig algebralæring (Empson & Levi, 2011, s. 86).

Forskere skriver om forskjellen mellom aritmetikk og algebra. I aritmetikk kan vi ofte omgå egenskapene og forståelsen knyttet til den algebraiske strukturen og erstatte dem med en operasjonell tilnærming, i algebra viser disse egenskapene og forståelsen seg å være essensielle (Linchevski & Livneh, 1999). Aritmetisk bruk av bokstaver betyr at elever bruker bokstavene som midlertidige plassholdere for tall, ikke som matematiske objekt man kan operere med (Hackenberg & Lee, 2016). Algebraisk bruk av bokstaver betyr at elever ikke fokuserer på konkrete referanser, men kan opprettholde operasjonen med bokstaver som ukjente (Hackenberg & Lee, 2016).

2.2. Brøk

Tidligere forskning indikerer at det bare var elever som hadde gjennomgått tre nivåer av enheter og har tatt i betraktning en brøk som et konsept, som klarte å konstruere brøk som multiplikator av ukjente (Hackenberg & Lee, 2015). I denne forskningen skiller de tydelig mellom MC2 og MC3 elever, som handler om hvilket nivå elevene er på i forhold til multiplikative konsepter, hvordan elevene jobber med og forstår brøk. Det å representere og operere med multiplikasjon av ukjente er nødvendig for å skrive og løse ligninger når elever utvikler seg i å lære algebra (Hackenberg & Lee, 2015). Elever med ulike multiplikative konsepter jobber med multiplikasjon med ukjente på ulike måter, studien indikerer at multiplikasjonskonsept spiller en viktig rolle i disse forskjellene, og studiet kan hjelpe med å forklare skillet mellom aritmetisk og algebraisk bokstavbruk (Hackenberg & Lee, 2015). MC2 elevene, som jobber på det andre multiplikative konseptet, er avhengig av talleksempler for å skrive ligninger, og de klarer ikke å se tre nivåer av enhet når de jobber med brøk. MC3 elevene, som jobber med det tredje multiplikative konseptet, så ut til å bruke tallverdier for å forklare sine utsagn, noe som tilsier at MC2 og MC3 elever opererer på ulike nivå av abstraksjon når det gjelder multiplikasjon av ukjente (Hackenberg & Lee, 2016). Som et kjennetegn på det tredje multiplikative konseptet må eleven operere med og bytte mellom to ulike 3-nivå-av-enhet-strukturer (Hackenberg & Lee, 2016), de ser og kan jobbe videre med flere nivå av brøk.

Addisjon av hele tall og addisjon av brøk undervises isolert fra hverandre, og de undervises ofte mekanisk, uten referanse verken til de underliggende egenskapene eller prosessen med å bestemme hvordan og når en egenskap skal brukes (Empson et al., 2010). For eksempel, for å addere brøk lærer barn å først finne en fellesnevner og deretter addere de to tellerne; mange barn husker denne prosessen som en rekke trinn å utføre. De oppfordres ikke til å trekke på sin forståelse av distributiv egenskap, verken for å utlede eller forklare denne prosedyren. Mange barn er derfor ganske enkelt ikke forberedt senere på å eksplisitt trekke på de passende egenskapene for å rettferdiggjøre hvorfor 6a + 3a er 9a, men 6a + 3b ikke er 9ab (Empson & Levi, 2011, s. 88; Empson et al., 2010). Ifølge Empson et al. (2010) lærer barn aritmetikk med forståelse når de oppmuntres til å bruke og utvikle sin intuitive forståelse av egenskapene til tall og operasjon. Vanskeligheten med å lære brøk kan imidlertid ligge i hvordan brøk læres bort i stedet for hvor enkelt eller vanskelig de er å forstå (Empson et al., 2010). En konklusjon Empson et al. (2010) trekker fra forskningen sin er at brøk ikke er unødvendig vanskelig hvis undervisning utvikler barns evne til relasjonell tenkning.

Etterhvert som barns forståelse for brøkforholdene vokser begynner de å bruke deres forståelse i kombinasjon med de grunnleggende egenskapene til operasjoner og likhet for å tenke relasjonelt om addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon med brøk (Empson & Levi, 2011, s. 76).

Ifølge Gabriel et al. (2013) er bearbeiding av brøk en del av hverdagen vår og brukes i situasjoner som estimering av rabatter, å følge en oppskrift eller lese et kart. Dessuten skriver Gabriel et al (2013) at brøk spiller en nøkkelrolle i matematikk, siden det er involvert i sannsynlighet, proporsjonalitet og algebraisk resonnement. Hvorfor er det så vanskelig for elever å lære og representere brøk? Brøk har blitt brukt i århundrer og er manipulert i et stort utvalg av hverdagssituasjoner og i matematikk, og likevel er de vanskelige for elevene å forstå og mestre (Gabriel et al., 2013). Gabriel et al. (2013) skriver om typiske feil som vises i addisjons- eller subtraksjonsoppgaver (f.eks. $1/4 + 1/2 = 2/6$), og også i brøksammenligning (f.eks. $1/5 > 1/3$). I dette tilfellet kan elevenes resonnement gjenopptas som følger: hvis tallet er større, er størrelsen det representerer større. Men når vi tenker på brøk, betyr ikke en større nevner en større størrelse, men en mindre. En annen vanskelighet dukker opp i multiplikasjonsoppgaver. Multiplisering av naturlige tall fører alltid til et større svar, men det er ikke tilfelle med brøker (f.eks. $8 \times 1/4 = 2$) (Gabriel et al., 2013).

Gabriel et al. (2013), fant at barneskolebarn mestrer kategoriene del-hel og proporsjonalitet, men de sliter med å forstå brøk som tall. Ekvivalente og uekte brøk er svært vanskelig å forstå, og elevene ser ut til å bruke prosedyrer som de egentlig ikke forstår (Gabriel et al., 2013). Dette kan være knyttet til undervisningspraksis som tildeler mer tid og øvelser kun basert på prosedyrer (Gabriel et al., 2013). Selv om dette er et resultat for barneskoleelever, kan man undersøke om det kan følge elevene videre, dersom de blir vant til å jobbe på den måten, å bare huske prosedyrer, uten å forstå.

2.2.1. Forståelse og kunnskap i brøk

Det er flere forskere enn Skemp (1976) som deler ordet forståelse i to, Hiebert og Lefevre (1986) skriver om prosedural knowledge og conceptual knowledge. Ifølge Hiebert og Lefevre (1986) kan all kunnskap defineres som prosedural eller conceptual, de mener likevel at det er mulig å skille mellom de to og at det kan gi en måte å tolke læringsprosessen på som hjelper oss å bedre forstå elevers feil og suksess. Ifølge Hiebeert og Leffevre (1986) beskrives «conceptual knowledge» tydeligst som kunnskap som er rik på sammenhenger, et sammenhengende nettverk av kunnskap, der sammenhengene er like viktige som de enkelte delene av informasjon. Kunnskap om matematiske symboler og algoritmer, regler, for å ferdigstille matematiske oppgaver, og hvordan en bruker dem korrekt, kaller Hiebert og Lefevre (1986) for «prosedural knowledge».

Ifølge Van de Walle et al. (2019, s. 19) er både *prosedural* og *conceptual knowledge* grunnleggende for beregningsflyt og *conceptual* forståelse. Det å finne en likeverdig brøk kan referere til *prosedural knowledge*, mens det å gjenkjenne at en brøk $\frac{7}{9}$ er større enn $\frac{1}{2}$ ved å analysere forholdet mellom teller og nevner representerer *conceptual knowledge* (Van de Walle et al., 2019, s. 19). Forståelse kan være vanskelig å definere, men det kan forklares som et mål på kvalitet og kvantitet på sammenhenger som en ide har med eksiterende ideer (Van de Walle et al., 2019). I den grad en elev forstår hvorfor en algoritme fungerer eller forstår sammenhengen er deres dybde av forståelse (Van de Walle et al., 2019, s. 19).

En elev som bare kjenner til en prosedyre for å forenkle en brøk $\frac{4}{6}\ til\ \frac{2}{3}$ har ifølge Van de Walle et al. (2019, s. 20) en forståelse som er nær den instrumentelle enden av skalaen. Mens en elev som kan tegne diagrammer, vise eksempler og finne en rekke likeverdige brøker har en forståelse mot den relasjonelle enden av skalaen (Van de Walle et al., 2019, s. 20).

Ifølge Van de Walle et al. (2019, s. 22) er *conceptual understanding* et fleksibelt nett av sammenhenger og relasjoner innenfor og mellom ideer, tolkninger og bilder av matematiske begreper- en relasjonell forståelse. Elever med *conceptual understanding* vil koble det de vet om divisjon og tall og gi mening om skalering, priser og så videre, legge merke til hvor mye som er involvert i å ha en relasjonell forståelse (Van de Walle et al., 2019, s. 22). *Conceptual understanding* inkluderer ifølge Van de Walle et al. (2019, s. 22) nettverk av representasjoner og tolkninger av et konsept gjennom bruk av bilder, konkreter, tabeller, grafer ord osv.

Under relasjonell forståelse er målene ifølge Aksu (1997) å hjelpe elevene med å utvikle (a) *conceptual* kunnskap om matematikk, (b) *prosedural* kunnskap om matematikk, og (c) sammenhenger mellom *conseptual* og *prosedural* kunnskap.

Conceptual kunnskap refererer til å forstå sammenheng som er integrert eller koblet til andre matematiske ideer og konsepter (Aksu, 1997).

Prosedural kunnskap er kunnskapen om symbolikk som brukes til å representere matematikk og reglene og prosedyrene som brukes i matematikkoppgaver (Aksu, 1997).

Instrumentell forståelse, inkluderer aritmetikk, beregning og problemløsning uten koblinger til begreper eller en *conseptual* begrunnelse. Ifølge Aksu (1997) vet mange elever om, og bruker prosedyrereglene for å utføre operasjoner, som å multiplisere to brøker, men de kan ikke forklare hva $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$ betyr. En vanlig type feil ved å lære brøk er å la elevene begynne å beregne før de har tilstrekkelig bakgrunn til å tjene på slike operasjoner (Aksu, 1997). Reglene for brøkberegning kan ifølge Aksu (1997) være relativt enkle å undervise og lære.

2.2.2. Brøk og algebra

I matematikkutdanningen til ungdom er brøk og algebra kritiske komponenter, dessverre har elever vanligvis strevd i disse emnene (Brown & Quinn, 2007a). I matematikklivet til en elev er det minst tre kritiske prestasjoner: mestre ideen av ti som en enhet, forstå brøk og forstå konseptet av en ukjent (Brown & Quinn, 2007a). En kan se visse sammenhenger mellom algebra og brøk. Algebra er ifølge Brown & Quinn (2007a) fylt med eksempler som er direkte eller indirekte relatert til brøk, fra lineære ligninger til å fullføre firkanten, fra enkel sannsynligheter til binomial teorem, i algebra er det derfor ikke mulig å unngå brøk. Ifølge

Brown & Quinn (2007a) er det gjort omfattende forskning om brøk og algebra, mye som også handler om forholdet mellom de to viktige og vanskelige emnene, men det er ikke kommet noe endelig konklusjon. Selv om det var signifikante forhold mellom et individs evne til å forstå og utføre brøkoperasjoner og deres testresultater i algebra var ikke resultatene generaliserbare (Brown & Quinn, 2007b). Brown og Quinn sin studies resultater skulle være en påminnelse om at elevene må være bedre forberedt dersom det forventes at de skal prestere bedre i algebra og påfølgende matematikkurs, denne forberedelsen bør gjøre det mulig å bli dyktig med alle sider av brøkkonsepter (Brown & Quinn, 2007b). Brown & Quinn (2007b) hevder at hvis det er slik at algebra er for alle, må alle elvene først bli kjent med og jobbe flytende med brøk.

Ifølge Hackenberg & Lee (2016) er brøkkunnskap grunnlaget for typiske algebraemner, som hastighet og stigning i linjer, og fordi resonnement med brøk kan fremme bruk av bevissthet om matematiske egenskaper som er viktige i algebra.

Tidligere forskning viser at det er en sammenheng mellom brøk og algebra, men ifølge Booth et al, (2014) ser det ut til at den nøyaktige koblingen mellom brøkkunnskap og algebra er ukjent. En forståelse som er kritisk for utvikling av konseptet brøkekvivalens og proporsjonalitet, som kan spille en rolle i læring av algebra, er at brøkstørrelse er bestemt av forholdet mellom to tall (Booth et al., 2014). Funn om at brøkstørrelseskunnskap og ikke heltallstørrelseskunnskap er relatert til ferdigheter i algebra (Booth & Newton, 2012), ble gjenskapt i en annen studie også (Booth et al., 2014). Denne studien viste også at brøkstørrelseskunnskap er sett på som elevers forbedring i algebra (Booth et al., 2014). Disse funnene bekrefter at det er viktig for algebrakunnskap å ha et solid grunnlag av brøkkunnskap, de elevene som har bedre forståelse av brøkstørrelser når de begynner å studere algebra lærer mer enn jevnaldrende med dårligere brøkstørrelseskunnskaper (Booth et al., 2014). Men så er det forskning som har vist at når elever lærer algebra forbedres også brøkkunnskap (Booth et al., 2014). Det er interessant om det kan være en gjensidig avhengighet mellom brøk og algebra.

Den symbolske naturen til algebra utgjør en utfordring for elever, og noen vanlige forsøk på å gjøre algebra mer konkret kan virke mot sin hensikt (Booth & Newton, 2012). Ifølge Booth et al., (2012) er et viktig funn av forskningen på brøkkunnskap at barn relaterer brøk til deres kunnskap om hele tall. Gitt at brøker brukes mye i algebra og at suksess i algebra kan indikere forbedret brøkkunnskap, fokuserer deres studie på viktigheten av brøkkunnskap for algebraberedskap (Booth & Newton, 2012). Evnen til å regne med brøk dukker opp før ferdigheten med å bruke symboler for å representere brøker, akkurat som evnen til å regne med hele tall vises før ferdigheten med heltallssymboler (Booth & Newton, 2012).

En av studiene viser funn fra tidligere forskning om at elevenes brøkkunnskap er relatert til deres algebraiske kunnskap (Lee & Hackenberg, 2014). Mens andre forskere har funnet at kunnskap om rasjonelle tall, særlig brøk, er nært knyttet til senere suksess i algebra (DeWolf et al., 2015).

Ifølge Empson et al. (2011, s. xii) tjener de grunnleggende egenskapene til heltallsoperasjoner som grunnlag for å lære å addere, subtrahere, multiplisere og dividere brøker. Elevene skaper innsiktsfulle måter å løse brøkproblemer på ved å bruke disse egenskapene (Empson & Levi, 2011, s. xii). Elever lærer i hovedsak ved å løse problemer, ved å bruke grunnleggende tallegenskaper for å transformere problemer til enklere problemer som de har teknikker for å løse (Empson & Levi, 2011, s. xii). Tenkningen som elevene bruker for å løse disse problemene hjelper dem ikke bare i å lære brøkkonsepter og ferdigheter, men det engasjerer dem også i den typen tenkning de trenger for å lykkes i algebra og annen avansert matematikk (Empson & Levi, 2011, s. xii). Egenskapene som elevene bruker for å utvide brøkkunnskapen er grunnlaget for algebra (Empson & Levi, 2011, s. xii). I det lange løp gjør læring med forståelse læring enklere, mer effektiv, mer tilpasningsdyktig, lettere regulerbar og generelt bedre, og gir alle elever mulighet til å lære med forståelse er grunnleggende og et spørsmål om rettferdighet ifølge Empson & Levi (2011, s. xiii). Unnlatelse av å gjøre det dømmer noen elever til annenrangs utdanning og begrenser mulighetene deres (Empson & Levi, 2011, s. xiii).

Ifølge Booth & Newton (2012) tyder resultater fra deres studie på at det er kunnskap om brøkstørrelser – mer enn heltallsstørrelser – som er relatert til elevenes ferdigheter i tidlig algebra. Det bidrar til å tydeliggjøre hvilken rolle brøkkunnskap spiller i elevenes algebraprestasjon; det ser faktisk ut til at det er mer til algebraberedskap enn beregningsferdigheter med brøker, ettersom kunnskap om brøkstørrelse representerer en mer grunnleggende forståelse av brøk (Booth & Newton, 2012). Spesifikt synes elevenes kunnskap om størrelsen på enhetsbrøker å være spesielt viktig for algebraberedskap; ytelse på disse elementene var signifikant korrelert med funksjonskunnskap, ligningsløsning og ordproblemløsning (Booth & Newton, 2012). Ifølge Booth & Newton (2012) kan kunnskap om brøkstørrelse være viktig for algebra. Generelt er det mulig at kunnskap om brøkstørrelser er en bedre representasjon av dyp tallkunnskap enn kunnskap om hele tallstørrelser (Booth & Newton, 2012).

På grunn av at brøk er de første tallene med en intern relasjonsstruktur som elevene blir undervist, kan forståelse av brøk som relasjoner være en avgjørende antagelse for tidlig algebrasuksess (DeWolf et al., 2015). DeWolf et al.(2015) fant bevis på at relasjonell forståelse av brøk er sterke antagelser for algebraytelse. I tillegg mente de at de for første gang viste at et annet og distinkt aspekt ved brøkkunnskap – et mål for å forstå relasjoner som involverer brøker – gir et unikt bidrag til å forutsi algebraytelse (DeWolf et al., 2015). Til slutt i sin forskning skriver DeWolf et al. (2015) at lærere må kanskje fokusere på å fremheve sammenhengene mellom brøk og algebraiske uttrykk, og dermed utnytte de relasjonelle parallellene mellom disse to viktige områdene for matematisk kunnskap.

