MASTEROPPGAVE

Emnekode: MAT5006 Navn: Torbjørn Smedsund

Distributivitet og faktorisering i algebra

En undersøkelse fra et structure sense perspektiv

Dato: 15. mai, 2023 Totalt antall sider: 69

Nord universitet

www.nord.no

Forord

Etter fem år med studier er det nå med en sterk følelse av oppnåelse og stolthet tid for å levere denne masteroppgaven. Når jeg ser tilbake på min tid på Nesna er den preget av både pandemi, en overhengende trussel om nedleggelse, og noen personlige skuffelser og sorger. Derfor føles det naturlig å inkludere noen ord fra selveste Snoop Dogg som resonerer med meg i dette øyeblikket:

> I want to thank me for believing in me, I want to thank me for doing all this hard work […] I want to thank me for never quitting. I want to thank me for always been a giver and trying to give more than I receive. I want to thank me for trying to do more right than wrong. I want to thank me for just being me at all times.

Det hadde dog ikke vært mulig å fullføre dette studiet og denne oppgaven uten den oppfølgningen og oppmuntringen jeg har mottatt fra de som har jobbet hos matematikkseksjonen her på Nesna i løpet av disse fem årene. Her må veileder og professor Mohamed el Ghami, og Maria K. Herset nevnes spesielt.

Jeg har også vært så heldig å bli formet som lærer og menneske av radarparet Marian Børli Sivertsen og Anne Mette Bjørnvik Rosø. Jeg håper og tror at vi har gjort et like godt inntrykk på dere som dere har på oss. De som har gjort meg til naturfagslærer må også nevnes, spesielt Frode H. Henanger og Atle Ivar Olsen som har vært der fra starten. Tusen takk til dere alle sammen!

Jeg må også takke alle som har vært med på å gjøre Nesna til Nesna. Det har aldri vært tvil om at lange søvnløse turer med hurtigruten har vært verdt det for å kunne tilbringe fine dager og kvelder med flotte mennesker. Enten det har vært rib-turer, grilling, fest, quiz, kvelder med brettspill, eller noe så kjedelig som en kaffepause. Her må jeg ty til «ingen nevnt, ingen glemt» ellers risikerer jeg å sprenge ordgrensen.

På vegne av MAGLU '18 velger jeg også å rette en takk til Kristian Sivertsen og Hans Petter Sørensen for deres bidrag til å gjøre tilværelsen her på Nesna en uforglemmelig en.

#LANESNALEVE

Nesna, 15/5 - 2023

Sammendrag

Hensikten med denne oppgaven er å bidra til en forbedring av norske elevers prestasjon innen algebra i henhold til læreplanen, og dermed også på internasjonale undersøkelser som TIMSS, gjennom å besvare problemstillingen: «*I hvilken grad kan tiende klassinger benytte seg av den distributive lov i algebra, gjennom gjenkjenning av struktur?*»

Masteroppgaven bygger på et postpositivistisk ståsted og har en kvantitativ tilnærming. En tverrsnittsundersøkelse ble gjennomført ved hjelp av digitalt spørreskjema på elever fra tiende trinn. Utvalget kom fra skoler i området Nordland og gamle Troms fylke trukket ut ved hjelp av random sampling og bestod av 160 respondenter. Ved hjelp av excel og SPSS ble datamaterialet kodet og analysert. En korrelasjonsanalyse og flere hypotesetester for å undersøke forskjeller mellom kategorier av spørsmål ble gjennomført. Som en konsekvens av datamaterialet ble det kun benyttet ikke-parametriske tester.

Analysen viser at respondentene har misoppfatninger rundt betydningen av parentes som gjør at disse ignoreres. Under faktorisering har elevene misoppfatninger som fører til at de gjør en ufullstendig faktorisering. Det dårlige resultatet i kommutativitet støtter opp om den eksisterende litteraturen som påpeker misoppfatninger rundt den kommutative lov. Besvarelsen i kategorien faktorisering peker også mot en manglende bevissthet rundt identitetselementet til multiplikasjon. Analysen viser også at elevene presterer signifikant dårligere enn hva som er forventet av Fagfornyelsen når det kommer til faktoring.

Konklusjonen på denne oppgaven blir dermed at tiendeklassingene i denne studien i stor grad klarer å benytte seg av den distributive lov for å distribuere en faktor over en sum på tross av oppgaver med strukturer som i økende grad var vanskeligere å identifisere. Men elevene klarer i liten grad å benytte den distributive lov til å faktorisere algebraiske uttrykk hvor strukturen av den distributive lov i økende grad er skjult.

Studiens støtte av tidligere forskning tyder på at et fokus på parentes som et signal om multiplikasjon vil ha gevinst i undervisning av algebra. Resultatet innenfor faktorisering tyder på at dette er noe som må vektes tyngre i undervisningen, samtidig som man bør klare å innlemme identitetselementet til multiplikasjon i undervisningen.

Nøkkelord: algebra, den distributive lov, den kommutative lov, notasjon, faktorisering, ungdomsskole, tiende trinn, Fagfornyelsen, kvantitativ, digitalt spørreskjema, nettskjema, TIMSS, Nordland, Troms

Abstract

The purpose of this thesis is to contribute to an improvement of Norwegian students' performance in algebra in relation to the curriculum, and thus also in international surveys like TIMSS, by answering the research question: "To what extent can tenth graders utilize the distributive property in algebra, through recognition of structures?"

The master's thesis is based on a post-positivist point of view and has a quantitative approach. A cross-sectional survey was carried out using a digital questionnaire on pupils from the tenth grade. The sample came from schools in the Nordland and former Troms county area drawn using random sampling and consisted of 160 respondents. Using Excel and SPSS, the data was coded and analysed. A correlation analysis and several hypothesis tests to examine differences between categories of questions were conducted. As a consequence of the nature of the data material, only non-parametric tests were used.

The analysis shows that the respondents have misconceptions about the meaning of parentheses, which means that these were ignored. During factorization, students have misconceptions that lead to them doing an incomplete factorization. The poor result connected to the commutative property supports the existing literature that points to misconceptions related to this property. The answer in the factorization category also points to a lack of awareness of the identity element of multiplication. The analysis also shows that students perform significantly worse than what is expected by Fagfornyelsen when it comes to factoring.

The conclusion of this task is thus that the tenth graders in this study are largely able to use the distributive law to distribute a factor over a sum despite tasks with structures that were increasingly difficult to identify. But the students are only slightly able to use the distributive law to factor algebraic expressions where the structure of the distributive law is increasingly hidden.

The study's support of previous research suggests that a focus on parentheses as a signal of multiplication will have benefits in teaching algebra. The result within factorization suggests that this is something that needs to be weighted more heavily in teaching, while at the same time one should be able to incorporate the identity element of multiplication into teaching.

Keywords: algebra, distributive property, commutative property, notation, factorization, lower secondary school, tenth grade, Fagfornyelsen, quantitative, survey, online questionnaire, TIMSS, Nordland, Troms

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1.0 Innledning

Som en innledning til denne masteroppgaven vil jeg først gjøre rede for både bakgrunnen og avgrensningen for denne oppgaven. Jeg vil videre legge fram oppgavens hensikt og mål slik at det kommer klart fram hvilke føringer som er lagt for denne oppgaven. Som en del av grunnlaget for oppgaven vil jeg også inkludere en avklaring av hvilke forventninger Fagfornyelsen legger for beherskelse av den distributive lov. Avslutningsvis vil jeg legge fram en beskrivelse av oppgavens struktur slik at den fremstår oversiktlig og forutsigbar.