Rodriges et al. (2016), skriver om at tallinjer kan hjelpe elevene å se brøker som tall med størrelse, men selv om tallinjer hjelper elevene, kan denne representasjonen være for abstrakt for elever som har matematikkvansker (Rodrigues et al., 2016). De mente at en måte å støtte tallinjeforståelse på er å forankre den i en meningsfull kontekst, å introdusere tallinjeaktiviteter i virkelige kontekster gir et engasjerende miljø for å lære om brøker som størrelser (Rodrigues et al., 2016). Rodriges et al. (2016) mener at tallinjebaserte aktiviteter som fokuserer på forholdet mellom telleren og nevneren og hvordan dette forholdet bestemmer størrelsen på brøken, kan hjelpe elever som sliter med brøkforståelse. Ved muntlig telling av økende brøkstørrelser på en tallinje støttes elevenes brøktenkning (Rodrigues et al., 2016). Som eksemplet de gav i artikkelen sin; «Ved å telle oppover tallinjen fra 0 til 2, ser elevene at når telleren er mindre enn nevneren, er brøken mindre enn 1; når telleren er lik nevneren, er brøken lik 1; og når telleren er større enn nevneren, er brøken større enn 1» (Rodrigues et al., 2016). De mener også at elever ofte ikke har noen strategi for å tenke på brøkaddisjon og -subtraksjon, men at de i stedet stoler på en innlært prosedyre, å bevege seg langs tallinjen gir elever som sliter en konkret måte å tenke på brøkaddisjon og -subtraksjon (Rodrigues et al., 2016). Å fremme elevenes brøkkunnskap setter dem på en mer solid kurs mot algebrasuksess (Rodrigues et al., 2016). Ut fra dette kan man se at også Rodriges et al. (2016) mener det er en sammenheng mellom brøk og algebra.

Selv om det ser ut til å være en viktig kobling mellom brøkforståelse og algebraytelse, er naturen til denne koblingens ennå ikke fastslått mener DeWolf et al., (2015).

3. Metode

I dette kapitlet presenteres de metodiske valgene og vurderingene for studiet, for å besvare følgende problemstilling: «Hvilken sammenheng er det mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og deres prestasjoner i algebra?»

3.1. Vitenskapsteoretisk betraktning

Ifølge Postholm et al., (2018, s. 36) dreier ontologi seg om hva som er, og som dermed blir kjent for mennesker. Et grunnleggende syn vi har på et fenomens natur er det vi kan kalle et ontologisk spørsmål, som eksemplet; «Hva er egentlig en skole?» (Postholm et al., 2018, s. 36). Ontologiske teorier kan ifølge Johannessen et al., (2016, s. 50) ses på som forutsetninger om menneske og samfunn som vi tar for gitt i en undersøkelse. I forhold til ontologien undersøker prosjektet hva elevene gjør, altså svarer på spørreundersøkelsen. Ut fra resultatene kan det bygges opp teori og spekulasjoner, men man kan ikke gå tilbake for å se hvordan de har lært om brøk og algebra.

«Epistemologi handler om kunnskapens natur, det vil si hva vi egentlig kan vite om virkeligheten, og hvordan vi kan gå fram for å få kunnskap om samfunn og mennesker» (Johannessen et al., 2016, s. 51). Ulike epistemologier er positivisme, konstruktivisme og post-positivisme, de sier noe om hvordan vi kan få vitenskapelig kunnskap om virkeligheten (Postholm et al., 2018, s. 45). I all empirisk forskning er et grunnleggende utgangspunkt, en antakelse om at virkeligheten er noe som eksisterer uavhengig av den som forsker på virkeligheten (Postholm et al., 2018, s. 45). Ifølge Postholm et al., (2018, s. 52) er en helt sentral person i post-positivismen Karl Popper, som mente at virkeligheten kunne deles i tre ulike typer virkelighet; en fysisk, en mental og en bestående av objektiv kunnskap. Det vil i en klasse være et fysisk samspill mellom lærer og elev, som læreren vil reflektere over og danne seg sine meninger og oppfatninger om, som beskriver den mentale verden (Postholm et al., 2018, s. 52). Det Popper kaller verden bestående av objektiv kunnskap handler om at når utsagn er formulert, så er det mulig å undersøke empirisk om utsagnet er sant eller ikke, det kalles også empirisk realisme (Postholm et al., 2018, s. 52). Det konstruktivistiske synet at det er vanskelig, men ikke umulig, å få sann kunnskap om verden, støttes av post-positivismene (Postholm et al., 2018, s. 53). Samfunnet var en objektiv ting hevdet de på positivistisk side, og for å kunne frambringe sann kunnskap, burde samfunn og mennesker underkastes de samme forskningsidealene som det naturvitenskapen hadde arbeidet fram gjennom århundrer

(Postholm et al., 2018, s. 90). I forhold til epistemologien kan man ikke kan gå tilbake i tid for å observere hvordan elevene har lært om brøk og algebra. Eller hvordan lærerne har tilnærmet seg emnene i undervisningen. Men man kan gjøre en empirisk undersøkelse om det er sammenheng mellom brøkforståelse og prestasjoner i algebra hos ungdomsskoleelever. Ut fra elevenes svar på oppgavene kan en ikke vite noe, men bare gjøre antagelser, om hva de har lært og eventuelle misforståelser.

3.2. Forskningsdesign og -metode

Det er mange overveielser og valg som må gjøres når en undersøkelse skal gjennomføres (Johannessen et al., 2016, s. 69). For å beskrive hvordan prosjektet skal gjennomføres er det konstruert et forskningsdesign. Forskningsdesignet tar stilling til hva og hvem som skal undersøkes, og er strategien som ble lagt i en tidlig fase (Johannessen et al., 2016, s. 69).

«I kvantitativ metode skiller vi mellom tverrsnittsundersøkelser, longitudinelle undersøkelser, eksperimenter, kvasieksperimenter og evaluering» (Johannessen et al., 2016, s. 69). «En forsker starter med problemstillingen og vurderer hvordan det er mulig å gjennomføre undersøkelsen fra start til mål» (Johannessen et al., 2016, s. 69). Tidsdimensjonen er et sentralt kriterium for hvordan undersøkelsen gjennomføres, de kan gjennomføres på ett bestemt tidspunkt eller over lange perioder (Johannessen et al., 2016, s. 70). Betegnelsen tverrsnittsundersøkelse brukes for de undersøkelsene som gjennomføres på ett bestemt tidspunkt, longitudinelle undersøkelser brukes på undersøkelser som går over lange perioder (Johannessen et al., 2016, s. 70). Ettersom tidsrammen for prosjektet er satt til et halvt år, og ikke over lengre tid, foretas en tverrsnittstudie. Det innebærer at det benyttes data fra ett bestemt tidspunkt og gir ifølge Johannessen et al. (2016, s. 70), kun et øyeblikksbilde av det fenomenet som studeres.

Begrensinger ved tverrsnittdesign er at det kan være problematisk å avdekke årsakssammenhenger mellom fenomener, om et fenomen påvirkes av ett eller flere andre fenomener (Johannessen et al., 2016, s. 71). Begrenset tid og begrensede ressurser samt etiske hensyn, kan gjøre det lite gjennomførbart å ha longitudinelle eller eksperimentelle undersøkelser, noe som de fleste forskere nok ønsker å gjennomføre (Johannessen et al., 2016, s. 71). Når det kan påvises at en hendelse fører til at en annen hendelse inntreffer eller arter seg, snakker vi om årsakssammenheng (Johannessen et al., 2016, s. 304). Dersom man kan utelukke alternative forklaringer på at det er en sammenheng mellom to fenomener er årsakssammenhengen robust (Johannessen et al., 2016, s. 308).

I en korrelasjonsanalyse sier ikke tallene noe om hva som er årsak og hva som er virkning (Løvås, 2018, s. 429). Sammenhenger mellom variabler kan observeres/undersøkes, men det er ikke mulig å lese ut av dataene om den ene forklarer den andre, eller motsatt, eller om begge forklares av en tredje variabel (Løvås, 2018, s. 429). En positiv korrelasjon viser seg ved at enheter som har høye verdier på en variabel, også har høye verdier på den andre variabelen, og omvendt (Johannessen et al., 2016, s. 301). En negativ korrelasjon viser seg i at høye verdier på den ene variabelen kan gå sammen med lave på den andre, eller lave på den ene og høye på den andre variabelen (Johannessen et al., 2016, s. 301).

I de fleste tilfeller vil forskere som anvender kvantitativ metode, definere seg innenfor et (post) positivistisk paradigme (Postholm et al., 2018, s. 91). I opplysningstiden ble kvantitative undersøkelser standarden for naturvitenskapen, målet var å finne generelle lover som kunne gjelde for alt i den fysiske verden (Postholm et al., 2018, s. 93).Ved en induktiv tilnærming går forskeren fra «empiri til teori» (Postholm et al., 2018, s. 101). Ifølge Postholm et al. (2018, s. 103) går forskeren fra teori til empiri ved en deduktiv tilnærming. I utgangspunktet er det ikke mulig å være rent deduktiv eller induktiv, det er umulig å kun forholde seg til teori, fordi teorien ofte kommer som følge av at man tidligere har observert noe (Postholm et al., 2018, s. 102). Forskningen kan ikke være fullstendig induktiv fordi forskeren bringer med seg sin egen subjektive, individuelle teori inn i forskningen (Postholm et al., 2018, s. 102). Ifølge Postholm et al. (2018, s. 102) er abduksjon en fleksibel tilnærming, utgangspunktet er at all vitenskapelig tenkning starter med observasjoner, som skaper spørsmål. Spekulasjoner om hvordan problemet ser ut, og hva som er problemets årsak starter av at spørsmålet blir sett på som et problem som må løses, som igjen fører til antagelser eller hypoteser (Postholm et al., 2018, s. 102). Antagelsene er et uttrykk for hvilke funn forskeren tror forskningen vil resultere i, altså forskerens subjektivitet (Postholm et al., 2018, s. 102). En kontinuerlig veksling mellom teori og empiri, der ingen av de kan sies å ha forrang kalles abduksjon (Postholm et al., 2018, s. 103).

Denne forskningen vil ha en tilnærming som er mellom deduktiv og abduktiv tilnærming, da jeg obersverte at elever på ungdomsskolen hadde svake prestasjoner i algebra på TIMSS undersøkelsen fra 2015 (Bergem, 2016, s. 22), og leste teori som handlet om sammenhengen mellom brøk og algebra. Det er ikke sikkert hva som kom først, både teori, spørsmål og hypotese har gått hånd i hånd, mens empiri ble samlet etter hvert. Spørreskjema ble først ferdigstillt og tidspunkter med skoler/rektorer ble avtalt.

Kvantitative metoder er kort sagt basert på at informasjon om virkeligheten formidles ved hjelp av tall (Postholm et al., 2018, s. 89). Fordelen ved å velge kvantitativ metode er at det er mulighet for å undersøke et stort utvalg, og man får et grunnlag som en kan se videre på. Det er en styrke at kvantitativ metode kan tallfeste hvilke oppgaver innen brøk og algebra deltakerne får til. Fenomener kan studeres nøye og med stor presisjon ved å samle inn empiri i form av tall (Postholm et al., 2018, s. 99). Ved å kvantifisere fenomener gjennom ulike former for tester eller spørreskjema kan dette gjøres (Postholm et al., 2018, s. 99). Statistiske metoder kan i tillegg hjelpe oss med å håndtere store mengder informasjon, som igjen øker muligheter for at kunnskapen blir mulig å slå sammen eller gruppere (Postholm et al., 2018, s. 99). Kunnskapen blir mer overførbar og generaliserbar siden tall ikke er åpne for fortolkninger (Postholm et al., 2018, s. 99). Kvantitative data omkodes til tall, mens informasjon i form av ord kalles kvalitative data (Postholm et al., 2018, s. 99-100). «Kvantitative tall er tall som har mening i seg selv, f.eks. år (alder) eller kilo (vekt)» (Postholm et al., 2018, s. 100). I dette forskningsprosjektet ble svarene fra deltakerne omkodet til tall.

Kvalitative metoder innhenter informasjon om virkeligheten gjennom ord eller språk (Postholm et al., 2018, s. 89). Fordelene ved bruk av kvalitativ metode er at en undersøker et lite utvalg, og man kan få vite mer om hva de tenker og hvorfor. Dermed kan en få et bedre svar på om deltakerne sitter med forståelse om temaet og hvilken forståelse. Dersom deltakerne gjør en feil i utregningene, kan en stille spørsmål hva de har tenkt, og raskt finne ut om det er en misforståelse eller om det bare er skrivefeil. Ser man på kvalitativ forskning fra en fenomenologisk vinkel kan den verdsettes som dybdeforståelse av et fenomen (Nyeng, 2012).

Dybdeforståelse vil være vanskelig å måle i et spørreskjema. Men dersom en skal undersøke et større utvalg, vil en ulempe med kvalitativ metode være at det blir et veldig stort arbeid med å bearbeide intervjudata, og dette prosjektet har en begrensing i tid. En kvantitativ metode, ved bruk av spørreskjema og oppgaver, gir meg best svar på problemsstillingen min. Ut fra besvarelsene, vil jeg se om deltakerne får til oppgavene. Tanken er at elevene forstår konteksten ved å få til tekstoppgavene, og om de klarer å løse algebraoppgavene. Deretter analyseres resultatene, for å se om det er en sammenheng mellom forståelse i brøk og prestasjoner i algebra. På denne måten produseres det meningsfulle tallmaterialer, som kan undersøkes statistisk. Det er meningsfullt å tallfeste hvor mange oppgaver innen brøk og algebra deltakerne får til. En svakhet/begrensning ved denne metoden kan være at jeg ikke får svar på hvilke tankeprosesser elevene går gjennom når de løser oppgavene. Man kan stille seg spørsmålet om det vil svare på begrepet forståelse i problemstillingen. Men dette er noe en kan diskutere i diskusjonsdelen, hva som blir besvart eller ikke. Håpet er å få gjennomført studien på så mange som 100-120 deltakere, da vil problemstillingen min bli besvart, så kan et videre arbeid være å se nærmere på enkelte oppgaver i forhold til det man ikke får svar på. Dette er også noe man får bedre innblikk i når prosessen med å analysere resultatene starter.

Forskningsdesignet i denne oppgaven er en kvantitativ studie med spørreundersøkelse for datainnsamling, dermed må det antas at man kan måle abstrakte begreper som i denne oppgaven vil være forståelse.

Etter at data ble samlet inn, ble resultatene lest av, tolket og analysert. Resultatene ble lest av og kodet om til tall. Resultatene ble tolket i forhold til hva som er riktige og gale svar, hvilke oppgaver som får poeng eller ikke. Data ble analysert i analyseverktøyet SPSS ved bruk av krysstabell, korrelasjonsanalyse og One-Way ANOVA.

3.3. Datainnsamling

Datainnsamlingen ble gjort manuelt, spørreskjemaet er anonymt og ble gjennomført med penn og papir. For å skaffe deltakere på 8.- og 9.trinn ble rektorer på fire ungdomsskoler kontaktet. Deltakerne fikk utdelt spørreundersøkelsen, det var fem ulike oppsett av spørreundersøkelsen, og det var tilfeldig hvem i klasserommet som fikk hvilket oppsett. Grunnen til at det var fem ulike versjoner av spørreundersøkelsen var fordi rekkefølgen på oppgavene ikke skulle påvirke resultatene. Jeg møtte opp personlig og delte ut spørreskjema til alle deltakere som selv ønsket å delta. Bakgrunnen for valget av personlig oppmøte var for å informere om hvorfor undersøkelsen skulle gjennomføres og for å kunne svare på eventuelle spørsmål de skulle ha. I tillegg var tanken at det var lettere å få deltakere dersom forskeren møter opp personlig. Håpet var at deltakerne skulle rekke å gjennomføre spørreundersøkelsen på 40-45min, og at undersøkelsen ble samlet inn når skoletimen var ferdig.

For å få flest mulig ungdommer til å delta på undersøkelsen tror jeg det er veldig viktig at de er anonyme. Det kan kanskje også være lettere å få rektor og lærere til å delta i prosjektet, da det ikke er så mye som må ordnes fra deres side på forhånd. Det må ikke innhentes samtykkeskjema, det er ingen forberedelser skolen må gjøre, annet enn at de må frigi tid i klasserommet for undersøkelsen.

Undersøkelsen ble gjennomført med et spørreskjema som består av oppgaver i brøk og algebra, uten personalia, verken navn eller alder, så deltakerne er anonyme.

3.4. Populasjon og utvalg

Populasjonen består av elever som undervises i matematikk på 8. og 9. trinn, bosatt i Nordland fylke. Utvalgsprosessen ble gjennomført ved å kontakte rektorer på fire ulike skoler.

Utvalget består av elever fra fire ulike skoler, fire klasser fra 8.trinn og fire klasser fra 9.trinn, som tilsvarer totalt 102 elever.

I en situasjon der mange masterstudenter i landet skal ut å samle empiri rundt samme tidspunkt, falt utvelgelsesstrategivalget på bekvemmelighetsutvelgelse. Når forskeren gjør det som er enklest og mest bekvemmelig er det en bekvemmelighetsutvelgelse (Johannessen et al., 2016, s. 120). Dette er den minst ønskelige formen for strategi ifølge Johannessen et al (2016, s. 120). Men i denne studien ble det likevel valgt på denne måten for å kunne samle informanter. Det kan være lettere å få skoler til å delta i prosjektet når forskeren selv møter opp for å gjennomføre undersøkelsen. Det ble enklest og mest bekvemmelig å velge populasjon fra Nordland fylke, da en ikke har mulighet til å reise over hele landet for å skaffe deltakere, verken tidsmessig eller økonomisk. En annen faktor som spiller inn i dette er at det er mange masterstudenter som ønsker informanter i samme tidsrom, altså kan det være vanskelig å skaffe nok informanter.

Valget med å gjennomføre undersøkelsen på ungdomsskole var fordi det er etter 8.trinn at algebra står spesifikt nevnt i læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Grunnen til valget med at elever på 10. trinn ikke skal delta i undersøkelsen, er at det ikke står verken brøk eller algebra i læreplanen etter 10. trinn. Brøk og algebra står heller ikke etter 9.trinn i læreplanen, noe som gjør at det er en mulighet for at det er lengre siden elevene på 10. trinn har jobbet med brøk og algebra. Det er også viktig å tenke på at elevene på 10.trinn ofte jobber opp mot eksamen på vårsemesteret og kanskje ikke helt ser seg tid til å delta i et slikt prosjekt. Ut fra læreplanen i matematikk kan man se at det står skrevet både om brøk og algebra under læreplanmålene etter endt 7.- og 8.-trinn (Utdanningsdirektoratet, 2020), derfor er tanken at både 8.- og 9.trinns elever fortsatt har både brøk og algebra friskt i minne.

Tabell 1. Deltakernes kjønn

Deltakere	Antall
Gutter	45
Jenter	56
Annet	1
Totalt	102

Tabell 1 viser fordelingen av deltakernes kjønn. Forventningen til antall deltakere ut fra klassestørrelser i de aktuelle ungdomsskolene, var 140 deltakere, med forbehold om at enkelte elever ikke ønsket å delta. Men grunnet Covid-19 pandemien og lavere terskel for å være hjemme pga. forkjølelsessymptomer, var det mye fravær i klassene studien ble gjennomført i. Det ble totalt 104 deltakere i studien, to deltakere ble fjernet da de brukte kalkulator og regelbok eller fikk hjelp. Det skulle ikke brukes hjelpemidler til denne undersøkelsen.

3.5. Spørreskjema

For å planlegge gjennomføringen av datainnsamlingen ble det tatt utgangspunkt i følgende tre elementer a) det vi ønsker å måle må konkretiseres, b) spørsmålene må utformes så korrekt som mulig, slik at ikke spørsmålsutformingen skaper misforståelser og uønskede resultater, og c) bestemme hvordan spørreundersøkelsen skal gjennomføres (Postholm et al., 2018, s. 167). Spørsmål om kjønn er med i spørreskjema, fordi da kan man eventuelt i analysen sammenligne eventuelle kjønnsforskjeller. Det kan gi noen flere muligheter. Planen var å gi spørreskjemaet med oppgavene i ulike rekkefølger. Det blir 5 ulike spørreskjema, den eneste forskjellen er rekkefølgen på oppgavene, oppgavesett 1 ligger vedlagt oppgaven, vedlegg 2. Oppgavesettene ble delt ut tilfeldig i et og samme klasserom, det var tilfeldig hvilke elever som fikk de ulike oppsettene. Dette ble gjort for å sikre at rekkefølgen i oppgavene ikke blir en feilkilde. At ikke deltakerne ser at det bare blir vanskeligere og vanskeligere igjennom hele spørreskjema, og eventuelt gir opp.

3.5.1. Forberedelse til spørreskjema

For å finne riktige oppgaver til spørreskjema, er det tatt utgangspunkt i to artikler.

Oppgavene ble laget i samme struktur, men måtte justeres litt for å passe til norsk kontekst, da forskningen som følges er gjennomført i USA. Mye forskning er lest for å finne riktige oppgaver, som kan teste akkurat det studien er ute etter å teste, for å få svar på min problemstilling. Til slutt falt valget på to artikler som er ekstra relevant i forhold til dette, det er både Ginther et al. (1976) og Brown & Quinn (2007b) sine artikler.

3.5.2. Valg av oppgaver

Oppgavene ble valgt ut med inspirasjon fra to artikler som er lest, i hovedsak artikkelen til Ginther et al. (1976), og noen tekstoppgaver er hentet fra en annen artikkel, som er Brown & Quinn (2007b) sin artikkel om sammenheng mellom brøk og algebra. Valget med å ha variasjon i oppgavene er fordi det er viktig når man skal måle forståelse. Det er både regneoperasjoner, tallinje og figurer i oppgavesettet.

Ginther et al. (1976) var den artikkelen som i hovedsak ble brukt som inspirasjon når oppgavene skulle velges, det var for det meste vist eksempler på oppgaver i brøk, med noen oppgaver med innslag av algebra. I artikkelen av Ginther et al. (1976) har de lagd oppgaver for å teste beregning, forståelse og bruk, denne studiens deltakere var elever fra 8.klasse. Oppgavene som er valgt til denne studien har samme struktur, mens noen er samme oppgaver, som bare er endret til norsk kontekst. Brown & Quinn (2007b) testet sammenheng mellom brøkferdighet og suksess i algebra, og refererte til Ginther et al. (1976) sin artikkel i oppgavene de brukte. De har også brukt egne oppgaver, i studien har de forklart tydelig hvorfor de har valgt oppgavene og hva de tester (Brown & Quinn, 2007b), derfor var dette også en artikkel som var relevant når oppgavene ble valgt.

Valg av oppgaver ble en viktig faktor for å kunne undersøke om det er en sammenheng mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og algebra. Det ble valgt oppgaver innenfor temaet brøk og algebra, samt oppgaver som tester instrumentell- og relasjonell forståelse av brøk. Totalt ble det valgt 9 oppgaver, derav 2-3 deloppgaver, totalt 20 oppgaver i oppgavesettet. Oppgave 1-8 er brøkoppgaver og oppgave 9 er algebraoppgaver.

Det ble hentet inspirasjon til oppgave 1-4 fra artikkelen av Ginther et al. (1976), i artikkelen er disse oppgavene kategorisert som at de måler beregning. Oppgave 1-4 ble valgt for å undersøke om elevene har instrumentell forståelse innenfor brøk. Disse oppgavene tester ikke om elevene har relasjonell forståelse, men om elevene mestrer brøkreglene (addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon av brøk). Oppgave 5, 6 og 7 kommer også fra inspirasjon fra Ginther et al. (1976), som beskriver disse oppgavene som at de måler forståelse. Oppgave 5 kategoriseres som at den tester relasjonell forståelse av brøk, fordi elevene må forstå det multiplikative forholdet av invers brøk (Empson & Levi, 2011, s. 3-4, 75). Siden det er en tom boks kommer den relasjonelle forståelsen inn og elevene må forstå sammenhengen med den inverse brøk, for å sette inn riktig tall ut fra tallet som står i regneoperasjonen. I oppgave 6 må elevene forstå at brøkstørrelse er bestemt av forholdet mellom to tall (Booth et al., 2014; Gabriel et al., 2013), for å kunne plassere brøken riktig på tallinjen. I oppgave 7 må elevene kunne se sammenhengen mellom brøk og geometriske figurer for å kunne velge riktig brøk til riktig figur (Ginther et al., 1976). De to tekstoppgavene, oppgave 8a og 8b, er hentet fra artikkelen til Brown & Quinn (2007b) som handler om sammenheng mellom brøk og algebra. Elevene må kunne se sammenheng mellom teksten og brøkene for å kunne løse disse tekstoppgavene, derfor er oppgavene kategorisert som at de måler relasjonell forståelse. Elevene må forstå hva og hvorfor for å kunne løse tekstoppgavene. Ifølge Skemps (1976) definisjon på relasjonell forståelse, måler oppgave 5-8 om eleven vet hva en skal gjøre og hvorfor. For å kunne få riktig svar på disse oppgavene er det altså ikke tilstrekkelig å bare kunne regler uten å resonere (instrumentell forståelse).

Oppgave 9 er algebraoppgaver som ble valgt ut fra inspirasjon av artikkelen til Brown & Quinn (2007b), det er også hentet inspirasjon fra en lærebok i matematikk for 8.trinn (Tofteberg et al., 2020).

Tanken er at det er slik at elever ikke må ha en relasjonell forståelse for å kunne løse 9a,9b, 9c og 9d, de kan klare å løse disse oppgavene ut fra instrumentell forståelse. Disse oppgavene handler om regneregler, som regnerekkefølge, addisjon og subtraksjon med brøk og ukjent, også med parentes i regnestykke. Dermed kan elevene løse disse oppgavene med kun instrumentell forståelse. Og hele oppgave 9 er derfor kategorisert som at den måler riktig eller galt svar ved å løse ligninger. Det som måles av oppgave 9 blir dermed prestasjon i algebra, om elevene får riktig eller galt svar på algebraoppgavene.

Det ble valgt å ha variasjon i oppgavene i oppgavesettet fordi det er viktig når man skal måle forståelse. Det er både regneoperasjoner, tallinje og figurer i oppgavesettet.

Da oppgaver ble valgt var tanken at det er viktig å ikke velge for vanskelige oppgaver som ingen får til, men heller ikke for lette oppgaver som alle får til. Dette er en balansegang som kan være hårfin. Derfor er det oppgaver i ulike vanskelighetsgrader under ulike operasjoner. For å sikre dette valgte jeg å pilotere spørreundersøkelsen, den ble gjennomført av tre elever først, for å sjekke vanskelighetsgrad og tidsbruk på undersøkelsen. Da endringene på oppgavene var ferdig ble det startet på selve undersøkelsen, først på en liten skoleklasse, for å nok en gang sikre tidsbruk og vanskelighetsgrad. Siden surveyen ble pilotert på denne måten var tanken at oppgavene var bedre i forhold til både vanskelighetsgrad og tidsbruk før undersøkelsen startet.

3.6. Vurdering av studiens kvalitet

Herunder beskrives begrepene validitet, reliabilitet og generaliserbarhet/overførbarhet.

3.6.1. Validitet

Validitet henviser til forskningens gyldighet, hva slags konklusjoner en forsker egentlig har dekning for å trekke ut fra de data han eller hun har samlet inn (Postholm et al., 2018, s. 222). Ifølge Postholm et al., (2018, s. 223) deles validitet inn i to typer; indre og ytre gyldighet.

Indre validitet handler om de konklusjonene vi trekker er gyldige for de eller det vi har studert (Postholm et al., 2018, s. 223), mer konkret vil dette igjen dreie seg om to forhold. Det ene er årsaksgyldighet som er knyttet til å trekke slutninger om årsak og virkning, hvor sikre kan vi være på at noe er en årsak og noe annet er en virkning? (Postholm et al., 2018, s. 223). Det andre er knyttet til om vi gjennom datainnsamlingen har målt det vi sier eller tror vi har målt, dette kalles begrepsmessig gyldighet/validitet (Postholm et al., 2018, s. 223). Begrepsvaliditet handler om at man måler det man ønsker å måle (Nyeng, 2012, s. 109). Begrepsvaliditet handler ifølge Høgheim (2020, s. 81) om hvor sikker vi er på at forskningen fanger det begrepet vi sier at vi forsker på. I en studies samlede troverdighet inngår alle disse begrepene som kriterier, både indre og ytre gyldighet og pålitelighet (Postholm et al., 2018, s. 223).

Validitet handler i kvantitative undersøkelser om vi måler det vi tror vi måler, om det er en sammenheng mellom det fenomenet som undersøkes og de dataene som er samlet inn (Johannessen et al., 2016, s. 230). Begrepsvaliditet handler om at man undersøker det man ønsker å undersøke, og ikke noe annet, at man observerer det man ønsker å observere (Nyeng, 2012, s. 109). Ifølge Nyeng (2012, s. 114) har man i kvalitativ forskning et ambivalent forhold til validitet, fordi det i så stor grad er formet av det kvantitative positivistiske forskningsparadigme. I kvantitativ forskning handler det om at spørreskjema har gode spørsmål som gir svar på det man ønsker å undersøke.

For å styrke studiens validitet ble det valgt å bruke samme struktur på oppgavene som i artikkelen til Ginther et al. (1976). Det ble også gjennomført en pilotundersøkelse, noe som er med på å styrke studiens validitet.

Elevenes dagsform kan ha stor betydning for måten de svarer på oppgavene. Dersom de har en god dagsform, kan de være mer motiverte for å gjennomføre spørreundersøkelsen. De er muligens også mer motiverte til å gjøre sitt beste. Tidspunktet for gjennomføring av undersøkelsen kan også ha betydning for resultatet. Det kan være vanskeligere å få elever til å delta på spørreundersøkelsen på slutten av dagen på slutten av uka. Det kan også være vanskeligere å få de motiverte til å delta dersom undersøkelsen gjennomføres mandag morgen.

Rekkefølgen på oppgavene kan være en feilkilde, for å begrense denne feilkilden ble det delt ut ulike oppgavesett. Det kan være lite motiverende for elever dersom de ser at oppgavene står i rekkefølge etter vanskelighetsgrad, da kan de miste motet etter hvert. Dette er noe som kan påvirke resultatet, og det er viktig å tenke over at rekkefølgen på oppgavene kan ha betydning. Tidsbruk på oppgavene kan ha betydning for resultatet, dersom undersøkelsen tar veldig lang tid kan noen elever bli lei og ikke orke å gjøre alt ferdig, og de siste kan eventuelt bli forstyrret av elever som gjør seg raskt ferdig. I dette prosjektet var planen at undersøkelsen skulle gjennomføres på en skoletime som er ca. 45minutter. Etter pilotundersøkelsen så det ut som at det skulle være nok tid for elevene, nok tid til å ha flere oppgaver, og god variasjon i oppgavene for å se om det er sammenheng mellom brøk- og algebraoppgavene. Valgene som ble gjort i forhold til rekkefølge på oppgavene og tidsbruk har betydning for studiens validitet.

For å få flest mulig ungdommer til å stille opp på denne undersøkelsen tror jeg at er veldig viktig at deltakerne er anonyme. Tanken var at det kan virke skummelt for ungdomsskoleelever som er litt usikre, dersom andre kan se hvilke oppgaver de har fått til eller ikke fått til. Derfor kan det være ekstra viktig for dem å være anonyme. En annen faktor er at enkelte elever kan føle seg mer fri til å prøve å gjøre matematikkoppgaver når de vet at de er helt anonyme.

3.6.2. Reliabilitet

Reliabilitet kommer fra det engelske ordet reliability, som betyr pålitelighet (Johannessen et al., 2016, s. 36). Reliabilitet er ifølge Nyeng (2012, s. 105) bare en av betingelsene for at en empirisk undersøkelse skal ha høy kvalitet. Reliabilitet er en nødvendig men ikke en tilstrekkelig betingelse for god forskning (Nyeng, 2012, s. 105). Reliabilitet kan også kalles nøyaktighet eller målesikkerhet, det handler om dataene dine er til å stole på eller om de er tillitsvekkende, hvor robust en undersøkelse er (Nyeng, 2012, s. 105). Det handler om nøyaktigheten til undersøkelsens data som brukes, måten data samles inn på, og hvordan de bearbeides (Johannessen et al., 2016, s. 36). Et viktig stikkord som kommer inn under forskningens reliabilitet er etterprøvbarhet (Bratberg, 2021, s. 75).

En måte å teste undersøkelsens reliabilitet på, er å gjenta samme undersøkelsen på samme gruppe på to forskjellige tidspunkter, dersom resultatene blir de samme er det er tegn på høy reliabilitet (Johannessen et al., 2016, s. 36). Ifølge Postholm et al., (2018, s. 224) blir studien mer sann dersom funnene i den gjentatte studien blir de samme. Reliabilitet handler også om at forskeren skal reflektere over hvordan undersøkelsen og forskeren kan ha påvirket resultatet (Postholm et al., 2018, s. 224).

I denne studien falt valget på å selv møte opp og være til stede når studien gjennomføres. Dette kan ha både fordeler og ulemper. Det kan gjøre det lettere å få flere deltakere ved å møte opp personlig, da det ikke blir så mye ekstraarbeid på lærerne i klassene som skal delta. Men det kan også påvirke resultatet som kommer fra undersøkelsen, kanskje blir noen av elevene nervøse av å ha ukjente i klasserommet, kanskje er det noen elever som syns det er ubehagelig og dermed ikke ønsker å delta. Dette er feilkilder en må være bevisst når man tar disse valgene. Spørreundersøkelsen i seg selv kan også påvirke resultatet av studien. Det er ikke sikkert alle elever håndterer like godt å få en «prøve» utlevert uten å ha fått informasjon om det på forhånd. Derfor er det viktig å informere elevene om at dette ikke har betydning for deres karakter i faget. Det kan også være at denne oppgavebaserte undersøkelsen skremmer noen av elevene, det kan kanskje virke som mange oppgaver når de først ser heftet.

En måte å styrke studiens reliabilitet på er å få med flest mulig deltakere. Samtidig er det viktig å huske at dette er masteroppgave som har begrensning i både tid og ressurser.

En svakhet ved denne studien er at deltakere som kanskje forstår brøk og algebra kan ha fått feil svar. Slurvefeil som f.eks. feil avskriving fra oppgaven eller små regnefeil vil ikke oppdages ved å bare se på om deltakere har fått riktig eller feil svar. Noen deltakere kan også ha fått riktig svar selv om ikke forståelsen er til stede.

3.6.3. Generaliserbarhet/overførbarhet

Generaliserbarhet handler om hvorvidt man kan trekke slutninger som går ut over det utvalget man faktisk forsker på (Høgheim, 2020, s. 82). Overførbarhet går på i hvilke grad funn fra en kontekst kan overføres- eller generaliseres- til andre kontekster som ikke er studert (Postholm et al., 2018, s. 238). Det er ifølge Postholm et al., (2018, s. 238) viktig at forskeren skriver slik at leseren opplever at han eller hun blir invitert inn i forskningsprosessen som er gjennomført, dette er viktig for at overførbarheten skal styrkes. Det forstås som at forskeren skal beskrive forskningen for å gjøre arbeidet transparent, for å fremme studiens overførbarhet til andre lignende settinger (Postholm et al., 2018, s. 238). Hvorvidt det lykkes en å etablere beskrivelser, begreper, fortolkninger og forklaringer som er nyttige på andre områder enn det som studeres, det er det overførbarhet handler om (Johannessen et al., 2016, s. 231), og vil bli drøftet avslutningsvis.