1.1 Bakgrunn

Denne masteroppgaven er skrevet i en kontekst og jeg vil her beskrive hva som er bakgrunnen for denne oppgaven, og hvordan denne har vært med på å forme oppgaven. Jeg vil også beskrive hvordan jeg har valgt å avgrense oppgaven basert på litteratur jeg har gått gjennom i forbindelse med tidligere prosjekter med en lignende bakgrunn.

1.1.1 Dårlige resultater internasjonalt

Siden 1995 har norske elever deltatt i den internasjonale TIMSS undersøkelsen (Universitetet i Oslo, 2021). Som et resultat av dette har vi i Norge kunnet sammenligne prestasjonene til norske elever i naturfag og matematikk med elever i rundt 60 andre land over tid (Utdanningsdirektoratet, u.å.). På barneskolen gjør norske elever det godt i både matematikk og naturfag (Ghosh & Grøtvik, 2020; Tønnessen, 2020), men resultatene på ungdomsskolen har ikke vært like gode. Noe som vi igjen ser på resultatene fra TIMSS undersøkelsen i 2019 (Kaarstein et al., 2020).

En undersøkelse av norske ungdomsskoleelevers resultater fra TIMSS viser at algebra har vært elevenes dårligste tema over tid, og på tross av en positiv trend fra 2015 til 2019 så ligger norske elever fortsatt bak de svenske og finske når det kommer til algebra (Kaarstein et al., 2020). Dette er også bare en sammenligning med de skandinaviske landene. Sammenligner vi med andre naturlige europeiske og asiatiske referanseland blir forskjellen enda mer påfallende (Grønmo, 2013). Resultatene fra TIMSS 2011 ble også beskrevet som kritiske da disse ble lagt fram, i så stor grad at det kunne forklare noen av problemene i fysikk på videregående skole (Tønnessen, 2016). En signifikant nedgang fra 2011 til 2015 kombinert med en ikke-signifikant framgang fra 2015 til 2019 tyder dermed på at tilstanden på algebra kunnskapene til norske ungdomsskoleelever fortsatt er på et kritisk nivå (Bergem & Kaarstein, 2016).

Dette peker mot at det eksisterer et tema spesifikt problem som må diagnostiseres innenfor algebra. Noe som setter et søkelys på behovet for oppdatert og god forskning på tilstanden på, og effektiviteten av, norsk algebra undervisning.

1.1.2 Innføringen av Fagfornyelsen

I 2020 ble det innført en ny læreplan for både grunnskolen og videregående skole, og avgangselevene våren 2023 er første årgang med elever som går ut fra grunnskolen etter å ha fulgt denne nye læreplanen hele ungdomsskolen. I denne læreplanen er det flere betydelige endringer som er gjort fra LK06. Sentrale endringer for matematikk vil være arbeid med kjerneelementer, større søkelys på programmering, kompetansemål for alle trinn bortsett fra første, og algebra og tallforståelse som gjennomgående tema (Utdanningsdirektoratet, 2020a). I den anledning er det interessant å se på om innføringen av den nye læreplanen ser ut til å ivareta en tilfredsstillende prestasjon hos elevene, eller om det i omstillingen er elementer av algebra som blir neglisjert på stross av det økte søkelyset på algebra.

1.1.3 Avgrensning

En kombinasjonen av temaene algebra og Fagfornyelsen ville vært alt for vidt for en oppgave som denne, så jeg har laget meg noen rammer for denne masteroppgaven. Under tidligere arbeid innen temaet algebra kom det fram av litteraturene at mange av elevenes vanskeligheter i algebra stammer fra en manglende forståelse av konsepter i aritmetikken, og overgeneraliseringer i overgangen fra aritmetikk til algebra (Aydin-Güc & Aygün, 2021; Bush & Karp, 2013; Wang, 2015; Yansa et al., 2021). Basert på dette falt det meg naturlig å se på de mest grunnleggende elementene og lovene som gjelder i matematikken. Blant disse falt valget på den distributive- og den kommutative lov (Hofmann, 2019a, 2019b). Ikke bare fordi man kan oppleve mange misoppfatninger rundt applikasjonen av disse lovene både i aritmetikk og algebra (Andini & Prabawanto, 2020; Maffia & Mariotti, 2017; Pournara et al., 2016), men også den distributive lovs viktighet i arbeidet med algebraiske uttrykk da den legger grunnlaget for blant annet faktorisering og algoritmene for multiplikasjon (Hofmann, 2019a; Hurst & Huntley, 2020).

1.2 Hensikt

Med utgangspunkt i bakgrunnen til denne studien kan man si at hensikten med denne masteroppgaven er å bidra til en forbedring av norske elevers prestasjon innen algebra i henhold til læreplanen, og dermed også internasjonale undersøkelser. I oppgaven vil jeg prøve å belyse hvordan elever presterer på oppgaver som omfatter distribusjon og faktorisering av variabler på en hensiktsmessig måte slik at mulige hull i norske elevers kompetanse kan avdekkes. Ved å avdekke disse mulige hullene og muligens kunne koble dem til en manglende forståelse av kommutativitet eller manglende beherskelse av algebraisk notasjon vil man kunne sette et søkelys på et problemområde i algebra undervisningen. På samme måte vil en sammenligning av elevenes resultater opp mot læreplanen være hensiktsmessig da det vil være med på å kunne gi innsikt i om elevene har tilstrekkelige ferdigheter når det kommer til distribusjon og faktorisering, eller om det vil være behov for tiltak.

1.3 Problemstilling og forskningsspørsmål

Denne oppgaven ble gjennomført med klare mål for hva som skulle undersøkes og hvilke konklusjoner som skulle kunne trekkes i etterkant av undersøkelsen. Tidlig i prosessen ble det utviklet en problemstilling og flere forskningsspørsmål som en del av oppgavens målsetning. Disse vil jeg legge fram her. Problemstillingen ble utarbeidet våren 2022, og videreutviklet utover høsten samme år basert på funn fra relevant litteratur og teoretiske tilnærminger. Den siste formuleringen, som oppgaven bygger på, lyder som følger: «*I hvilken grad kan tiende klassinger benytte seg av den distributive lov i algebra, gjennom gjenkjenning av struktur?*» Som en forlengelse av problemstillingen har jeg laget meg noen forskningsspørsmål for å konkretisere hva som skal undersøkes. Forskningsspørsmålene lyder som følger:

I. Er det en sammenheng mellom elevenes forståelse av kommutativitet og algebraisk notasjon, og deres evne til å benytte den distributive lov i oppløsing av parentes og faktorisering?

II. a) Er det en sammenheng mellom elevenes evne til å benytte den distributive lov i distribusjon av en faktor over en sum, og faktorisering?
b) Er det en signifikant forskjell i elevenes evne til å benytte den distributive lov i oppløsning av parentes kontra faktorisering?