3.7. Forskningsetikk

Når man planlegger forskningen sin skal man ikke bare planlegge ut fra formålet med undersøkelsen og hensyn til validitet, man skal også ivareta forskningsetikk (Høgheim, 2020, s. 80). Forskningsetikk handler blant annet om behovene, rettighetene, menneskeverdet og personvernet til de som deltar i forskningen (Høgheim, 2020, s. 80). Ifølge Høgheim (2020) er det ikke nødvendig å melde prosjektet dersom forskeren kun skal behandle anonyme opplysninger. Dette stemmer godt med det som står skrevet på NSD sine sider om dette (Norsk senter for forskningsdata, u.å.). Det samles ikke inn noen form for personopplysninger i denne studien, viser til vedlegg 1 som er et skjermbilde av mine svar om personopplysninger inne på NSD sin nettside. I forhold til det forskningsetiske, og søknad om tillatelser er det ikke nødvendig for denne studien å sende inn meldeskjema, det er bare for prosjekter som skal håndtere personopplysninger (Norsk senter for forskningsdata, u.å.). Inne på nettsiden til NSD står det under: «Hvordan gjennomføre et prosjekt uten å behandle personopplysninger?» «Spørreskjemaer innhentes i papirform, uten navn og indirekte identifiserende opplysninger» (Norsk senter for forskningsdata, u.å.).

Jeg skal møte opp personlig for å gjennomføre undersøkelsen. Et etisk dilemma som da kan oppstå kan være at elevene føler seg tvunget til å delta når forskeren selv står i klasserommet. Det ble informert at denne studien er helt frivillig å delta i, og at resultatene kun er ute etter å vise hva elevene kan, ikke hva de ikke kan. Og at dette ikke kommer til å påvirke deres karakter i matematikkfaget. Men også at det er anonymt, ingen skal skrive navn eller klassetrinn på noen av arkene. Det er viktig at de vet at det er anonymt, for at de ikke skal bli redde for å delta, men samtidig må man tenke på hvordan man skal informere om undersøkelsen for at ikke noen skal føle seg presset til å delta. Noen elever ønsker kanskje ikke å delta. Alle som ønsker det, skal få utlevert spørreskjema, så er det opp til elevene selv om de ønsker å levere det tilbake til meg (altså å delta i undersøkelsen). I denne studien skal det bare være de elevene som ønsker å delta som deltar. Dersom de først ønsker å delta, men trekker seg før de har levert tilbake spørreskjema er det helt greit, dette blir elevene informert om. Siden denne undersøkelsen gjøres med penn og papir og ikke har noen personopplysninger kan det vise seg vanskelig dersom noen elever skulle trekke seg etter at de har levert inn spørreskjema, det kan vise seg som en svakhet med denne formen for undersøkelse.

Når det gjelder å innhente samtykkeskjema, er ikke det nødvendig. Hvis deltakerne kan identifiseres må de samtykke om å delta i undersøkelsen (Johannessen et al., 2016). I denne undersøkelsen kan ingen deltakere identifiseres, da det kun blir spørsmål om kjønn, ingen annen personopplysninger blir skrevet på papiret. «At et samtykke er informert betyr at de som skal delta skal ha nødvendige opplysninger om undersøkelsen» (Johannessen et al., 2016, s. 90). Selv om det ikke skal innhentes samtykke i samme forstand, så er det likevel veldig viktig at deltakerne får god informasjon om hva de deltar på, at de får de nødvendige opplysninger om undersøkelsen.

3.8. Analysemetode

Analysemetodene som ble brukt ble gjennomført i statistikkprogrammet SPSS, versjon 27. SPSS står for Statistical Package for the Social Science, programmet ble utviklet for statistisk analyse innenfor samfunnsvitenskapene (Høgheim, 2020, s. 179).

Det ble startet med å rette oppgavene i spørreundersøkelsene og det ble skrevet inn i EXCEL, om deltakerne hadde fått riktig eller feil etter hver oppgave. Denne kodingen kunne man også gjort i SPSS, men siden ønsket var å kommentere underveis i prosessen ble det foretatt i EXCEL. Det ble gått gjennom besvarelsene til hver enkelt deltaker to ganger for å redusere risiko for feilkoding inn i EXCEL. De deltakerne som fikk riktig svar på oppgavene, ble kodet riktig inn i EXCEL. De elevene som fikk feil svar på oppgavene, ble kodet feil, både de elevene som hadde feil avskriving og følgefeil ble kodet feil. Denne EXCEL-filen ble åpnet i statistikkprogrammet SPSS og ble kodet om til 0 (feil) og 1 (riktig). Dersom eleven har fått feil svar eller har manglende svar i oppgaven får eleven 0 poeng. 1 poeng representerer riktig svar på oppgaven. De totale gjennomsnittspoengene som er mulig å oppnå er 1, da er alt riktig. I denne studien ble resultatene fra undersøkelsen, riktig eller feil, kodet om til 0 og 1 poeng. Dermed er det bare to verdier, og det kan betegnes som dikotome variabler. Det er ikke helt enkelt å bestemme målenivå med dikotome variabler (Johannessen et al., 2016, s. 256). Filen med kodene 1 og 0, for riktig og feil ble lagret både i EXCEL og i SPSS. Gjennomsnittpoeng til hver enkelt deltaker ble regnet ut i EXCEL.

Oppgavene ble delt inn i kategorier etter oppgavesett 1, som er vedlegg 2, oppgave 1-8 er brøkoppgaver og oppgave 9 er algebraoppgaver. Gjennomsnittspoengene til hver enkelt deltaker ble regnet ut i brøk- og algebraoppgavene. Videre ble også brøkoppgavene delt i to kategorier, de oppgavene som måler instrumentell- og relasjonell forståelse. Disse kategoriene ble videre brukt i ulike tester kjørt i SPSS. For å enklest mulig navngi oppgaver i denne oppgaven vil oppgavenes nummer heretter omtales ut fra oppgavenavn fra spørreskjema 1, vedlegg 2.

Algebraoppgavene som ble valgt i denne undersøkelsen kategoriseres som at de måler instrumentell forståelse i algebra, prestasjon i algebra. I skolematematikken representerer kanskje algebra den delen hvor vi oftest og mest systematisk møter på algoritmer og huskeregler for å løse problemene (Naalsund, referert i Wæge & Nosrati, 2015).

Det ble også regnet ut hvor mange prosent av deltakerne som fikk riktig svar på de ulike oppgavene, det ble gjort for å kunne sammenligne med artikkelen til Ginther et al. (1976) som ble gjennomført i USA på 8.klasseelever. Utregning i prosent ble gjennomført i EXCEL.

Signifikansnivået sier noe om hvor stor sannsynlighet man aksepterer for å trekke feil slutninger i de situasjoner når nullhypotesen H_0 er riktig (Johannessen et al., 2016, s. 375). For at noe skal være signifikant forskjellig eller ha en signifikant sammenheng skal p-verdien være mindre enn 0,05 når vi bruker 95% konfidensintervall. Da kan vi si at det er 95% sikkert at forskjellene er signifikante, at de ikke skyldes tilfeldigheter. Testens signifikansnivå handler om hvor stor sannsynlighet for forkastningsfeil (type I) vi er villige til å akseptere (Løvås, 2018, s. 259). Type I feil er når H_0 er sann og vi forkaster den feilaktig (Johannessen et al., 2016; Løvås, 2018, s. 232).

En bivariat analyse beskriver en undersøkelse av sammenhengen mellom to variabler (Johannessen et al., 2016, s. 293). De tre vanligste måtene å gjennomføre bivariate analyser på er krysstabeller, sammenlikning av gjennomsnitt og korrelasjonsanalyse (Johannessen et al., 2016, s. 293). Grad av korrelasjon mellom elevenes gjennomsnittsscore i brøk- og algebraoppgaver ble sjekket i statistikkprogrammet SPSS, ved bruk av ulike analyser. Oppgavene i surveyen ble delt inn i gjennomsnittsscore i alle algebra- og brøkoppgaver, i instrumentell forståelse av brøk og relasjonell forståelse av brøk. Det er disse kategoriene som ble brukt i analyseringen i SPSS. Det ble det gjennomført en Pearsons korrelasjonsanalyse mellom elevenes gjennomsnittspoeng i kategoriene. Graden av lineær samvariasjon måles av korrelasjonskoeffisienten, en verdi nær -1 eller 1, som vil si at det ligger nær opp til maksimale grader av negativ og positiv lineær samvariasjon (Ubøe & Jørgensen, 2008, s. 29, 116). Pearsons *r* er et mye brukt korrelasjonsmål, som angis hvor sterk lineær sammenheng det er mellom to variabler (Johannessen et al., 2016, s. 300). Både typen og styrken på samvariasjon angis ved Pearsons *r* (Johannessen et al., 2016, s. 304). Samvariasjonens type kommer i form av positiv, negativ eller fraværende (Johannessen et al., 2016, s. 302).

Det ser ikke ut til at det finnes et fasitsvar på hva som er høy korrelasjon (Johannessen et al., 2016, s. 305).

Tabell 2. Grad av korrelasjon (Schober et al., 2018).

Verdi Korrelasjonskoeffisienten	Grad av korrelasjon
0,001 - 0,1	Ubetydelig korrelasjon
0,11- 0,39	Svak korrelasjon
0,40 - 0,69	Moderat korrelasjon
0,70 - 0,89	Sterk korrelasjon
0,90 - 1	Veldig sterk korrelasjon

Tabell 2 viser verdiene på korrelasjonskoeffisienten som det videre vises til i denne oppgaven Tabellen er hentet fra Schober et al. (2018) sine betegnelser på grad av korrelasjon ut fra korrelasjonskoeffisienten.

En bivariat analyse er en statistisk analyse som analyserer forholdet mellom to variabler (Rød, 2017, s. 167). Det som studeres er om det er sammenheng mellom verdiene av to variabler, om det er en statistisk avhengighet eller statisk avhengighet mellom variablene (Rød, 2017, s. 167). Når man analyserer samvariasjon er det ifølge Rød (2017, s. 167) flere aspekter. Ifølge Rød (2017, s. 167), brukes korrelasjonskoeffisienter for å måle samvariasjonens styrke. Det er viktig å være klar over at det kan være samvariasjon mellom to variabler uten at det er årsakssammenheng mellom dem (Rød, 2017, s. 168). For å få svar på dette må sammenhengen mellom de to variablene undersøkes nærmere. Ved toveis årsakssammenheng er det ikke opplagt hvilken vei årsakspilen går (Rød, 2017, s. 169).

En analyseteknikk som benyttes for å sammenligne gjennomsnitt i mange grupper samtidig er variansanalysen (Løvås, 2018, s. 346). Variansanalyse for flere grupper kalles ifølge Løvås

(2018, s. 346) ofte for ANOVA etter sitt engelske navn *analysis of variance.* Enveis ANOVA-testen er en test som bevarer signifikansnivået (Lysø, 2017, s. 274). Variansanalysens hovedpoeng er å sammenligne variasjonen innad i gruppene med variasjonen mellom gruppene (Løvås, 2018, s. 347). F-verdien vil være tilnærmet lik 1,0 hvis nullhypotesen er sann (Ringdal, 2013, s. 379). Forkastning av nullhypotesen skjer ved store verdier av F (Ringdal, 2013, s. 379).

4. Resultater

I det følgende kapitlet presenteres funnene gjort fra surveyen, og med korte kommentarer til tabeller og figurer. Målet med dette kapitlet er å belyse oppgavens problemstilling; *hvilken sammenheng er det mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og deres prestasjoner i algebra.*

Oppgavene ble delt inn i kategoriene brøk og algebra, men også videre i om de måler instrumentell eller relasjonell forståelse av brøk, for å kunne analysere gjennomsnittspoengene til elevene i de ulike oppgavene.

Tabell 3. Oversikt over kategoriene oppgavene er delt inn i.

Oppgavekategori		Oppgaver nummer	Operasjoner/tema	Hva måles
Brøk	Brøk_I	1a,1b,2a,2b, 3a,3b,4a,4b	Addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon av brøk	Instrumentell forståelse
	Brøk_R	5a,5b, 6a,6b,7a,7b,8a,8b	Anvendelse av brøk	Relasjonell forståelse
Algebra		9a,9b,9c,9d	Algebra	Riktig eller galt svar ved å løse likninger

Tabell 3 viser en oversikt over hvilke oppgaver som er i de ulike kategoriene, dette er kategoriene som ble brukt i analyseringen. Oppgavenummereringen kommer fra oppgavesett 1, vedlegg 2.

4.1. *Prosentandel riktige svar*

For å kunne sammenligne prosentandel riktige svar på brøkoppgaver i surveyen, ble det regnet ut hvor mange elever i prosent som har svart riktig både på brøk- og algebraoppgavene.

Brøk oppgaver

Tabell 4. Prosent riktige svar på brøkoppgaver i surveyen

Oppgave	Riktige svar i %
Oppgave 1a	33 %
Oppgave 1b	30 %
Oppgave 2a	43 %
Oppgave 2b	35 %
Oppgave 3a	41 %
Oppgave 3b	28 %
Oppgave 4a	17 %
Oppgave 4b	10 %
Oppgave 5a	22 %
Oppgave 5b	17 %
Oppgave 6a	22 %
Oppgave 6b	45 %
Oppgave 7a	87 %
Oppgave 7b	32 %
Oppgave 8a	28 %
Oppgave 8b	28 %

Algebra oppgaver

Tabell 5. Prosent riktige svar på algebraoppgaver i surveyen.

Oppgave	Riktige svar i %
Oppgave 9a	4 %
Oppgave 9b	4 %
Oppgave 9c	1 %
Oppgave 9d	1 %

4.2. *Krysstabell mellom brøk og algebra*

For å sjekke om det er sammenheng mellom ungdomsskoleelevers forståelse av brøk og prestasjoner i algebra ble det lagd en krysstabell i statistikkprogrammet SPSS. En krysstabell mellom relasjonell brøk og instrumentell brøk, mellom instrumentell brøk og algebra og mellom relasjonell brøk og algebra ble gjennomført.

Det ble lagd en krysstabell i SPSS, for å sjekke om det er sammenheng mellom ungdomsskoleelevers forståelse av brøk og prestasjoner i algebra.

Tabell 6. Krysstabell brøk og algebra

BRØK * ALGEBRA Crosstabulation

Count

		ALGEBRA			
		,00	,25	,50	Total
BRØK	,00	4	0	0	4
	,06	13	0	0	13
	,13	19	0	0	19
	,19	14	0	0	14
	,25	5	0	0	5
	,31	9	0	0	9
	,38	5	1	0	6
	,44	6	1	0	7
	,50	1	0	0	1
	,56	3	1	0	4
	,63	3	1	0	4
	,69	2	2	0	4
	,75	5	1	0	6
	,81	3	0	0	3
	1,00	1	1	1	3
Total		93	8	1	102

Tabell 6 viser at det ikke var noen av elevene i surveyen som fikk til alt i algebraoppgavene, den høyeste gjennomsnittsscoren i algebraoppgavene er 0,50, som tilsvarer at de fikk 50% av algebraoppgavene riktig, det var det en elev som hadde fått. I denne kategorien var det en elev som fikk 100% riktig på brøkoppgavene. Altså var det en elev i undersøkelsen som fikk 50% riktig på algebraoppgavene og som samtidig fikk 100% av brøkoppgavene riktig. Det var åtte elever som fikk 0,25 i gjennomsnittsscore i algebra, som tilsvarer at de fikk 25% riktig, disse elevene fikk henholdsvis 38%, 44%, 56%, 63%, 69% ,75% og 100% riktig i brøkoppgavene. De hadde høyere gjennomsnittsscore i brøk- enn algebraoppgavene. Krysstabellen viste at det var fire elever som fikk 0 i gjennomsnittsscore i både algebra- og brøkoppgavene, altså fikk de ikke noen riktige svar på algebra- og brøkoppgavene. Det var 93 elever som fikk 0 i gjennomsnittsscore i algebraoppgavene, altså 0% riktig. Tretten elever fikk til 6% av brøkoppgavene, nitten elever fikk riktig svar på 13%, mens fjorten elever fikk til 19%, fem elever fikk til 25%, fem elever fikk 38% og seks elever fikk 44%. En elev fikk 50%, tre elever fikk 63%, to elever fikk 69%, fem elever fikk 75% og tre elever fikk 81% riktig i brøkoppgaver, mens de hadde fått 0% riktig i algebraoppgavene. Den høyeste gjennomsnittsscoren i brøkoppgavene hos de elevene som fikk 0% riktig i algebraoppgavene er 100%, og det er en elev som har oppnådd.

Krysstabellanalysen i gjennomsnittsscore i brøk- og algebraoppgavene viste at det er flere elever som har lav gjennomsnittsscore i brøk- og algebraoppgaver. Det er ca. 50% av elevene som har klart mellom 0-19% i brøkoppgavene og 0% i algebraoppgavene. Det var tjuetre elever som fikk mellom 31% og 50% riktig i brøkoppgavene. Femten elever fikk mellom 56% og 81% riktig i brøkoppgavene, mens tre av elevene fikk 100% riktig i algebraoppgavene.

For videre undersøkelser ble det lagd en krysstabell i SPSS, for å sjekke om det er sammenheng mellom relasjonell brøk og instrumentell brøk.

Tabell 7. Krysstabell relasjonell- og instrumentell brøk

Brøk_I * Brøk_R Crosstabulation

Count

		Brøk_R									Total
		,00	,10	,30	,40	,50	,60	,80	,90	1,00	
Brøk_I	,00	4	12	10	3	0	0	0	0	0	29
	,10	1	9	5	2	0	0	0	0	0	17
	,30	0	5	2	3	1	1	0	1	0	13
	,40	1	1	4	4	3	0	1	0	1	15
	,50	0	1	1	1	1	1	0	0	3	8
	,60	1	0	1	0	0	2	3	1	0	8
	,80	0	1	0	1	2	0	2	0	0	6
	,90	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	1,00	0	0	0	0	0	2	0	0	3	5
Total		7	29	23	14	7	6	7	2	7	102

Tabell 7 viser krysstabell mellom relasjonelle- og instrumentelle brøkoppgaver, ut fra tabellen kan man se at det var fire elever som fikk 0% riktig i både relasjonelle- og instrumentelle brøkoppgaver. Av 29 elever som fikk 0% riktig i instrumentelle brøkoppgaver var den høyeste gjennomsnittscoren 40% i relasjonelle brøkoppgaver, det var tre elever som fikk det. Det var en elev som fikk 50% riktig i begge disse kategoriene. Det var tre elever som fikk 100% riktig i relasjonelle- og instrumentelle brøkoppgaver. Det var sju elever som fikk 100% riktig i de relasjonelle brøkoppgavene, de fikk også 40%, 50% og 100% riktige i instrumentelle brøkoppgaver. Den høyeste gjennomsnittsscoren i instrumentelle brøkoppgaver var 1,0 som da er 100%, det var det fem deltakere som fikk, de elevene fikk 60% og 100% riktig i relasjonelle brøkoppgaver.

Det ble lagd en krysstabell i SPSS, for å sjekke om det er sammenheng mellom instrumentell brøk og algebra.

Tabell 8. Krysstabell algebra og instrumentell brøk

Brøk_I * ALGEBRA Crosstabulation

Count

		ALGEBRA			
		,00	,25	,50	Total
Brøk_I	,00	29	0	0	29
	,10	17	0	0	17
	,30	12	1	0	13
	,40	13	2	0	15
	,50	6	2	0	8
	,60	6	2	0	8
	,80	6	0	0	6
	,90	1	0	0	1
	1,00	3	1	1	5
Total		93	8	1	102

Tabell 8 viser at det var 29 deltakere som fikk 0% riktig i de instrumentelle brøkoppgavene og algebraoppgavene. Det var 6 av deltakerne som fikk mer enn 50% riktig i de instrumentelle brøkoppgavene og 25-50% riktig på algebraoppgavene. Alle deltakerne som fikk til algebraoppgavene, fikk mer enn 10% riktig i de instrumentelle brøkoppgavene.

For å undersøke sammenhengen mellom algebra og brøk videre, ble det også lagd en krysstabell i SPSS, for å sjekke om det er sammenheng mellom relasjonell brøk og algebra.

Tabell 9. Krysstabell algebra og relasjonell brøk

Brøk_R * ALGEBRA Crosstabulation

Count

		ALGEBRA			
		,00	,25	,50	Total
Brøk_R	,00	7	0	0	7
	,10	29	0	0	29
	,30	23	0	0	23
	,40	14	0	0	14
	,50	5	2	0	7
	,60	4	2	0	6
	,80	6	1	0	7
	,90	2	0	0	2
	1,00	3	3	1	7
Total		93	8	1	102

Tabell 9 viser at det var 7 deltakere som fikk 0% riktig på brøk- og algebraoppgavene. Det var 9 deltakere som fikk mer enn 50% riktig i de relasjonelle brøkoppgavene og 25-50% riktig på algebraoppgavene. Alle deltakerne som fikk riktig på algebraoppgavene klarte også brøkoppgaver med 50% og høyere gjennomsnittsscore. Det var ingen av deltakerne som fikk til algebra som ikke fikk til de relasjonelle brøkoppgavene.

4.3. Korrelasjonsanalyse

For å teste om det er en sammenheng mellom elevenes forståelse av brøk og algebra ble det brukt en korrelasjonsanalyse, Pearson’s korrelasjon. Valg av analysemetode begrunnes med at korrelasjon er et mål på om to variabler henger sammen (Løvås, 2018, s. 159). For å sjekke om det er sammenheng mellom brøk og algebra, instrumentell forståelse av brøk, og relasjonell forståelse av brøk, ble det kjørt en korrelasjonsanalyse av gjennomsnittspoengene i alle kategoriene. Resultatene av korrelasjonsanalysene er presentert i tabeller fortløpende i kapitlet.

Tabell 10. Korrelasjonsanalyse brøk og algebraoppgaver

		ALGEBRA	BRØK
ALGEBRA	Pearson Correlation	1	,449**
	Sig. (2-tailed)		,000
	N	102	102
BRØK	Pearson Correlation	,449**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	
	N	102	102

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 10 viser at det er en positiv signifikant korrelasjon mellom elevenes oppnåelse i brøkoppgavene og algebraoppgavene $(r = 0{,}449, p < 0{,}001)$. Da kan man ut fra tabell 2 si at det er en moderat positiv korrelasjon mellom disse to gruppene.

For å undersøke sammenhengen mellom brøk og algebra nærmere ble brøkoppgavene delt inn i relasjonelle - og instrumentelle brøkoppgaver. Og videre analyser i analyseverktøyet SPSS ble gjennomført.

Tabell 11. Korrelasjonsanalyse algebra, instrumentell brøk og relasjonell brøk

		ALGEBRA	Brøk_I	Brøk_R
ALGEBRA	Pearson Correlation	1	,330**	,459**
	Sig. (2-tailed)		,001	,000
	N	102	102	102
Brøk_I	Pearson Correlation	,330**	1	,654**
	Sig. (2-tailed)	,001		,000
	N	102	102	102
Brøk_R	Pearson Correlation	,459**	,654**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	
	N	102	102	102

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 11 viser at det er statistisk signifikant korrelasjon mellom elevenes gjennomsnittspoeng i instrumentelle brøk- og relasjonelle brøkoppgaver $(r = 0{,}654, p < 0{,}001)$. Siden korrelasjonskoeffisienten er positiv kan man si at det er en positiv korrelasjon mellom dem. Ut fra korrelasjonskoeffisientens verdi kan man si at det er en moderat korrelasjon mellom relasjonelle- og instrumentelle brøkoppgaver.

Det er statistisk signifikant korrelasjon mellom elevenes gjennomsnittspoeng i instrumentell brøk og algebraoppgaver ($r = 0{,}330, p < 0{,}001$). Ut fra tabell 2 kan vi se at det er en svak positiv korrelasjon mellom instrumentelle brøkoppgaver og algebraoppgavene. Analysene viser at det er statistisk signifikant korrelasjon mellom elevenes gjennomsnittspoeng i relasjonell brøk og algebraoppgaver ($r = 0{,}459, p < 0{,}001$). Ut fra Schober et al. (2018) sine verdier på korrelasjonskoeffisienten, kan vi se at det er moderat positiv korrelasjon mellom disse to gruppene.

4.4. One-Way ANOVA

Elevene ble inndelt i fire grupper ut fra gjennomsnittsscoren på resultatene fra brøkoppgavene. For å sammenligne om gjennomsnittsscoren var ulik i de fire gruppene ble det foretatt en One-Way ANOVA. Gjennomsnittsskåren i brøkoppgavene ble rangert og delt inn i grupper. Gruppeinndelingen er som følgende;

Tabell 12. Gruppering og poeng

Poeng	Gruppe
0	1
0,01 - 0,49	2
0,50 - 0,999	3
1	4

Tabell 12 viser oversikt over poengsummene og hvilke grupper elevene havnet i, ut fra poengsummen.

Tabell 13. Antall elever i de fire gruppene

Gruppering	Antall elever
G1_B	4
G2_B	73
G3_B	22
G4_B	3
G1_B_I	29
G2_B_I	45
G3_B_I	23
G4_B_I	5
G1_B_R	7
G2_B_R	66
G3_B_R	22
G4_B_R	7

Tabell 13 viser en oversikt over antall elever i de ulike grupperingene innenfor gjennomsnittspoeng i brøk, relasjonelle brøkoppgaver og instrumentelle brøkoppgaver. Gjennomsnittspoengene i grupperingene er beskrevet over tabellen.

Er gjennomsnittsskåren i algebraprestasjonen lik i de fire brøkoppgavegruppene?

Videre undersøkelser ble gjort for å se nærmere på sammenhengen av brøkpoengene som elevene fikk og algebrapoengene.

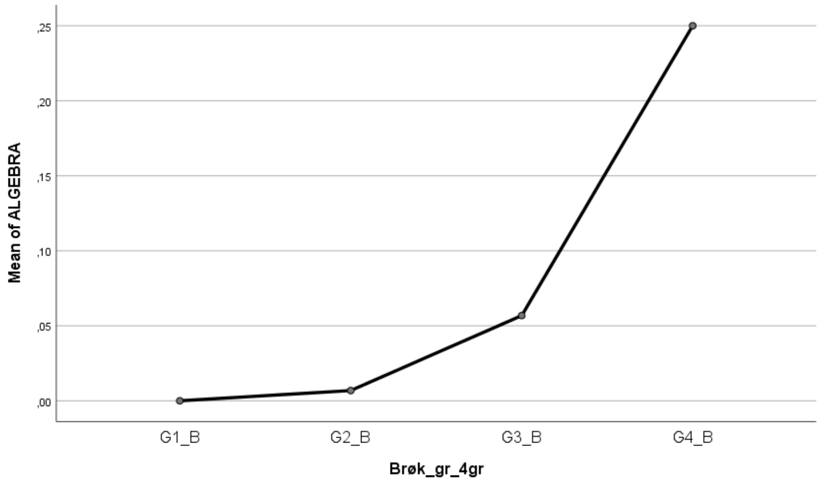
Tabell 14. ANOVA algebraoppgaver og brøkoppgaver grupperinger

ANOVA

ALGEBRA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	,201	3	,067	13,432	,000
Within Groups	,488	98	,005		
Total	,689	101			

Ut fra tabell 14 kan man se at One-Way ANOVA testen viste signifikante forskjeller mellom deltakernes poeng i brøk- og algebraoppgaver i surveyen ($F_{3,101} = 13{,}4, p = 0{,}000$). Nullhypotesen H_0er at det ikke er forskjell i gjennomsnittsskåren som de fire gruppene fikk i algebraoppgavene i surveyen. Den alternative hypotesen er at minst et gjennomsnitt er forskjellig fra de andre. Siden det er statistisk signifikant forskjell med ($F_{3,101} = 13{,}4, p < 0{,}001$ kan nullhypotesen forkastes og vi kan anta at det er en forskjell i gjennomsnittsskåren hos gruppene i algebraoppgavene.



Figur 1. Gjennomsnittsplot av algebraoppgavene og brøkoppgaver i grupperinger

Ut fra figur 1 kan man se at de elevene som er i G4_B (som fikk 100% riktig) i brøkoppgavene også fikk riktig på ca. 25% av algebraoppgavene.

Når det er signifikante funn mellom grupper i One-Way ANOVA kan man kjøre en Post-Hoc for å se hva forskjellene viser seg i, for å undersøke mellom hvilke grupper det er signifikat forskjell. Post-Hoc sjekker for hver mulige par av grupper, og sjekker for forskjeller mellom gruppene.

Tabell 15. Post-Hoc Test algebra og brøkoppgaver grupperinger

Multiple Comparisons

Dependent Variable: ALGEBRA

Tukey HSD

(I) Brøk_gr_4gr	(J) Brøk_gr_4gr	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
G_1	G_2	-,00685	,03624	,998	-,1016	,0879
	G_3	-,05682	,03836	,453	-,1571	,0434
	G_4	-,25000*	,05390	,000	-,3909	-,1091
G_2	G_1	,00685	,03624	,998	-,0879	,1016
	G_3	-,04997*	,01716	,023	-,0948	-,0051
	G_4	-,24315*	,04157	,000	-,3518	-,1345
G_3	G_1	,05682	,03836	,453	-,0434	,1571
	G_2	,04997*	,01716	,023	,0051	,0948
	G_4	-,19318*	,04343	,000	-,3067	-,0797
G_4	G_1	,25000*	,05390	,000	,1091	,3909
	G_2	,24315*	,04157	,000	,1345	,3518
	G_3	,19318*	,04343	,000	,0797	,3067

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Ut fra tabell 15 kan man se at det er signifikante forskjeller mellom noen av gruppene. For eksempel er det signifikante forskjeller mellom G_1 og G_4, mellom G_2 og G_3, G_2 og G_4 og mellom G_3 og G_4. Det er ikke signifikante forskjeller i gjennomsnittscoren mellom G_1 og G_2, ikke mellom gruppe G_1 og G_3. Funnene viser at det er signifikante forskjeller mellom elevene i G_4 og G_1 ($M = 0{,}25000$). Elevene i G_3 har signifikant høyere poeng enn elevene i G_2 ($M = 0{,}4997$). Det er signifikante forskjeller i poengene hos elevene i G_4 og G_2 ($M = 0{,}24315$). Mens elevene i G_4 har signifikant høyere poengsum enn elevene i G_3 ($M = 0{,}19318$).

Er det forskjell mellom gruppene innenfor instrumentelle brøkoppgaver og deres prestasjoner i algebra?

Videre undersøkelser ble gjort for å se om det er forskjell hos de elevene som ikke får til noen av oppgavene innenfor instrumentell forståelse av brøk og i algebraoppgavene.

Tabell 16. ANOVA algebra og instrumentell brøk

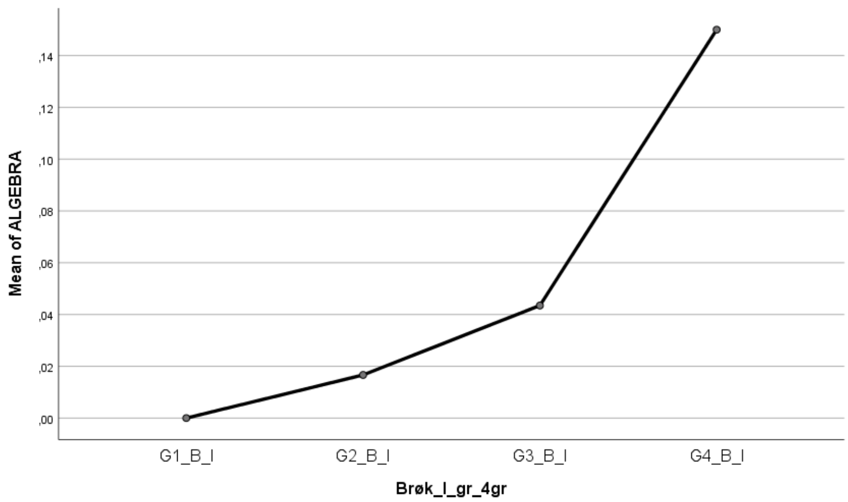
ANOVA

ALGEBRA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	,107	3	,036	6,022	,001
Within Groups	,582	98	,006		
Total	,689	101			

Ut fra tabell 16 kan man se at One-Way ANOVA testen viste signifikante forskjeller mellom deltakernes poeng i instrumentelle brøk- og algebraoppgaver i surveyen ($F_{3,101} = 6{,}0, p = 0{,}001$). Nullhypotesen, H_0,er at det ikke er forskjell i gjennomsnittsskåren de fire instrumentell brøk-gruppene fikk i algebraoppgaver. Den alternative hypotesen er at det er minst et gjennomsnitt som er forskjellig fra de andre. Siden det er statistisk signifikant forskjell, med ($F_{3,101} = 6{,}0, p < \ 0{,}05$) kan nullhypotesen forkastes og vi kan anta at det er en forskjell i gjennomsnittsskåren mellom noen av de fire instrumentelle brøk-gruppene.

Videre undersøkelser ble gjort for å se om det er forskjell i algebraprestasjon hos de fire gruppene innenfor instrumentell forståelse av brøk.



Figur 2. One-Way ANOVA algebra og instrumentell brøk

Ut fra figur 2 kan man se at de elevene som er i G4_B_I (som fikk 100% riktig) i oppgavene som måler instrumentell forståelse av brøk fikk riktig på i gjennomsnitt 15% av algebraoppgavene.

Når det er signifikante funn mellom grupper i One-Way ANOVA kan man kjøre en Post-Hoc for å se hva forskjellene viser seg i, for å undersøke mellom hvilke grupper det er signifikant forskjell.

Tabell 17. Post-Hoc Multiple Comparisons

Multiple Comparisons

Dependent Variable: ALGEBRA

Tukey HSD

(I) Brøk_I_gr_4gr	(J) Brøk_I_gr_4gr	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
G_1	G_2	-,01667	,01834	,800	-,0646	,0313
	G_3	-,04348	,02151	,187	-,0997	,0127
	G_4	-,15000*	,03730	,001	-,2475	-,0525
G_2	G_1	,01667	,01834	,800	-,0313	,0646
	G_3	-,02681	,01974	,529	-,0784	,0248
	G_4	-,13333*	,03631	,002	-,2282	-,0384
G_3	G_1	,04348	,02151	,187	-,0127	,0997
	G_2	,02681	,01974	,529	-,0248	,0784
	G_4	-,10652*	,03801	,031	-,2059	-,0072
G_4	G_1	,15000*	,03730	,001	,0525	,2475
	G_2	,13333*	,03631	,002	,0384	,2282
	G_3	,10652*	,03801	,031	,0072	,2059

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Ut fra tabell 17 kan man se at det er signifikante forskjeller mellom noen av gruppene. For eksempel er det signifikante forskjeller mellom G_1 og G_4, mellom G_2 og G_4 og mellom G_3 og G_4. Det er ikke signifikante forskjeller mellom G_1 og G_2, ikke mellom G_1 og G_3, og ikke mellom G_2 og G_3.