III. Peker respondentenes besvarelse innen kategoriene distribusjon og faktorisering mot bestemte misoppfatninger?

IV. Hvordan måler besvarelsene seg med de relevante målene fastsatt av læreplanen for grunnskolen?

1.4 Den distributive lov i Fagfornyelsen

I møte med læreplanen for matematikk på grunnskolen er det åpenbart ut ifra kompetansemålene at forståelse av den distributive lov er et implisitt element etter tredje trinn. Det er derfor noe utfordrende å ved første øyekast kunne etablere hvilket nivå det forventes at elevene skal ligge på i en algebraisk kontekst ved avsluttet grunnskole.

På 8. trinn kommer læreplanmålet «Mål for opplæringa er at eleven skal kunne utforske algebraiske reknereglar» (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Læreplanmålet er knyttet til kjerneelementet «Utforskning og problemløsning». Her vektlegges sammenhenger, strategier og framgangsmåter. Basert på dette konkluderer jeg med at vektleggingen av sammenhenger, kombinert med forståelse som mål for matematisk diskusjon, at det her legges grunnlaget for at en relasjonell forståelse av algebraiske regneregler er det ytterste målet med dette kompetansemålet. Samtidig konkluderer jeg med at dette innebærer en innføring av den distributive lov i en algebraisk kontekst, da denne er et vesentlig element i strategier og fremgangsmåter innenfor algebra.

Ved å bruke progresjonsvektøyet i læreplanen ser vi at målet fra 8. trinn leder videre til følgende mål for 10. trinn «Mål for opplæringa er at eleven skal kunne utforske og generalisere multiplikasjon av polynom algebraisk og geometrisk» (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Ved å kombinere dette med resonnementene rundt målet fra 8. trinn vil man kunne konkludere med at det etter 10. trinn forventes at elevene kan bruke den distributive lov for å distribuere en faktor over en sum. I tillegg til at det forventes at kunne gjøre en passende substitusjon slik at man kan bruke loven gjentatte ganger i forbindelse med algebraisk polynommultiplikasjon.

1.4.1 Føringer gitt av eksamen

Forventningene til elevene på 10. trinn legges ikke bare gjennom læreplanen, men kan også legges gjennom eksempler på eksamensoppgaver og veiledninger til eksamen. Et eksempel på dette er oppgave 9 fra eksamensveiledningen knyttet til vurdering av besvarelser for våren 2023 (Utdanningsdirektoratet, 2023). Her legges det fram et eksempel på det som blir karakterisert som en besvarelse som tilsvarer utmerket kompetanse, altså høyeste nivå. Eksemplet av utmerket kompetanse fra Utdanningsdirektoratet (2023) krever at man i første omgang kan benytte den distributive lov for å kunne evaluere påstanden:

$$x^2 = (x+1)(x-1) + 1$$

I besvarelsen blir bruk av den distributive lov og forståelse av den aldri skriftliggjort. Det er dermed en mulighet for at eleven har en instrumentell forståelse av at hvert ledd i første parentes skal multipliseres med begge ledd i andre parentes før alle disse produktene summeres. Det er dermed ikke sikkert eleven hadde kunne utdypet sine utregninger på følgende måte

$$(x+y)(x-y) = x(x+y) - y(x+y) = x^2 + xy - yx - y^2$$

Eksemplet på utmerket besvarelse gir dermed ikke noen definitivt svar på i hvilken grad elevene forventes å beherske den distributive lov. Om en kombinerer eksemplet med vurderingskriteriene til eksamen som er koblet opp mot kjerneelementene i faget kan man dog argumentere for at en forståelse av den distributive lov er en forutsetning for en utmerket kompetanse. Det er spesielt to kriterier lagt fram av Utdanningsdirektoratet (2023) som er aktuelle. Dette er «Lager, løser og forklarer matematiske beregninger» og «Resonnerer over og argumenterer for egne og andres resonnementer, funn, framgangsmåter og løsninger». Her legger jeg til grunn at en fullstendig forklaring av beregninger og argumentasjon for at fremgangsmåten er gyldig ikke kan forekomme uten en forklaring og forståelse av konjugatsetningen. Noe som krever en forståelse av den distributive lov. I tillegg til dette kan vi se fra tidligere eksempelsett (Utdanningsdirektoratet, 2021, 2022) at man har oppgaver som krever både distribusjon og faktorisering. Noe som videre bygger opp under at elever ved avslutning av 10. trinn forventes å kunne bruke den distributive lov på en hensiktsmessig måte i forbindelse med både faktorisering og distribusjon.

1.4.2 Forventet kompetanse i Fagfornyelsen

Det totale inntrykket blir da at læreplanen legger opp til en forståelse av algebraiske regneregler, hvor progresjonen skal lede til tilstrekkelig kompetanse til å utføre polynommultiplikasjon algebraisk. Samtidig legges det opp til at eksamen kan ha oppgaver hvor man kan benytter seg av konjugatsetningen i tillegg til oppgaver hvor man løser likningssett ved innsetning, som gjør at man blir avhengig av distribusjon. Elevene forventes også å kunne bruke faktorisering som et verktøy for å evaluere delelighet. Totalt peker dette mot en forståelse av den distributive lov, kombinert med ferdighetene til å benytte den i begge retninger. Dette vil vi se at støttes videre av at den distributive lov er et essensielt element i beherskelse av transformerende aktiviteter som vil beskrives i seksjonen om algebraiske aktiviteter og GTG-modellen.

1.5 Oppgavens struktur

Denne oppgaven er bygd opp på en tradisjonell måte som beskrevet av Johannessen et al. (2016, s. 395-397). Neste kapittel gir en gjennomgang av teori og tidligere forskning, før tredje kapittel gir en beskrivelse av fremgangsmåten som er benyttet i selve undersøkelsen. I fjerde og femte kapittel vil jeg først presentere resultatene av undersøkelsen, før jeg i kapittel fem diskuterer disse funnene opp mot litteraturen i kapittel to. Basert på denne drøftingen vil jeg i kapittel seks framheve de konklusjoner som kan bli dratt fra undersøkelsen. Siste kapittel vil også ta for seg hvilket implikasjoner forskningen har, og hvilke begrensninger som ligger på den. I tillegg til hvilken type forskningsprosjekter som er passende for å bygge videre på denne oppgaven.

2.0 Teori og tidligere forskning

Teori i matematikkdidaktisk forskning kan sees på som linser som vi tilnærmer og studerer verden gjennom (Niss, 2007; Silver & Herbst, 2007, s. 46). I denne masteroppgaven vil disse teoriene i hovedsak fungere som mediatorer mellom forskningen og det praktiske problemet som skal undersøkes. De er en måte å framstille et problem på som gjør det forskbart, og på denne måten rettledende for hvordan forskningen blir utført. Teoriene dikterer også på samme måte lyset som resultatene av forskningen blir sett i (Silver & Herbst, 2007, s. 50). Med utgangspunkt i dette vil jeg derfor beskrive det teoretiske grunnlaget for denne undersøkelsen i dette kapittelet.

Hovedteorien som underbygger hele oppgaven er radikal konstruktivisme. På tross av den ontologiske tilnærmingen legges det til grunn at vår kunnskap blir konstruert av individet basert på hvordan man samhandler med den virkelige verden rundt oss, og at individets kunnskap på den måten ikke representerer en kopi av virkeligheten (Thompson, 2020). Dette legger grunnlaget for hvordan jeg tilnærmer meg og definerer misoppfatninger. I tillegg til at det lar meg anta at elevene kan ha en delvis forståelse av den distributive lov.