For instrumentelle brøk- og algebraoppgaver viste funnene at elevene i G_4 har signifikante høyere gjennomsnittspoeng i algebra enn G_3, $(M = 0{,}10652)$. Mellom elevene G_4 og G_2 er forskjellen signifikant $(M = 0{,}13333)$. Elevene i G_4 har signifikant høyere gjennomsnittspoeng enn elevene i G_1 $(M = 0{,}15000)$.

Er det forskjell i gjennomsnitt mellom gruppene i relasjonelle brøkoppgaver og algebraprestasjoner?

Videre undersøkelser ble gjort for å se om det er forskjell på de elevene som ikke får til noen av oppgavene innenfor relasjonell forståelse av brøk og algebra

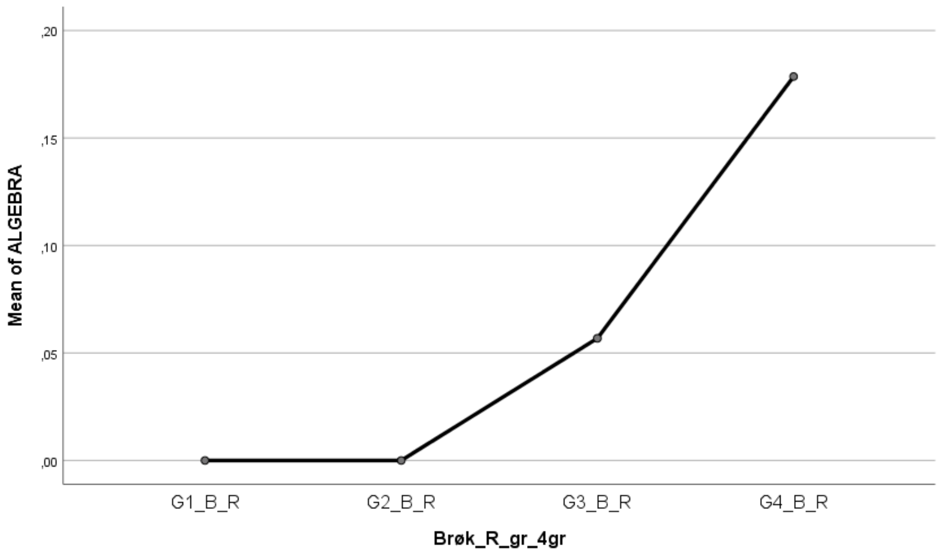
Tabell 18. ANOVA algebra og instrumentell brøk

ANOVA

ALGEBRA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	,233	3	,078	16,698	,000
Within Groups	,456	98	,005		
Total	,689	101			

Ut fra tabell 18 kan man se at One Way ANOVA testen viste signifikante forskjeller mellom deltakernes poeng i instrumentelle brøk- og algebraoppgaver i surveyen ($F_{3,101} = 16{,}7, p = 0{,}000$). Nullhypotesen H_0er at det ikke er forskjell i gjennomsnittsskår i algebra hos de fire gruppene i relasjonell brøk. Den alternative hypotesen er at minst et gjennomsnitt er forskjellig fra de andre. Siden det er statistisk signifikant forskjell, med ($F_{3,101} = 16{,}7, p < 0{,}001$ kan nullhypotesen forkastes og vi kan anta at det er forskjell i algebraprestasjon mellom noen av de fire relasjonelle brøk-gruppene.



Figur 3. One-Way ANOVA Algebra og relasjonell brøk

Figur 3 viser at de elevene som er i G4_B_R (som fikk 100% riktig) i de relasjonelle brøkoppgavene fikk riktig på i gjennomsnitt 18% av algebraoppgavene. Mens de elevene som er i G1_B_R (fikk 0% riktig) i de relasjonelle brøkoppgavene fikk i gjennomsnitt 0% riktig i algebraoppgavene.

Når det er signifikante funn mellom grupper i One-Way ANOVA kan man kjøre en Post-Hoc for å se hva forskjellene viser seg i, for å undersøke mellom hvilke grupper det er signifikant forskjell.

Tabell 19. Post-Hoc Multiple Comparisons

Multiple Comparisons

Dependent Variable: ALGEBRA

Tukey HSD

(I) Brøk_R_gr_4gr	(J) Brøk_R_gr_4gr	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
G_1	G_2	,00000	,02711	1,000	-,0709	,0709
	G_3	-,05682	,02959	,226	-,1342	,0205
	G_4	-,17857*	,03645	,000	-,2738	-,0833
G_2	G_1	,00000	,02711	1,000	-,0709	,0709
	G_3	-,05682*	,01679	,006	-,1007	-,0129
	G_4	-,17857*	,02711	,000	-,2494	-,1077
G_3	G_1	,05682	,02959	,226	-,0205	,1342
	G_2	,05682*	,01679	,006	,0129	,1007
	G_4	-,12175*	,02959	,000	-,1991	-,0444
G_4	G_1	,17857*	,03645	,000	,0833	,2738
	G_2	,17857*	,02711	,000	,1077	,2494
	G_3	,12175*	,02959	,000	,0444	,1991

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Tabell 19 viser at det er signifikante forskjeller mellom noen av gruppene. For eksempel er det signifikante forskjeller mellom G_1 og G_4, mellom G_2 og G_3 og G_2 og G_4, og mellom G_3 og G_4. Det er ikke signifikante forskjeller mellom G_1 og G_2, G_1 og G_3, ikke mellom G_2 og G_3.

Forskjellen mellom gjennomsnittspoengene hos elevene i G_4 og G_1 er den samme som mellom G_4 og G_2, gruppe 4 har altså høyere gjennomsnittspoeng enn G_1 og G_2 ($M = 0{,}17857$). Det er forskjell i gjennomsnittpoeng mellom G_4 og G_3, G_4 har høyere gjennomsnitt enn G_3 ($M = 0{,}12175$). Mens forskjellen mellom elevene i G_3 og G_2 er den samme som mellom G_3 og G_1, altså har G_3 høyere gjennomsnittspoeng enn G_2 og G_1 ($M = 0{,}05682$).

5. Diskusjon

I denne delen av oppgaven diskuteres resultater opp mot allerede eksisterende forskning. Funn er presentert i resultatdelen, de bygger på problemstillingen som er lagt frem i kapittel 1.2 under innledning. Problemstillingen er som følger: *Hvilken sammenheng er det mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og deres prestasjoner i algebra?*

Oppgavene i undersøkelsen ble delt inn i kategorier ut fra hva som måles, relasjonelle brøkoppgaver, instrumentelle brøkoppgaver og algebraoppgaver. Inndelingen ble gjort ut fra Skemp (1976) sin forklaring på begrepet forståelse, og ut fra inspirasjon fra artiklene til Ginther et al. (1976) og Brown & Quinn (2007b). Ut fra Skemp (1976) sin forklaring på begrepet instrumentell forståelse måles kun instrumentell forståelse når oppgaver kan løses ved å bare hvite hvordan, altså kunne regler i f.eks. brøkoperasjoner. Da måles ikke relasjonell forståelse. Dette tilsvarer oppgave 1-4 i surveyen, i disse oppgavene trenger elevene å kunne regler innenfor regning av brøk, for å kunne løse oppgavene. Oppgave 5-8 måler relasjonell forståelse av brøk, dette er valgt ut fra inspirasjon fra artikkelen til Ginther et al. (1976).

Oppgave 5-8 måler mer enn bare instrumentell forståelse, det trengs relasjonell forståelse for å løse oppgavene. I disse oppgavene er det både figurer, tallinje og tekstoppgaver, elevene må derfor kunne se sammenhenger mellom ulike representasjoner for å løse disse oppgavene. I oppgave 5-8 måles relasjonell forståelse av brøk, elevene testes i anvendelse av brøk, elevene må se sammenhenger mellom ulike representasjoner i disse oppgavene. Ifølge Van de Walle et al. (2019, s. 22) er *conceptual understanding* et fleksibelt nett av sammenhenger og relasjoner innenfor og mellom ideer, tolkninger og bilder av matematiske begreper- en relasjonell forståelse. Elever med *conceptual understanding* vil koble det de vet om divisjon og tall og gi mening om skalering, priser og så videre (Van de Walle et al., 2019, s. 22). *Conceptual understanding* inkluderer ifølge Van de Walle et al. (2019, s. 22) nettverk av representasjoner og tolkninger av et konsept gjennom bruk av bilder, konkreter, tabeller, grafer ord osv. Ifølge Skemps (1976) definisjon på relasjonell forståelse, måler oppgave 5-8 om eleven vet hva en skal gjøre og hvorfor. For å kunne få riktig svar på disse oppgavene er det altså ikke tilstrekkelig å bare kunne regler uten å resonere (instrumentell forståelse). En elev som kan tegne diagrammer, vise eksempler og finne en rekke likeverdige brøker har en forståelse mot den relasjonelle enden av skalaen (Van de Walle et al., 2019, s. 20). Når det gjelder oppgave 5 tester den relasjonell forståelse av brøk fordi elevene må kunne forstå det multiplikative forholdet av invers brøk (Empson & Levi, 2011, s. 3-4, 75), siden det er en tom boks kommer den relasjonelle forståelsen inn og elevene må forstå sammenhengen med den inverse brøk for å sette inn riktig tall ut fra tallet som står i regneoperasjonen.

Når det gjelder algebra ble det valgt ut oppgaver som måler om deltakerne får galt eller riktig svar på lineære ligninger, altså instrumentell forståelse. Dette er definert ut fra Skemp (1976) sin definisjon på begrepet *forståelse,* disse oppgavene kan løses ved å vite hvordan. Men lager man andre type oppgaver innenfor algebra, som kan undersøke relasjonell forståelse, kan man også undersøke relasjonell forståelse. I denne studien ble hovedfokuset på brøkoppgaver som måler instrumentell- og relasjonell forståelse, mens algebraoppgavene måler elevenes prestasjoner i algebra.

I oppgavene i surveyen ble det skrevet «vis utregning», i håp om å få se hvordan elevene gjorde utregning, men de fleste deltakerne viste stort sett ikke utregning. Dermed er det også noe informasjon man kan ha gått glipp av i undersøkelsen. Brøk er ifølge Empson et al. (2010) ikke vanskelig hvis undervisningen utvikler barns evne til relasjonell tenkning. Men i denne oppgaven får man ikke noe svar på hvordan undervisningen i matematikk har vært, det er bare et øyeblikksbilde om deltakerne får til brøkoppgaver og algebraoppgaver. Ifølge Empson et al. (2010) kan vanskeligheten med å lære brøk ligge i hvordan brøk læres bort i stedet for hvor vanskelig eller enkel brøken er å forstå. Denne undersøkelsen gir ikke et svar på hvordan elevene har lært brøk, eller hvilke vanskeligheter de eventuelt skulle ha med brøk. Det kan bare gjøres antagelser ut fra antall riktige svar i undersøkelsens oppgaver.

5.1. Prosent antall riktige svar

I denne delen er hovedfokuset på brøkoppgavene som ble valgt til surveyen ut fra tidligere forskning på forståelse av brøk, der det ble undersøkt både beregning (instrumentell forståelse), forståelse og bruk (Ginther et al., 1976). Denne undersøkelsen har oppgaver inspirert fra Ginther (1976) sin artikkel, gjennomført i USA. Derfor ble det i denne oppgaven valgt å endre litt på noen av oppgavene, for at det skulle passe til norsk kontekst. Noen av oppgavene i surveyen er også hentet fra matematikklæreverk (Tofteberg et al., 2020), for at det skulle være mer relevant. Prosent antall riktige svar på oppgavens resultater diskuteres i lys av tidligere empiri.

Oppgave for oppgave innen brøk ble sammenlignet med oppgaver fra Ginther (1976) sin artikkel. Sammenlignet med artikkelen kan man se at oppgave 7, som tester brøkforståelse, med figurer scorer de norske elevene i studien ganske likt med Ginther (1976) sin studie, med

88% mot 87% på oppgave 7a, og 32% mot 37% på oppgave 7b. Oppgave 7 måler relasjonell forståelse da elevene må kunne se sammenhengen mellom brøkstørrelsene og ekvivalens. I disse oppgavene må deltakerne sammenligne brøkstørrelser og se likeverdig brøk for å velge riktig figur til riktig brøk. Brøk har blitt brukt i århundrer og er manipulert i et stort utvalg av hverdagssituasjoner og i matematikk, og likevel er de vanskelige for elevene å forstå og mestre (Gabriel et al., 2013). Oppgave 7a var oppgaven i undersøkelsen som har størst prosent antall riktige svar. Oppgave 7b hadde lavere prosent andel riktige svar. Om dette kommer av at deltakerne synes det er vanskelig med brøkstørrelser, om det er sammenligningen med likeverdig brøk som er vanskelig får man ikke et klart svar på. Typiske feil som Gabriel et al. (2013) skriver om vises i addisjons- eller subtraksjonsoppgaver (f.eks. $1/4 + 1/2 = 2/6$), og også i brøksammenligning (f.eks. $1/5 > 1/3$).

Man kan ikke ut fra denne studien si noe om det er forståelse i brøk som påvirker prestasjoner i algebra, eller motsatt, det må derfor undersøkes mer på for å kunne gi et klart svar. Det bør forskes mer på om forståelse i brøk kan ha sammenheng med prestasjoner i algebra. Kan det å jobbe med brøk gjøre jobben med algebra lettere? Det er forskning som viser at brøkstørrelseskunnskap er sett på som viktig for at elevers forbedring i algebra (Booth et al., 2014). Det er forskning som viser til at elever som har et solid grunnlag av brøkkunnskap, som har bedre forståelse av brøkstørrelser, når de begynner å lære algebra lærer de mer enn jevnaldrende med dårligere brøkstørrelseskunnskaper (Booth et al., 2014).

Ellers i brøkoppgavene gjør de norske elevene i denne studien det dårligere enn studien gjennomført i USA. I oppgave 6b, kommer elevene i denne studien ganske nær prosent riktige svar som elevene i Ginther (1976) sin studie, med 45% mot 48%. Det kan se ut som elevene i denne studien har vanskeligheter med å plassere brøk selv på ei tallinje. Hva som er årsaken til det vet vi ikke. Det er noe som kanskje kunne vært avdekket dersom det hadde vært en kvalitativ metode og det kunne blitt stilt spørsmål mens elevene løste oppgavene. Også i oppgave 5 gjør elevene i denne studien det dårligere enn studien til Ginther (1976) med sine 22% mot 44% på oppgave 5a, og 17% riktige mot 30% på oppgave 5b. At det er lavere prosent riktig svar i denne surveyen enn den som er gjennomført i USA i 1976, kan ha ulike forklaringer. Men denne delen var viktig å ta med da det er mye forskning som hevder at kunnskap om brøkstørrelse kan være viktig for algebra (Booth & Newton, 2012). Ifølge Rodrigues et al. (2016) er det viktig å fremme elevenes brøkkunnskap for å sette dem på en solid kurs mot suksess i algebra. I oppgave 6a skulle deltakerne plassere en brøk på en tallinje. Mens i oppgave 6b skulle deltakerne identifisere en merket brøk på ei tallinje. Det ser ut til at det er færre elever i studien som får til å plassere en brøk på tallinjen selv enn det er å velge hvilken brøk som er merket på tallinjen. Tidligere forskning har funnet at det kan hjelpe for elever å se brøk som tall med størrelse å bruke tallinjer (Rodrigues et al., 2016). Tallinjebaserte aktiviteter som fokuserer på forholdet mellom teller og nevner og hvordan dette bestemmer størrelse på brøken kan hjelpe elever som sliter med brøkforståelse (Rodrigues et al., 2016). Å fremme elevenes brøkkunnskap setter dem på en mer solid kurs mot suksess i algebra (Rodrigues et al., 2016). Man får ikke svar på hva som er årsaken til at bare 22 % av elevene i undersøkelsen får riktig svar på oppgave 6a, tallinjeoppgave. Om det er tallinjen i seg selv som er vanskelig eller om det er at brøkstørrelse er bestemt av forholdet mellom to tall vet man ikke. En forståelse som er kritisk for utvikling av konseptet brøkekvivalens og proporsjonalitet, som kan spille en rolle i læring av algebra, er at brøkstørrelse er bestemt av forholdet mellom to tall (Booth et al., 2014).

Ut fra hvor mange prosent av deltakerne som fikk riktig svar i de ulike kategoriene i surveyen kan man se at det var 1 % som fikk riktig svar på to av algebraoppgavene. Ut fra tabell 4 og 5 kan man se at deltakerne i studien skårer dårligere i algebraoppgavene enn i brøkoppgavene i surveyen. Flere av deltakerne i denne studien fikk til flere brøkoppgaver enn algebraoppgaver. Grunnen til dette vet man ikke ut fra denne undersøkelsen. Det kan være at algebraoppgavene var for vanskelige for deltakerne, selv om en av oppgavene ble hentet fra en lærebok fra 8.trinn, Maximum (Tofteberg et al., 2020). Det kan være at deltakerne har jobbet med et annet læreverk i matematikk og ikke har hatt samme type oppgaver innen algebra. Det kan også være at det er oppgaver som er uvante for elevene å løse. Man kan som sagt ikke få svar på hva som er årsaken til at det var få elever som fikk til algebraoppgavene, man kan bare gjøre antagelser ut fra resultatene i undersøkelsen. En annen faktor som er viktig å huske på er at denne undersøkelsen ikke tar høyde for «slurvefeil», som feil avskriving av oppgaven og regnefeil. Siden det kun tas hensyn til riktig eller galt svar. Den høyeste prosentandelen som fikk riktig på brøkoppgavene var 87% på oppgave 7a, ellers var det ikke høyere prosentandel riktig enn 45%, som var på oppgave 6b.

Ut fra tabell 5 kan man se at det var 4 % av elevene som fikk riktig svar på oppgave 9a, av disse elevene var det kun en som hadde fått riktig svar på en annen algebraoppgave, som var 9c. Oppgave 9b var det 4 % av elevene som fikk riktig svar på, disse elevene fikk ikke riktig svar på noen av de andre algebraoppgavene. I denne surveyen var det bare 1 % av elevene som har fått til oppgave 9c og 9d. Eleven som fikk riktig svar på oppgave 9 d, fikk ikke riktig svar på noen av de andre algebraoppgavene. Ifølge TIMSS undersøkelsen 2015 (Bergem, 2016, s. 22,36) hadde ungdomsskoleelever på norsk skole svake prestasjoner i algebra, som trakk gjennomsnittsscoren i matematikk ned. I denne studien var det lav prosentandel av elevene som fikk riktig på algebraoppgavene.

En faktor som kan påvirke resultatet er hele settingen med denne undersøkelsen, at forskeren personlig møtte opp i klasserommet og delte ut undersøkelsen. Denne undersøkelsen gir ikke svar på om algebraoppgavene var annerledes enn oppgaver elevene er vant med å jobbe med. Dersom man hadde hatt intervjubasert survey kunne man stilt spørsmål til de elevene som ikke fikk riktig svar på algebraoppgavene om hva som gjorde at de ikke fikk til oppgavene. I denne undersøkelsen ble det bare sett etter riktig og galt svar, det er ikke tatt hensyn til om det er elever som har skrevet av oppgaven feil eller regnet feil, har de fått feil svar så fikk de null poeng i oppgaven. Her kan det kun gjøres antagelser, da denne undersøkelsen ikke gir videre svar på hvorfor så få elever fikk riktig svar på algebraoppgavene. En annen faktor som kan påvirke resultatet kan være at noen fikk algebraoppgavene til slutt. Kanskje hadde prestasjon i algebra vært høyere om alle fikk disse oppgavene først. Når det er sagt, kunne dette ha resultert i at brøkprestasjonene ble lavere. For at rekkefølgen ikke skulle påvirke resultatene anså jeg det som nødvendig å regulere for rekkefølgen.

5.2. Resultat fra krysstabell

Ut fra funn i undersøkelsen viste krysstabellen at alle elevene som har fått til flere algebraoppgaver (fra 33% og mer) også har fått til brøkoppgaver (fra 38% og mer). Et interessant funn som kommer frem i krysstabellen var at alle elevene som har fått til algebraoppgaver har også fått til brøkoppgaver. Det er bare 3 elever som har en høyere gjennomsnittsscore i algebraoppgavene enn i brøkoppgavene. Ellers har elevene gjort det bedre i brøkoppgavene enn i algebraoppgavene, hvis man ser utfra at de har høyere gjennomsnittsscore i brøkoppgavene enn i algebraoppgavene. Ut fra undersøkelsen som er gjennomført kan man ikke vite årsaken til dette. Det er 61 elever som har fått til brøkoppgaver, men som ikke har fått noen riktige svar i algebraoppgavene.

Det kan ut fra krysstabellen se ut som at det er en sammenheng mellom brøk og algebraoppgaver ved at det er flere deltakere som ligger øverst i venstre hjørne. Elevene har da fått til lav prosentandel i brøkoppgavene og lite eller ingenting riktig i algebraoppgavene. Tidligere forskningen viser til at å fremme brøkkunnskap er viktig for suksess i algebra (Rodrigues et al., 2016). Ifølge Brown & Quinn (2007a) er brøk og algebra kritiske komponenter i matematikkundervisningen hos ungdomsskoleelever, og at elever vanligvis har strevd i disse emnene.

Det var noen elever som fikk 100% riktig i brøkoppgavene, men som ikke fikk noen riktige i algebraoppgavene. Det kan være ulike faktorer som spiller inn i dette. Faktorer kan eksempelvis være at oppgavene var for vanskelige, rekkefølgen på oppgaven, tidspunktet undersøkelsen ble gjennomført på, både i forhold til tid på dagen og hvilken ukedag. Det kan være lenge siden noen av elevene har jobbet med temaet. Elevens dagsform kan også påvirke resultatet, og det faktum at forskeren selv var inne i klasserommet og delte ut undersøkelsen. En annen faktor som kan påvirke resultatet er hvordan elevene jobber med bokstaver i regnestykker. Om elevene bruker bokstavene aritmetisk eller algebraisk. Elever som bruker bokstaver aritmetisk bruker bokstavene som midlertidige plassholdere for tall, og ikke som matematiske objekt man kan operere med (Hackenberg & Lee, 2016). Det å representere og operere med multiplikasjon av ukjente er nødvendig for å skrive og løse ligninger når elever utvikler seg i å lære algebra (Hackenberg & Lee, 2015). Elever med ulike multiplikative konsepter jobber med multiplikasjon med ukjente på ulike måter, studien indikerer at multiplikasjonskonsept spiller en viktig rolle i disse forskjellene, og studiet kan hjelpe med å forklare skillet mellom aritmetisk og algebraisk bokstavbruk (Hackenberg & Lee, 2015). Tidligere forskning hevder at hvis algebra er for alle, må alle elver først bli kjent med og jobbe flytende med brøk (Brown & Quinn, 2007b). Elevene i denne studien er flinkere i brøk enn i algebra, som man kan se ut fra resultatene av krysstabellen. Deltakerne i denne studien fikk høyere gjennomsnittsscore i brøk- enn i algebraoppgavene. Jeg vet ikke om, dersom elevene jobber mer med brøkoppgaver om det påvirker algebraforståelsen, det hadde vært interessant og forsket videre på. Selv om det ut fra statistiske analyser viser at det er en sammenheng mellom brøk og algebra får vi ikke ut fra denne undersøkelsen et svar på den nøyaktige koblingen mellom forståelse i brøk og algebra.

5.3. Resultat fra korrelasjonsanalyse

Ut fra resultater av Pearson’s korrelasjon kan man se at det er statistisk signifikant korrelasjon mellom gjennomsnittsscoren i brøk- og algebraoppgavene. Ut fra disse resultatene kan man si at det er statistisk signifikant sammenheng mellom forståelse av brøk og prestasjoner i algebra hos ungdomsskoleelever i undersøkelsen. Resultatene sier ikke noe om hvordan denne korrelasjonen er, eller årsaken til korrelasjonen. Tidligere forskning har også rapportert funn av sammenheng mellom brøkforståelse og algebraytelse (DeWolf et al., 2015).

Selv om sammenhengen kommer ut som en positiv korrelasjonskoeffisient er den ikke nødvendigvis enveis, men kan virke begge veier (Rød, 2017, s. 169). Som i denne undersøkelsen får vi en positiv korrelasjonskoeffisient mellom de seks ulike parene i gruppene instrumentelle brøkoppgaver, relasjonelle brøkoppgaver, brøkoppgaver og algebraoppgaver. Dette resultatet sier noe om at det er en tendens av sammenheng, men det kommer ikke frem hvilken sammenheng det er, det kommer ikke frem hvilken av variablene som er avhengig av hverandre. Det er forskning som har vist at når elever lærer algebra forbedres også brøkkunnskap (Booth et al., 2014). Resultatene i denne undersøkelsen viser at det er en sammenheng mellom forståelse i brøk og algebra, men ikke årsaken til sammenhengen. Resultatet med at det finnes en sammenheng mellom brøk og algebra er i henhold til tidligere forskning (Booth et al., 2014; DeWolf et al., 2015). Det kan være samvariasjon mellom to variabler uten at det er årsakssammenheng mellom dem (Rød, 2017, s. 168), for å få svar på dette må sammenhengen undersøkes nærmere. Dersom man kan utelukke alternative forklaringer på at det er en sammenheng mellom to fenomener er årsakssammenhengen robust (Johannessen et al., 2016, s. 308). I denne studien kan man ikke utelukke alternative forklaringen på sammenhengen.

De statistiske testene tyder på at det er en sammenheng mellom ungdomsskoleelevers forståelse av brøk og prestasjoner i algebra. Det er en sterkere korrelasjon mellom de relasjonelle brøkoppgavene og algebraoppgavene, enn det er mellom de instrumentelle brøkoppgavene og algebra. Tidligere forskning viste at relasjonell forståelse av brøker er sterke antagelser for algebraytelse (DeWolf et al., 2015). Deltakerne som fikk 100% riktig på de relasjonelle brøkoppgavene fikk høyere gjennomsnittsscore i algebraoppgavene enn de deltakerne som fikk 100% riktig på de instrumentelle brøkoppgavene.

5.4. Resultat fra One-Way ANOVA

Ut fra resultatene fra One-Way ANOVA testene, gjennomført i analyseverktøyet SPSS, kan man se at det er signifikante forskjeller mellom gruppene og hvor mye elevene har fått til både gjennomsnittscoren i algebraoppgavene og i brøkoppgavene, mellom instrumentelle brøkoppgaver og relasjonelle brøkoppgaver, mellom oppgavene innenfor instrumentell brøk og algebra, og mellom relasjonelle brøkoppgaver og algebra.

Ut fra resultatene av ulike analyser i denne oppgaven kan man se at det er en sammenheng mellom deltakernes forståelse av brøk og prestasjoner i algebra, som er i tråd med tidligere forskning.

Om man jobber med brøkregning, i oppgaver hvor man må kunne regler for å utføre regningen, vil det si at oppgaven måler instrumentell forståelse. Dersom deltakerne også har relasjonell forståelse som de brukes i algebra får man ut fra denne studien ikke vite svar på. Dette må det forskes mer på det for å finne et klart svar.

I denne studien kom det frem ved bruk av ulike analysemetoder at det er en sammenheng mellom forståelse i brøk og algebra, men det kommer ikke frem akkurat hvordan denne sammenhengen er, som samsvarer med tidligere funn. Det er ved tidligere forskning funnet at det er en sammenheng mellom brøk og algebra, men den nøyaktige koblingen er ukjent (Booth et al., 2014; DeWolf et al., 2015).

Når det kommer til læreplanen i matematikk og at den er nevnt innledningsvis var den tatt med fordi den var til støtte når valget av utvalg skulle tas, og når oppgavene til surveyen skulle velges. Det ble mest naturlig å ta med 8.- og 9.trinn da algebra står som læreplanmål etter 8.trinn. Når det gjelder brøk står det som læreplanmål etter 7.- og 8.trinn. Da skulle det passe fint ut fra læreplanmålene at utvalget ble 8.- og 9.trinn. Noen av deltakerklassene hadde ikke jobbet med brøk på et år, det var hovedsakelig 9.trinn. Det er noe som kan påvirke resultatene, noen av deltakerne sa at de ikke husket brøk. Mens noen av 8.trinn deltakerklassene hadde jobbet med brøk ganske nylig. I denne surveyen fikk ikke elevene lov til å bruke hjelpemidler, fordi det var forståelsen som skulle undersøkes og ikke evne til å lete og bruke regler skrevet opp i ei regelbok, som da kun ville målt instrumentell forståelse. I læreplanen i matematikk, *fagfornyelsen*, kan man lese at det er fokus på resonnement og argumentasjon under underveisvurderingen fra 5.-10.trinn. Det kan være enklere å argumentere og resonnere når man løser oppgaver dersom man har forstått hvorfor (relasjonell forståelse), og ikke bare vet hvordan (instrumentell forståelse).

Ifølge Skemp (1976) handler relasjonell forståelse om at man vet hvordan og hvorfor. Ut fra underveisvurderingen i læreplanen i matematikk kan man, som nevnt innledningsvis, lese at det fokuseres mye på at elevene skal resonnere og argumentere for matematiske løsninger og sammenhenger (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det er også fokus på at elevene skal utforske matematikk og løse matematiske problem gjennom å være kreativ, resonnere og reflektere (Utdanningsdirektoratet, 2020). Å kunne resonnere og argumentere for løsninger og matematiske sammenhenger skal derfor settes høyt i matematikk. Ut fra definisjonen i denne oppgaven (Skemp, 1976), handler relasjonell forståelse om å forstå hvorfor og det å se sammenhenger, det er lettere å resonnere og argumentere dersom man har forståelse om hvorfor når man løser oppgaver. Målene i læreplanen i matematikk under underveisvurderingen antyder at elevene må lære å resonnere, argumentere og utforske matematikk for å løse matematiske problemer. Siden dette er en tverrsnittstudie kan man bare spekulere, man får ikke svar på hvordan elevene har jobbet med brøk og algebra tidligere. Denne studien har bare tatt for seg riktige og gale svar ut fra undersøkelsen. Det gir ikke noe bilde av hvordan elevene er til å resonnere og argumentere. Denne undersøkelsen har noen brøkoppgaver som måler relasjonell forståelse, men dersom man hadde intervju parallelt med oppgavene i surveyen ville man fått dypere innsikt i den relasjonelle forståelsen hos elevene. Ifølge Empson et al. (2010) er relasjonell tenkning en kritisk forløper for å lære algebra med forståelse, fordi hvis barn forstår regnestykket de lærer, er de bedre forberedt til å løse problemer i algebraemnet. Brøkkunnskap er ifølge Hackenberg & Lee (2016) grunnlaget for typiske algebraemner fordi resonnement med brøk kan fremme bruk av bevissthet om matematiske egenskaper som er viktige i algebra.

Denne undersøkelsen gir ikke svar på hvordan elevene har jobbet med fagstoffet/læreplanen i matematikk tidligere. Det kan man bare gjøre antagelser om, og noe man eventuelt kan forske videre på.

6. Avslutning

6.1. *Oppsummering*

Denne studien har hatt som formål å undersøke om det er sammenheng mellom ungdomsskoleelevers forståelse av brøk og prestasjoner i algebra. For å undersøke dette ble en kvantitativ tilnærming brukt, det ble lagd en survey med oppgaver i brøk og algebra. Undersøkelsen ble gjennomført på fire ulike ungdomsskoler på 8.-og 9.trinn. Det var 102 deltakere med i studien.

Basert på de undersøkelsene som er blitt presentert i kapittel 4 kan man slå fast at det er en sammenheng mellom forståelse av brøk og prestasjoner i algebra hos ungdomsskoleelevene som deltok i undersøkelsen. På denne måten er funn fra denne undersøkelsen i tråd med tidligere forskning, det er vanskelig å argumentere for at det ikke er en sammenheng. Men man finner ikke ut fra denne undersøkelsen et klart svar på hvordan sammenhengen er. Dermed vet man ikke om det er algebra som er avhengig av brøk eller om det er brøk som er avhengig av algebra, dette må det forskes mer på.

6.2. *Hovedfunn*

Ut fra analysene gjort i denne studien kan man se at det er en sammenheng mellom ungdomsskoleelevers forståelse av brøk og prestasjoner i algebra. De fleste deltakerne fikk høyere gjennomsnittspoeng i brøkoppgavene enn i algebraoppgavene. Et interessant funn var at det er høyere korrelasjon mellom de relasjonelle brøkoppgavene og algebraoppgavene enn det var mellom de instrumentelle brøkoppgavene og algebraoppgavene.

6.3. *Konklusjon*

Problemstillingen i denne oppgaven er:
Hvilken sammenheng er det mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og deres prestasjoner i algebra?

Analysemetodene indikerer at det er en sammenheng mellom ungdomsskoleelevers forståelse i brøk og deres prestasjoner i algebra. Sammenhengen er at elever som har høyere gjennomsnittskår på brøkoppgavene som måler relasjonell forståelse har høyere gjennomsnittlig algebraprestasjon. Videre er sammenhengen at det en sterkere korrelasjon mellom de relasjonelle brøkoppgavene og algebraoppgavene, enn det er mellom de instrumentelle brøkoppgavene og algebraprestasjon. Dette kan man se ut fra korrelasjonsanalysen, som viste at det er sterkere korrelasjon mellom de relasjonelle brøkoppgavene og prestasjon i algebra (Pearsons r = 0,459), enn det var mellom de instrumentelle brøkoppgavene og prestasjoner i algebra (Pearsons r = 0,330).

6.4. Kritisk refleksjon

Selv om resultatene indikerer at det er en sammenheng mellom elevenes forståelse av og brøk og algebraprestasjoner har jeg ikke undersøkt hvordan denne forståelsen er i dybden. Det kunne derfor ha vært interessant å gjennomføre intervjuer i tillegg til surveyen med ungdomsskoleelever, om deres forståelse av brøk og algebraprestasjoner. Slik at det er mulig å gå mer i dybden enn hva man kan gjøre i en spørreundersøkelse. Dersom en intervjuer elevene, kan det gi mer innsikt i hvordan elevene tenker når de løser oppgavene

Det at elevene fikk høyere gjennomsnittsscore i brøkoppgavene enn i algebraoppgavene, kan man ikke vite grunnen til. Om oppgavene innen algebra var for vanskelig for deltakerne eller om de ikke forstår algebra, er vanskelig å få svar på ved bruk av en kvantitativ undersøkelse. Ved bruk av en kvalitativ undersøkelse kunne man stilt spørsmål i intervju samtidig som elvene løste oppgaver.

Noe som er viktig å tenke på er at elevene som fikk riktig svar var de som ble kodet riktig, mens elevene som fikk feil svar ble kodet feil. En svakhet med dette er at de elevene som eventuelt har slurvefeil som feilavskriving eller følgefeil kan ha forståelse i brøk og algebra, men vil ikke i denne undersøkelsen fanges opp. De blir da feilaktig kodet til feil. Dersom en hadde hatt intervju samtidig som elevene løste oppgaver hadde det vært mulig å fange opp i slike feil. En annen ting som jeg hadde håpet på å få i denne surveyen var utregning, men det var svært få elever som hadde vist utregning, selv om det sto på oppgavene og det ble forklart på starten ved introduksjon til undersøkelsen.