2.1 Algebra

Hovedtema for denne masteroppgaven er algebra og det er dermed naturlig å definere algebra i ungdomsskolens kontekst. Dette lar seg lettest gjøre med utgangspunkt i aritmetikk. Aritmetikk er den delen av matematikken som tar for seg læren om tallenes egenskaper, forholdene mellom tall, og regning med tall. Hvor det først kun omhandlet de naturlige tallene, men senere har blitt utvidet til alle de reelle tallene. Herunder inkluderer vi vanligvis regning med de fire regningsartene, men også regning med brøk, potenser og logaritmer faller inn under aritmetikken. Noen av de viktigste egenskapene innen aritmetikk er de tre egenskapene, kommutativitet, assosiativitet og distributivitet (Hofmann, 2019a, 2019b, 2021; MacDuffee, 2021; Aarnes, 2020). Dagens skole algebra er en fortsettelse av en utvikling som kan spores tilbake til Mesopotamia og babylonerne (Radford, 2001). Gjennom arbeidet til tidlige matematikere som Diofantos og Mohamed Ibn Musa Al-Khwarizmî ble gresk, egyptisk og mesopotamisk algebraisk tenkning smeltet sammen og introdusert til Europa. Her tok den moderne skole algebraen relativt raskt form gjennom arbeidene til noen av de meste kjente matematikerne som Viète, Descartes, Newton og Gauss (Aubert, 2021; Radford, 2001; Aarnes, 2021).

Algebra viderefører mye av det som aritmetikken omhandler, i tillegg til å introdusere bokstavregning (Aubert, 2021). På denne måten er algebra en form for generalisert aritmetikk hvor man behandler utrykk bestående av tall kombinert med ukjente variabler eller størrelser betegnet med bokstaver (Corry, 2022). For elever på ungdomsskolen vil algebra inneholde generalisert aritmetikk, ligninger, funksjoner, og bruk av bokstavuttrykk i modellering (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Selv om strukturen fra aritmetikk er nødvendig for algebra (Vermeulen et al., 1996) krever algebra en tenkemåte som er mer rettet mot forholdene mellom tall, framfor operasjonene som blir gjort på dem (Andini & Prabawanto, 2020; Kieran, 2004; Wang, 2015).

2.1.1 Algebraiske aktiviteter

Gjennom kvalitativ undersøkelse har inntrykket av algebra som noe man gjør vist seg å være framtredende (Kieran, 2007, s. 713). På tross av at mye forskning setter søkelys på algebraisk tenkning framfor aktivitetene i seg selv, kommer man ikke bort fra at algebra har både særegne aktiviteter og aktiviteter som deles med andre deler av matematikken. Litt erfaring fra skolen vil resultere i at man oppdager bruk av excel som et verktøy for å få en forståelse av variabelbegrepet, eller bruk av geogebra for forståelsen av sammenhengen mellom funksjon og graf. I tillegg kan man møte på undersøkelser av geometriske mønstre og figurtall ved hjelp av konkreter. Naturlig nok har man også de klassiske algebra aktivitetene hvor man jobber med bokstavuttrykk enten i problemløsning eller rene tekniske øvelser.

Kieran (1996) lagde en modell for å kunne beskrive og klassifisere disse forskjellige algebraiske aktivitetene som hun kalte GTG-modellen. Denne modellen består av tre kategorier av algebraiske aktiviteter. Disse er *genererende*, *transformerende*, og aktiviteter på et *globalt/meta-nivå* (Kieran, 2007, s. 713). Genererende aktiviteter i algebra er aktiviteter hvor man lager algebraiske uttrykk eller ligninger. Eksempler på aktiviteter kan være å lage et uttrykk som representerer utviklingen i en figur- eller tallrekke. Dette er aktiviteter hvor mye av forståelsen av algebraiske objekter dannes (Kieran, 2004, s. 142). Transformerende aktiviteter er aktiviteter hvor man behandler algebraiske uttrykk og ligninger basert på regler. Eksempler her er faktorisering, distribusjon og polynom multiplikasjon. Denne typen aktivitet omhandler i stor grad forandring av form med mål om å bevare likhet (Kieran, 2004, s. 142). I tillegg til å utvikle en forståelse av likhet, utvikler disse aktivitetene også forståelsen og evnen til å bruke grunnleggende regler og aksiomer i den transformerende prosessen (Kieran, 2007, s. 714). Siste kategori av aktiviteter er de som foregår på et globalt/meta-nivå. Dette er aktiviteter hvor algebra blir brukt som et verktøy, men hvor oppgaven kan anses for å være tverrtematisk innenfor matematikken. Dette er typisk oppgaver som krever problemløsning, generalisering, rettferdiggjøring og/eller bevisførsel (Kieran, 2004, s. 142). Dette er aktiviteter som gir mening til de to andre typene, og på den måten bidrar de til å gi kontekst og mening til det å bruke algebra. Dette gjør denne typen aktivitet essensiell for algebra (Kieran, 1996, s. 272; 2004, s. 142). Denne modellen er også utgangspunktet for Kilpatrick et al. (2001, s. 256-258) når de beskriver de tre kategoriene av aktiviteter som «representational», «transformational», og «generalizing and justifying».

Basert på denne GTG-modellen kan vi ved å se på læreplanmålene for ungdomsskolen som er relaterte til algebra se at disse dreier seg om transformerende og genererende aktiviteter (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Videre kan vi se at når elevene begynner på videregående skole tar læreplanmålene utgangspunkt i transformerende aktiviteter som en del av en global/meta-nivå aktivitet (Utdanningsdirektoratet, 2020d). Basert på dette er det naturlig å konkludere med at det forventes at elever som avslutter grunnskolen behersker transformerende aktiviteter. Dermed er GTG-modellen med på å forankre spørreskjema til læreplanene, og lærerplanene til tidligere forskning gjennom transformerende aktiviteter.

2.1.2 Symbol- og structure sense

Number sense er et begrep som omfatter elevers evner til å fleksibelt operere med tall, kombinert med en forståelse av hva tall betyr som gjør det lett å gå fra konkret til abstrakt (Gersten & Chard, 1999). Number sense har dog siden begrepet ble innført i 1954 utviklet seg til å bli et veldig bredt begrep, og et som ikke nødvendigvis kan overføres direkte til algebra (Berch, 2005). Derfor ble begrepet *symbol sense* innført av Arcavi (1994, 2005) som et kompliment til begrepet number sense som hadde fått betydelig oppmerksomhet i litteraturen.

Symbol sense er et sammensatt begrep som kan deles opp i flere komponenter. Den første og tilsynelatende mest elementære framhevet av Arcavi (2005) er en kjennskap til algebraiske symboler og en villighet og evne til å bruke dem i passende situasjoner. Andre komponent er den som er mest relevant for denne masteroppgaven og er beskrevet som evnen til å manipulere, men samtidig «lese» et symbolsk uttrykk og på den måten forstå dets grunnleggende egenskaper. De resterende er kunnskapen om at man kan og evnen til å konstruere passende uttrykk, evnen til å velge passende symbolske representasjoner, en forståelse av at symbolenes mening må sjekkes opp mot den intuitive forventningen, og forståelsen av at symboler kan inneha forskjellige roller i forskjellige kontekster.