Undervisningsmetoder kan også ha betydning for hvordan elevene besvarte denne undersøkelsen, det er flere ulike klasser som har deltatt. Siden dette kun er en tverrsnittstudie får en ikke noe svar på hvordan elevene har jobbet med fagstoffet tidligere, man får bare et øyeblikksbilde og kan gjøre antagelser basert på besvarelsene i undersøkelsen.

For å styrke studiens validitet ble valget å bruke samme struktur på oppgavene som i artikkelen til Ginther et al. (1976). Det ble gjennomført en pilotundersøkelse, noe som er med på å styrke studiens validitet. Men det er ulike faktorer som kan påvirke resultatet til studiens deltakere.

Elevenes dagsform kan ha stor betydning for måten de svarer på oppgavene. Dersom de har en god dagsform, kan de være mer motiverte for å gjennomføre spørreundersøkelsen. Har de en dårlig dagsform kan det påvirke hvordan de løser oppgavene. Tidspunktet for når undersøkelsen ble gjennomført, kan også ha betydning for resultatet. De deltakerne som gjennomførte surveyen på slutten av dagen, kan ha hatt dårligere resultater enn de som hadde surveyen tidligere på dagen. Det kan også påvirke resultatet om elevene gjennomførte undersøkelsen på slutten av uka så vel som første time på starten av uka. Rekkefølgen på oppgavene kan være en feilkilde, for å begrense denne feilkilden ble det delt ut ulike oppgavesett. Men selv om dette ble gjort kan det oppgavenes rekkefølge være en faktor som påvirker resultatet. Tidsbruk på oppgavene kan påvirke resultatet, dersom undersøkelsen tar veldig lang tid kan noen elever bli lei og ikke orke å gjøre alt ferdig, og de siste kan eventuelt bli forstyrret av elever som gjør seg raskt ferdig.

6.5. Ytre validitet

Ytre validitet handler om i hvilken grad resultater fra en undersøkelse kan overføres i rom og tid (Johannessen et al., 2016, s. 387).

Omgivelsene undersøkelsen foregår i kan påvirke resultatene. Det at forskeren selv, som ukjent for elevene, kommer inn i klassen med en undersøkelse kan påvirke resultatene. Det at deltakerne kan synes det ser ut som det er mange oppgaver i surveyen kan påvirke resultatene. Ginther et al. (1976) sin forskning ble gjennomført i USA.

Siden populasjonen i denne undersøkelsen er elever som undervises i matematikk på 8.- og 9.trinn bosatt i Nordland fylke, vil det være misvisende dersom man overførte resultatet til å gjelde alle ungdomsskoleelever i andre land også. Det hadde vært svært interessant å gjennomføre studien med et større utvalg, for å se hvordan resultatene endrer seg.

Ifølge Johannessen et al. (2016, s. 388) er den beste måten å kontrollere for ytre validitet på å gjennomføre samme undersøkelse i forskjellige kontekster og på ulike tidspunkter, eventuelt sammenlikne resultater fra tilsvarende undersøkelser. Siden dette er en masteroppgave som skal ferdigstilles på seks måneder er det ikke mulighet til å kontrollere ytre validitet på denne måten. Denne surveyen ble gjennomført på fire ulike ungdomsskoler og i åtte ulike klasser på ulike tidspunkter. Dette kan også være med på å kontrollere ytre validitet, da det ikke var store forskjeller i besvarelsene fra de ulike klassene. Alt er til slutt satt sammen til et dokument.

Hvilken tidsepoke undersøkelsen gjennomføres i kan også ha betydning, det er ikke sikkert at resultatene fra en undersøkelse som ble gjennomført i 1976 gjelder i 2022, (Johannessen et al., 2016, s. 388). Dette er noe å være oppmerksom på når det er brukt en artikkel fra 1976 som inspirasjon til oppgavene. Dette er også grunnen til at oppgavene ble litt endret for å være mer aktuelt for norske ungdomsskoleelever.

6.6. Forslag til videre forskning

Siden dette er en kvantitativ studie, kommer det ikke fram hvilke tanker elevene har når de svarer på oppgavene, man får heller ikke undersøkt hva som ligger i gale svar. Veien videre vil derfor være å bruke flere metoder for å få et bedre bilde av forskningen. Kvalitativ metode kan brukes for å finne ut mer om tankeprosessene bak utregningene til deltakerne, for å forstå begrepet forståelse mer i dybden. Det kan også være en mulighet å bruke både kvantitativ- og kvalitativ metode, altså «mixed-method» for å få et rikere datamateriell. Dersom man bruker både kvalitativ og kvantitativ metode har man en større mulighet til å undersøke sammenhengen mellom brøk og algebra hos ungdomsskoleelever i dybden.

Litteraturliste

Aksu, M. (1997). Student Performance in Dealing With Fractions. *The Journal of educational research (Washington, D.C.), 90*(6), 375-380. https://doi.org/10.1080/00220671.1997.10544595

Bergem, O. K. (2016). 2 Hovedresultater i matematikk. I *Vi kan lykkes i realfag* (s. 22-44). Universitetsforlaget. https://doi.org/10.18261/97882150279999-2016-03

Booth, J. L. & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary educational psychology*, *37*(4), 247-253. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Booth, J. L., Newton, K. J. & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *J Exp Child Psychol*, *118*, 110-118. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.09.001

Bratberg, Ø. (2021). *Tekstanalyse for samfunnsvitere* (3. utg.). Cappelen Damm akademisk.

Brown, G. & Quinn, R. J. (2007a). Fraction proficiency and success in algebra : what does research say? *Australian mathematics teacher*, *63*(3), 23-30.

Brown, G. & Quinn, R. J. (2007b). Investigating the relationship between fraction proficiency and success in algebra. *Australian mathematics teacher*, *63*(4), 8-15.

DeWolf, M., Bassok, M. & Holyoak, K. J. (2015). From rational numbers to algebra: Separable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *J Exp Child Psychol*, *133*, 72-84. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.01.013

Empson, S. B. & Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: fractions and decimals*. Heinemann.

Empson, S. B., Levi, L. & Carpenter, T. P. (2010). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. I *Early algebraization: Cognitive, Curricular, and instructional perspectives* (s. 409-428). New York: Springer.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Front Psychol*, *4*, 715-715. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715

Ginther, J., Ng, K. & Begle, E. G. (1976). A Survey of Student Achievement with Fractions. SMESG Working Paper No. 20.

Hackenberg, A. J. & Lee, M. Y. (2015). Relationships Between Students' Fractional Knowledge and Equation Writing. *Journal for research in mathematics education*, *46*(2), 196-243. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.2.0196

Hackenberg, A. J. & Lee, M. Y. (2016). Students' distributive reasoning with fractions and unknowns. *Educational studies in mathematics*, *93*(2), 245-263. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9704-9

Høgheim, S. (2020). *Masteroppgaven i GLU* (1. utg.). Fagbokforlaget.

Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Abstrakt.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C. W. G., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2019 - Kortrapport*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Lee, M. Y. & Hackenberg, A. J. (2014). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: the case of Willa *International journal of science and mathematics education*, *12*(4), 975-1000. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9442-8

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational studies in mathematics*, *40*(2), 173-196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Lysø, K. O. (2017). *Sannsynlighetsregning og statistisk metodelære* (3. utg.). Caspar forl.

Løvås, G. G. (2018). *Statistikk for universiteter og høgskoler* (4. utg.). Universitetsforl.

Norsk senter for forskningsdata. (u.å.). *Hvordan gjennomføre et prosjekt uten å behandle personopplysninger?* Hentet 03. desember 2021 fra https://www.nsd.no/personverntjenester/oppslagsverk-for-personvern-i-forskning/hvordan-gjennomfore-et-prosjekt-uten-a-behandle-personopplysninger/

Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori*. Fagbokforl.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Ringdal, K. (2013). *Enhet og mangfold: samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (3. utg.). Fagbokforl.

Rodrigues, J., Dyson, N. I., Hansen, N. & Jordan, N. C. (2016). Preparing for Algebra by Building Fraction Sense. *Teaching exceptional children*, *49*(2), 134-141. https://doi.org/10.1177/0040059916674326

Rød, J. K. (2017). *Innføring i GIS og statistikk: verktøy for å beskrive verden* (2. utg.). Fagbokforl.

Schober, P., Boer, C. & Schwarte, L. A. (2018). Correlation coefficients: appropriate use and interpretation. *Anesthesia & Analgesia*, *126*(5), 1763-1768.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching 77*, 20-26.

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Bråthe, L. T., Stedøy, I. & Alseth, B. (2020). *Maximum 8: matematikk for ungdomstrinnet* (2. utg.). Gyldendal.

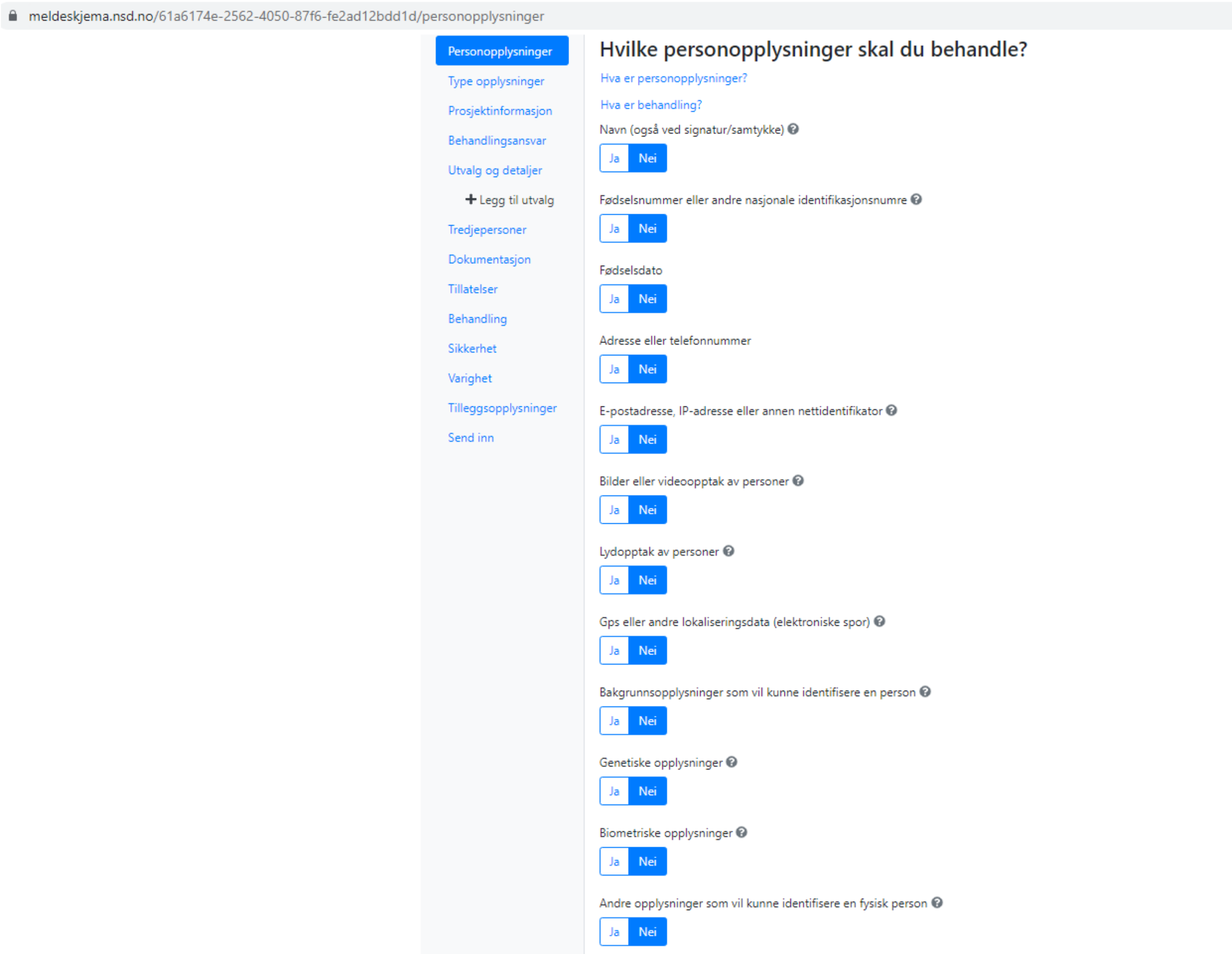
Ubøe, J. & Jørgensen, K. (2008). *Statistikk for økonomifag* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M., Wray, J. A. & Brown, E. T. (2019). Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally. I *Elementary school mathematics* (10. utg., s. 13-29). Pearson.

Wæge, K. & Nosrati, M. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*. Matematikksenteret, . Hentet 06. april 2022 fra https://utdanningsforskning.no/artikler/2015/sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk/

Vedlegg 1 – Meldeskjema NSD


meldeskjema.nsd.no/61a6174e-2562-4050-87f6-fe2ad12bdd1d/personopplysninger

- Personopplysninger
- Type opplysninger
- Prosjektinformasjon
- Behandlingsansvar
- Utvalg og detaljer
- + Legg til utvalg
- Tredjepersoner
- Dokumentasjon
- Tillatelser
- Behandling
- Sikkerhet
- Varighet
- Tilleggsopplysninger
- Send inn

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

Hva er personopplysninger?

Hva er behandling?

Navn (også ved signatur/samtykke)
Ja Nei

Fødselsnummer eller andre nasjonale identifikasjonsnumre
Ja Nei

Fødselsdato
Ja Nei

Adresse eller telefonnummer
Ja Nei

E-postadresse, IP-adresse eller annen nettidentifikator
Ja Nei

Bilder eller videoopptak av personer
Ja Nei

Lydopptak av personer
Ja Nei

Gps eller andre lokaliseringsdata (elektroniske spor)
Ja Nei

Bakgrunnsopplysninger som vil kunne identifisere en person
Ja Nei

Genetiske opplysninger
Ja Nei

Biometriske opplysninger
Ja Nei

Andre opplysninger som vil kunne identifisere en fysisk person
Ja Nei

Vedlegg 2 - Oppgavesett 1
Spørreskjema

Kryss av hvilket kjønn du er: Jente ☐ Gutt ☐

Oppgave 1. Regn ut og vis utregning

a) $\frac{3}{4} + 2$

b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{1}{6}$

Oppgave 2. Regn ut og vis utregning

a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{9}$

b) $5 - \frac{2}{4}$

Oppgave 3. Regn ut og vis utregning

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$

b) $\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}$

Oppgave 4. Regn ut og vis utregning

a) $\frac{5}{6} : \frac{4}{15}$

b) $\frac{3}{8} : 8$

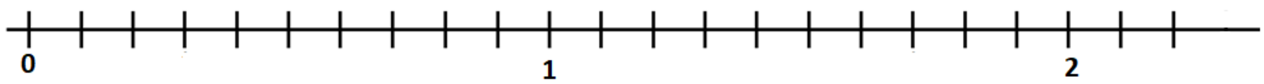
Oppgave 5. Hvilket tall mangler i boksen?

a) $3 \cdot \square = 1$

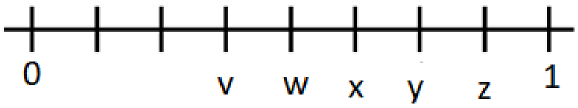
b) $\frac{1}{4} \cdot \square \cdot 3 = 3$

Oppgave 6.

a) Plasser brøken på tallinjen $\frac{8}{5}$. Sett ring rundt riktig alternativ



b) Hvilken av bokstavene passer til brøken $\frac{3}{4}$? Sett ring rundt riktig alternativ



i) v ii) w iii) x iv) y v) z

Oppgave 7.

a) Hver figur har deler som er skravert/farget. Den fargelagte delen er en brøk. Du skal velge en brøk på venstre side som er samme brøk som de fargede delene i figurene. Sett ring rundt svaralternativet som du mener passer til figuren.

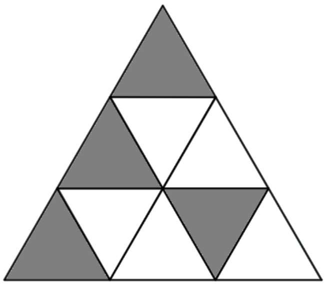
i) $\frac{5}{4}$

ii) $\frac{5}{9}$

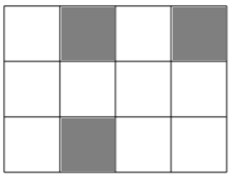
iii) $\frac{4}{9}$

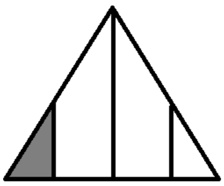
iv) $\frac{9}{4}$

v) $\frac{4}{5}$

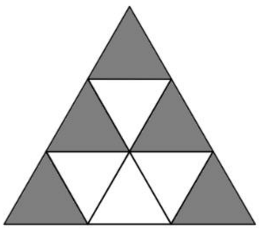


b) Sett ring rundt figuren som du mener passer til brøken $\frac{1}{4}$

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

Oppgave 8. Vis utregning i oppgavene.

a) I et elevrådsvalg fikk Lise, Trym og Ola stemmer. Lise fikk $\frac{1}{3}$ av stemmene og Trym fikk $\frac{1}{6}$ av stemmene. Hvor stor brøkdel av stemmene fikk Ola?

b) Du har en halv meter stoff som du skal sy skjerf av. For å lage et skjerf trengs det en åttedel meter stoff. Hvor mange skjerf kan du lage?

Oppgave 9. Regn ut og vis utregning

a) $8x = \frac{3}{8}$

b) $\frac{x}{4} + \frac{5}{8} = \frac{3}{8} + \frac{x}{2}$

c) $\left(\frac{x}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} - x = -\frac{13}{15}$

d) Trekk sammen konstantleddene og ledd med samme variabel (skriv så enkelt som mulig)

$$\frac{5}{3}a - 2b - \frac{2}{5} + a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}$$