Structure sense har et noe lignende opphav. Linchevski og Livneh (1999) innførte begrepet da de undersøkte om elevers problemer med å tolke den algebraiske strukturen kunne spores tilbake til den numeriske strukturen. Begrepet har blitt utdypet av blant andre Hoch og Dreyfus (2004, 2005, 2007). Schueler-Meyer (2014) trekker fram Rüede (2012) og hans definisjon av structure sense som elevers individuelle evne til å se deler av et uttrykk i forhold til hverandre som en motsats til Hoch og Dreyfus (2005) vektlegging av et uttrykks underliggende struktur.

Begrepet har blitt definert for high school og universitet av Novatná og Hoch (2008). Her er det definisjonen for high school som er av interesse. Begrepet blir definert som en forlengelse av symbol sense, og kriteriene for å kunne si at en elev innehar god structure sense er som følgende (Novatná & Hoch, 2008):

1. Å kunne gjenkjenne en kjent struktur i sin enkleste form.
2. Å kunne behandle et sammensatt uttrykk som en enkelt enhet, og gjennom en passende substitusjon gjenkjenne en kjent struktur i en mer kompleks form.
3. Å kunne velge en passende transformasjon for å gjøre best mulig nytte av en struktur.

Det er denne definisjonen som dikterer perspektivet som resultatet av spørreundersøkelsen blir sett i. Den er også ledende for utformingen av spørreskjemaet, da hensikten er at vanskelighetsgraden på oppgavene som omhandler distribusjon og faktorisering skal dikteres av i hvor stor grad den kjente strukturen fra den distributive lov er skjult i oppgaven.

2.1.3 Viktigheten av symbol- og structure sense

I sin undersøkelse av hvordan algebraiske ferdigheter utvikler seg hos nederlandske ungdomsskole elever framhever Van Stiphout et al. (2013) to aspekter som viktige elementer i algebraisk ferdighet. Den første er den relasjonelle forståelsen beskrevet av Skemp (1976), mens den andre er symbol- og structure sense. Jeg vil her prøve å utdype dette og videre argumentere for viktigheten av symbol- og structure sense når det kommer til algebraisk dyktighet ved å koble disse opp mot de grunnleggende forutsetningene for matematisk dyktighet.

Kilpatrick et al. (2001, s. 116) presenterer det de mener er de fem elementene som må være til stede for at man skal kunne oppnå matematisk dyktighet. Disse er konseptuell forståelse, prosedyriske ferdigheter, strategisk kompetanse, tilpasningsdyktig resonering, og en produktiv holdning. Her presiseres det at disse elementene er overlappende og gjensidig avhengig av tilstedeværelsen av de andre for å kunne utvikle matematisk ferdighet. Dermed defineres matematisk dyktighet som flerdimensjonalt, og umulig å oppnå uten et søkelys på alle fem elementer (Kilpatrick et al., 2001, s. 116).

Konseptuell forståelse kan forstås som det samme som relasjonell forståelse. Skemp (1976) beskriver relasjonell tenkning, eller forståelse, som en motsats til den dominerende instrumentelle tilnærmingen. En instrumentell tilnærming er en regelpreget tilnærming uten forståelse for hvorfor man kan bruke de forskjellige regnereglene. Skemp (1976) beskriver relasjonell forståelse som det man ofte tenker på som *ekte* forståelse. En forståelse av hva man gjør, hvordan man gjør det, og ikke minst hvorfor man kan gjøre det man gjør. Relasjonell forståelse er en helhetlig forståelse hvor man klarer å koble sammen enkelte fakta eller metoder til en matematisk helhet, og er en forståelse som utvikler seg gjennom at man klarer å skape flere koblinger mellom biter av informasjon (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001, s. 118). I sin undersøkelse av hvordan elever på barneskolen kan få muligheten til å engasjere seg i relasjonell tenkning legger også Carpenter et al. (2005) vekt på det å se på uttrykk og ligninger med et helhetlig blikk, samtidig som det settes et søkelys på de fundamentale egenskapene til tall, mengder og operasjoner framfor enkle kalkuleringer og algoritmiske prosedyrer. Det er verdt å legge merke til at Kilpatrick et al. (2001) benytter seg av samme terminologi som Hiebert og Lefevre (1986), men at det i forskningen ikke enda er en enighet rundt terminologi og rammeverk rundt matematisk forståelse (Star, 2020).

Prosedyriske ferdigheter omfatter kunnskap om og evner til å anvende prosedyrer og algoritmer på en *fleksibel*, passende, presis og effektiv måte (Kilpatrick et al., 2001, s. 121). I en algebraisk sammenheng vil dette dermed være tett knyttet til transformerende aktiviteter. Verschaffel et al. (2009) påpeker en noe tvetydig bruk av ordene fleksibilitet og tilpasningsdyktighet i litteraturen:

> Surveying the literature, it seems that the term 'flexibility' is primarily used to refer to *switching (smoothly) between different strategies*, whereas the term 'adaptivity' puts more emphasis on *selecting the most appropriate strategy* … we will, henceforth, use the dual term 'flexibility/ adaptity' as the overall term, 'flexibility' for the use of multiple strategies, and 'adaptivity' for making appropriate strategy choices. (Verschaffel et al., 2009, s. 337)

Det må derfor presiseres at Kilpatrick et al. (2001) bruker begrepet fleksibilitet på en måte som stemmer overens med Verschaffel et al. (2009) sin definisjon av *flexibility*. Mens tilpasningsdyktighet ivaretas gjennom presiseringen av nødvendigheten for passende valg.

Strategisk kompetanse er evnen til å formulere, representere, og løse matematiske problemer på en god måte. Dette kobles tett til det som i litteraturen blir omtalt som *mathematical problem solving*. Dette er et element av matematisk dyktighet som Kilpatrick et al. (2001, s. 124) definerer meget bredt, men det legges vekt på strategiske valg i møte med oppgaver eleven ikke har et rutinemessig forhold til. Innen algebra vil dette omfatte evnen til å gjennomføre genererende og transformerende aktiviteter på en strategisk fornuftig måte som en del av en aktivitet på et globalt/meta nivå. Denne kompetansen er tett knyttet til evnen til tilpasset resonering (Kilpatrick et al., 2001, s. 130-131). Gjennom hele problemløsningen vil den tilpasningsdyktige resoneringen være kontroll mekanismen som gjør at man kan rettferdiggjøre og vurdere ikke bare den valgte strategien, men også om de valgte prosedyrene og algoritmene er passende for å komme til svaret på problemet.

Det siste elementet presentert av Kilpatrick et al. (2001) er en produktiv holdning. Dette refererer til tendensen til å se på matematikk som noe nyttig og lønnsomt, samtidig som man ser på seg selv som noen som raskt lærer seg og kan benytte seg av matematikk. Dette er et element som utvikler seg sammen med de andre, samtidig som det legger grunnlaget for videre utvikling av de andre elementene.

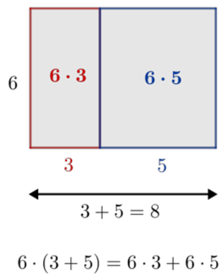
Symbol- og structure sense er nødvendig for både *flexibility* og *adaptivity*, som definert av Verschaffel et al. (2009), innenfor temaet algebra. Flexibility og adaptivity er videre grunnleggende for de prosedyriske ferdighetene som er nødvendig for matematisk dyktighet. Basert på dette vil jeg si at disse begrepenes viktighet er underbygget av at de representerer en vesentlig del av prosedyrisk ferdighet innenfor de transformerende aktivitetene i algebra. Noe som videre støttes av litteratur som viser at eksperters vurdering av struktur under arbeid med algebraiske uttrykk er et vesentlig element i deres fleksibilitet (Star & Newton, 2009).

2.2 Tallteori

Grunnleggende for all matematikk er noen lover og aksiomer som definerer både hvordan tall og operasjoner fungerer, og hvordan de forholder seg til hverandre. Jeg vil her presentere to av disse reglene siden det er disse to som vil bli testet i denne undersøkelsen. Den første er den distributive lov som kobler sammen multiplikasjon og addisjon, mens den andre er den kommutative lov som gjelder for både addisjon og multiplikasjon.

2.2.1 Den distributive lov

Den distributive lov beskriver en viktig sammenheng mellom multiplikasjon og addisjon. I aritmetikk viser dermed loven hvordan det at å multiplisere en sum av flere tall resulterer i samme svar som å multiplisere alle addender i denne summen hver for seg før de summeres (Hosch et al., 2022). Multiplikasjonen kan distribueres utover til hver av addendene om man vil. Som et resultat av dette legger den distributive lov grunnlaget for våre multiplikasjonsalgoritmer, og er grunnleggende for multiplikativ tenkning (Andini & Prabawanto, 2020; Hurst & Huntley, 2020). I en mer instrumentell forståelse av loven sier den hvordan man ganger ut en parentes (Hofmann, 2019a). Loven kan illustreres geometrisk gjennom summen av to rektangler som deler en side med samme lengde (se Figur 2.2.1.1).

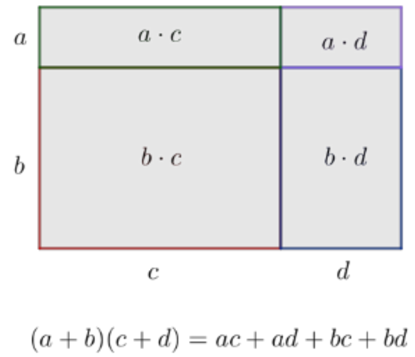


Figur 2.2.1.1: En geometrisk representasjon av den distributive lov
Note. Fra *Den distributive lov* av Hofmann, A. (2019a, 27. juni). I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. https://snl.no/den_distributive_lov [CC BY SA 3.0]

Den symbolske representasjonen av loven ser ut som dette:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Gjennom gjentatt applikasjon av loven kan man utvide både antall faktorer og antall ledd for hver faktor. På samme måte som den generelle loven kan dette demonstreres geometrisk som vist i Figur 2.2.1.2.



Figur 2.2.1.2: Den distributive lov illustrert når begge faktorene har to ledd
Note. Fra *Den distributive lov* av Hofmann, A. (2019a, 27. juni). I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. https://snl.no/den_distributive_lov [CC BY SA 3.0]

På denne måten er loven tett knyttet til kvadratsetningene, og er nødvendig for en relasjonell forståelse av disse. Den distributive lov er også grunnleggende for polynom multiplikasjon og faktorisering av uttrykk i algebra (Hofmann, 2019a). Dette gjør at den distributive lov, og forståelse av den, er vesentlig for aritmetikk og det å beherske algebra på ungdomsskolen (Andini & Prabawanto, 2020; Bush & Karp, 2013; Hurst & Huntley, 2020).

2.2.2 Den kommutative lov

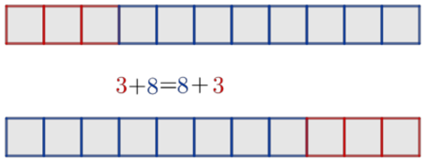
Den kommutative lov for addisjon og multiplikasjon er en lov som sier at om man adderer eller multipliserer to tall sammen har det ingen betydning i hvilken rekkefølge man gjør det (Hofmann, 2019b). Dette er en lov som ikke gjelder for subtraksjon og divisjon.

Om man ser på *a* og *b* som reelle tall kan man definere den kommutative lov i en algebraisk kontekst for både addisjon og multiplikasjon med følgende regler:

$$a + b = b + a$$

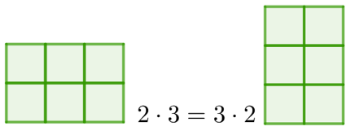
$$a \cdot b = b \cdot a$$

På samme måte som den distributive lov kan holdbarheten i disse reglene illustreres. Regelen for addisjon kan for eksempel illustreres med en dobbel tallinje hvor man gjør samme hopp, men i forskjellig rekkefølge, på hver side. Enkleste måten å gjøre det på er dog nok slik som i Figur 2.2.2.1.



Figur 2.2.2.1: Den kommutative lov for addisjon illustrert
Note. Bearbeidet fra *Den kommutative lov* av Hofmann, A. (2019b, 27. juni). I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. https://snl.no/den_kommutative_lov [CC BY SA 3.0]

Den kommutative lov for multiplikasjon kan illustreres som i Figur 2.2.2.2 ved hjelp av geometrisk multiplikasjon. Her vil vi se at en endring av faktorenes rekkefølge kun tilsvarer en rotasjon av et identisk rektangel, og at regelen dermed er holdbar.



Figur 2.2.2.2: Den kommutative lov for multiplikasjon illustrert
Note. Bearbeidet fra *Den kommutative lov* av Hofmann, A. (2019b, 27. juni). I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. https://snl.no/den_kommutative_lov [CC BY SA 3.0]

I grunnskolens algebra vil denne loven i hovedsak være viktig for å kunne endre og forenkle uttrykk slik at man kan gjenkjenne strukturer og fellesfaktorer. Den vil også være viktig når man jobber med rasjonale uttrykk da den gjør at man kan utlede følgende:

$$\frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{a + b}{b + a} = 1$$

2.3 Misoppfatninger

Sentralt for denne undersøkelsen er elevers misoppfatninger innenfor temaet algebra. På grunn av dette vil jeg her først definere hva jeg legger i en misoppfatning slik at det er tydelig hva jeg legger til grunn når jeg snakker om misoppfatninger. Jeg vil deretter redegjøre for hvilke misoppfatninger som er prevalente hos elever når det kommer til algebra, i tillegg til hvilke misoppfatninger man kan se i forbindelse med den distributive lov.

2.3.1 Definisjon

For å klargjøre hva jeg legger i en misoppfatning vil jeg henvise til Nygaard og Zernichow (2006) som jeg syns oppsummerer en misoppfatning på en god måte:

> Med misoppfatning mener vi en fastlagt oppfatning omkring et begrep som ikke er den det var meningen en skulle ha. Dette kan skyldes at en har en misforståelse eller manglende

oppfatning av begrepet. Det kan også skyldes at en gjør en overgeneralisering, en overfører en tenkemåte som er riktig i spesielle tilfeller til situasjoner der tenkemåten ikke lenger holder. (Nygaard & Zernichow, 2006, s. 36)

Her er det verdt å merke seg at misoppfatninger ikke er noe som kun er et resultat av manglende kunnskap. Dette finner vi igjen hos Brekke (2002) som omtaler misoppfatninger som «ufullstendige tanker». Om en ser på misoppfatninger fra et konstruktivistisk perspektiv, med utgangspunkt i Piaget, vil man kunne se på misoppfatninger som feil i elevens kognitive strukturer som et resultat av mangelfull akkommodasjon av eksisterende, riktige eller feile skjema. Noe som igjen støttes av Brekke og Rosén (1996) som peker på det å skape en kognitiv konflikt hos elevene som en løsning på misoppfatninger. Som et resultat av dette gjør elever med misoppfatninger feil som de, per definisjon, tror er riktige (Fujii, 2020).

2.3.2 Misoppfatninger knyttet til algebra og den distributive lov

Innen forskningen har det vist seg at mange av misoppfatningene i algebra stammer fra tidligere misoppfatninger i aritmetikk, eller oppstår i overgangen mellom aritmetikk og algebra. Lee og Wheeler (1989) påpeker flere utfordringer ved å mestre overgangen mellom aritmetikk og algebra, og det å bevege seg mellom disiplinene i arbeidet med generaliserings oppgaver. I deres forskning framgår det at elevene sliter med å se på algebra som generalisert aritmetikk. Selv med tanke på aritmetiske regler som den kommutative- og distributive lov, som er kjente for dem på en algebraisk form som en generalisering. Vi ser problemer med den kummutative lov og den assosiative lov dukke opp flere plasser i litteraturen (Bush & Karp, 2013; Maffia & Mariotti, 2017). Undersøkelsen av Warren (2003) støtter også opp om tidligere funn som viser at elever sliter med forståelsen av disse to lovene.

I tillegg til overgeneralisering fra aritmetikk relatert til negativitet, operasjonsrekkefølge, parentesfeil og likhet, ser man også misoppfatninger hos elever relatert til variabler, koeffisienter og konstanter (Aydin-Güc & Aygün, 2021; Bush & Karp, 2013; Maffia & Mariotti, 2017; Wang, 2015; Yansa et al., 2021). Mange av disse misoppfatningene er knyttet direkte til forståelsen av den ukjente, og operasjoner på og med denne. Noe som antyder at det kognitive hoppet elevene må gjøre i overgangen fra aritmetikk til algebra skissert av Herscovics og Linchevski (1994) er en grunnleggende kilde til misoppfatninger i algebra.

Denne manglende forståelsen for variabler, kombinert med misoppfatninger om hvordan gjøre operasjoner med dem, gjør at man ofte ser misoppfatninger som går direkte på formell notasjon i algebra (MacGregor & Stacey, 1997). Slike feil kan være at man tror at man ikke kan ha en operasjon i svaret på en oppgave slik at man komprimerer uttrykket slik at den blir borte. Som for eksempel:

$$5 + x \to 5x$$

Denne typen feil kan også være en misoppfatning som stammer fra brøk og blandede tall. I en slik situasjon vil en kunne slå sammen et heltall og en brøk under addisjon (Booth et al., 2017). En elev med en slik misoppfatning vil da ikke innse at *5x* tilsvarer *x* multiplisert med *5*. Et slikt eksempel kan vi se hos Booth et al. (2014), hvor *9z* blir behandlet som *9+z*:

$$9z + 1 = 10z$$

Andre typer slike feil kan være at variabelen blir ignorert fullstendig (Booth et al., 2014; Booth et al., 2017; Küchemann, 1981). Noe som kan se ut som dette:

$$4n + 1 = 5$$

Innen algebra er det også vanlig med det som Booth et al. (2014) definerer som *Mathematical Property errors.* Her gis et eksempel hvor det blir handlet som om kommutativitet er gjeldende for subtraksjon. En manglende forståelse av den kommutative lov viser seg som en misoppfatning i mye av litteraturen (Bush & Karp, 2013; Larsen, 2010). Samtidig vises det to eksempler på feil bruk av den distributive lov:

$$(x + 4)(x + 4) = x^2 + 16$$

$$\frac{1}{2}(m + 6) = \frac{1}{2}m + 6$$

I første eksempelet ser vi at det ikke blir gjort en fullstendig distribusjon. Pilene som har blitt tegnet i besvarelsen som Booth et al. (2014) henter eksemplet fra tyder på at dette er en feil forårsaket av en manglende instrumentell forståelse av hva som må gjøres. Andre eksempel gir oss et eksempel på et manglende hensyn til parenteser og den distributive lov. Dette er en misoppfatning som vi finner igjen hos Booth et al. (2017) hvor dette ikke bare tyder på et manglende hensyn til operasjonsrekkefølge, men også en manglende forståelse for at parenteser kan signalisere multiplikasjon. Aydin-Güc og Aygün (2021) peker også på det at elever ikke viser hensyn til parentes når de jobber med algebra. Det trekkes fram to typer feil:

$$6(x + 3) = 6x + 3$$

$$7 + 5(2x + 3) = (7 + 5)(2x + 3)$$

Første feil er å ikke ta hensyns til parenteser, og bare fjerne dem. Dette er noe som forfatterne påpeker er kjent fra tidligere litteratur. Andre feil er derimot en overgeneralisering, hvor alt foran parentesen blir distribuert inn i parentesen, som ikke tidligere har vært kjent. I sin undersøkelse viser MacGregor og Stacey (1997) at hele 11% av elevene på sitt tiende skoleår gjorde feilen med å ignorere parenteser under anvendelse av den distributive lov, mens 8% gjorde feil av typen hvor *5+n* blir til *5n.* Disse typene feil er veldig like feil i bruken av den distributive lov som dukker opp i litteraturen ellers, og som kategoriseres som enten feil bruk av den distributive lov eller med navn som *Mathematical Property errors* slik som hos Booth et al. (2014) (Andini & Prabawanto, 2020; Bush & Karp, 2013; Pournara et al., 2016; Schnepper & McCoy, 2014). Med tanke på faktorisering er det lite tidligere forskning rundt misoppfatninger knyttet til dette. Flere peker på faktorisering i aritmetikk som et problem for mellomtrinns elever, mens Zakaria et al. (2010) peker på faktorisering som et problem i forbindelse med kvadratiske ligninger for elever på niende trinn (Dogrucan et al., 2020; Hurst et al., 2021). Feilene som elevene på niende trinn gjør blir delt i to kategorier. Den første er en generell mangel på forståelse av hva oppgaven spør etter, mens den andre kan kategoriseres som en generell mangel på beherskelse av det GTG-modellen beskriver som transformerende aktiviteter (Zakaria et al., 2010).

3.0 Metode

For å kunne besvare min problemstilling er jeg avhengig av å kunne gjennomføre en undersøkelse på en systematisk og målrettet måte. Dette kapitelet vil derfor være en redegjørelse for hvordan denne undersøkelsen er gjennomført. I tillegg vil jeg gå gjennom hvilke vitenskapsfilosofiske betraktninger som ligger til grunn for de valgene som er tatt, samt de etiske hensynene som er gjort i forbindelse med gjennomføringen. Som en del av kvalitetskontrollen på denne masteroppgaven vil jeg også rette et kritisk blikk mot kvaliteten på denne studien.

3.1 Vitenskapsfilosofiske betraktninger

Grunnleggende for metodevalgene som ble gjort i forbindelse med denne masteroppgaven er noen vitenskapsteoretiske og -filosofiske betraktninger og ståsteder. Jeg vil derfor redegjøre kort for disse slik at grunnlaget for mine metodiske valg kommer fram.

3.1.1 Paradigme

Begrepet paradigme ble innført av Thomas S. Kuhn for å beskrive en slags vitenskapelig konsensus, eller samforståelse, mellom forskere innenfor et gitt vitenskapelig område (Iversen & Holm, 2004, s. 36-37). Et eksempel på et slikt paradigme er det geosentriske verdensbildet som eksisterte før Copernicus. I følge Kuhn er det typisk at forskere jobber ukritiske innenfor sitt paradigme, med en antagelse om de grunnleggende teorienes riktighet (Wormnæs, 1993, s. 151). Paradigme begrepet kan brukes på flere nivå og blir ifølge Arbnor og Bjerke koblingen mellom filosofien og metodevalg. Koblingen mellom metodevalg og undersøkelsesområdet kan på lignende måte kalles et arbeidsparadigme (Grenness, 2001, s. 62-64). Dette illustrerer viktigheten av å være bevist det teoretiske bakteppet, og det ontologiske og epistemologiske ståstedet man innehar i forbindelse med metodologi.

3.1.2 Ontologi og epistemologi

På lik linje med alle andre innenfor forskning opererer jeg innenfor et vitenskapsfilosofisk paradigme som er diktert av mitt ontologiske og epistemologiske syn, og som på den måten dikterte hvilke rammebetingelser og framgangsmåter jeg ville benytte meg av (Thurén, 2009, s. 149-156). Jeg vil derfor redegjøre kort for hvilket ståsted jeg har med tanke på ontologi og epistemologi da det vil være relevant for mitt metodevalg.

Jeg opererer med den antagelse av at verden eksisterer uavhengig av vår persepsjon, og at vi dermed kan oppnå sann viten om verden rundt oss (Grenness, 2001, s. 36). På den måten arbeider jeg innenfor den empiriske tradisjon (Grenness, 2001, s. 45-49; Wormnæs, 1984, s. 160-165). Man kan aldri være sikker på en induktiv generalisering siden en slik generalisering blir gjort basert på tidligere observasjoner uten hensyn til at neste observasjon i teorien alltid kan være motstridende (Grenness, 2001, s. 46; Knowles, 2018b). På samme måte vil en deduktiv slutning kun være så pålitelig som de logiske premissene som den stammer fra (Grenness, 2001, s. 49; Thurén, 2009, s. 35). Dermed utviklet en metode seg hvor det gjennom deduksjon dannes testbare hypoteser, og hvor resultatet av en slik testing fører til en induktiv slutning om hypotesens teorigrunnlag. I dag er denne hypotetisk-deduktive metoden tett knyttet til det som nå omtales som postpositivisme, hvor kritikken av ren positivisme fra blant andre Karl Popper er tatt hensyn til (Creswell & Creswell, 2018, s. 6-7; Grenness, 2001, s. 50-53; Knowles, 2018a; Wormnæs, 1984, s. 50-51). Oppsummert vil det si at masteroppgaven har en postpositivistisk tilnærming som benytter en hypotetisk-deduktiv metode med et søkelys på i hvilken grad hypotesene kan beholdes eller avvises.

3.2 Forskningsdesign

Sentralt for å kunne sikre etterprøvbarheten og kvaliteten av et forskningsprosjekt er en grundig beskrivelse av forskningsdesignet. Jeg vil derfor i dette delkapittelet beskrive den valgte tilnærmingen, hvilke strategier og tidsperspektiv som er valgt, hvordan utvalget ble etablert, og hvordan datamaterialet ble samlet inn og behandlet.

3.2.1 Valgt tilnærming

Når det er snakk om vitenskapelige metoder er det naturlig å dele disse inn i tre grupper. Basert på hva forskeren er ute etter å undersøke, og hvilke typer data som blir analysert, deles metodene i de to gruppene kvalitative- og kvantitative metoder. Den tredje gruppen blir da metoder hvor aspekter av de to foregående gruppene blir kombinert for å kunne gi flere perspektiver og mer nyanse til forskningen (Creswell & Creswell, 2018, s. 11-15).

Med utgangspunkt i min problemstilling og tilhørende forskningsspørsmål, utviklet som et resultat av mitt epistemologiske ståsted, valgte jeg å benytte meg av en kvantitativ tilnærming i denne masteroppgaven. Den kvantitative metode omhandler innsamling og analyse av kvantifiserbare data. Målet er ofte å kunne generalisere resultatene fra analysen av utvalgte enheter til en større populasjon (Grønmo, 2023). Dette skjer gjennom en operasjonalisering av det man er ute etter å undersøke slik at man kan måle en eller flere variabler knyttet til problemstillingen (Johannessen et al., 2016, s. 58-59, 241, 251). På grunn av kvantitativ forsknings standardiserte målinger og statistiske modeller er det en god metode for å kunne utvikle et representativt bilde av den generelle populasjonen man er interessert i å undersøke (Grønmo, 2023). Som et resultat av ønsket om å kunne generalisere er kvantitativ forskning som oftest *ekstensiv* med et høyt antall enheter i undersøkelsen, men et lavt antall variabler (Grimen & Ingstad, 2004, s. 284; Grønmo, 2023).

Grunnleggende for problemstillingen min er at den søker etter en representativt oversikt over et generelt forhold, noe som er typisk for en kvantitativ tilnærming (Hjelseth, 2000, s. 94). En kvantitativ tilnærming ble videre støttet ved å se på forskningsspørsmål nummer I, II og III, som uten større problemer lot seg operasjonalisere i form av kvantitative data. Det var dog slik at forskningsspørsmål IV krevde en mer kvalitativ tilnærming da det her var en sammenligning av kvantitative data opp mot en kvalitativ standard. Det vil si læreplanene i matematikk for grunnskolen og eksempler på eksamen for 10. trinn i matematikk etter innføringen av ny læreplan. Noe som introduserte et element av tolkning i arbeidet med å konkretisere hvilket nivå av beherskelse av den distributive lov som forventes ved avslutning av grunnskolen.

3.2.2 Strategi og tidsperspektiv

Som et resultat av min valgte tilnærming stod valget av strategi mellom et eksperiment og en spørreundersøkelse ved hjelp av spørreskjema. Siden jeg ikke var ute etter å undersøke forskningsspørsmål som bar preg av, eller var knyttet til, en spesiell intervensjon falt valget på å gjennomføre en spørreundersøkelse. Dette ble videre støttet av at forskningsspørsmålene mine var preget av å være beskrivende og forholdt seg til sammenhengen mellom variabler (Creswell & Creswell, 2018, s. 147). I tråd med min valgte tilnærming og målet om å ha et stort antall respondenter på undersøkelsen, ble undersøkelsen gjennomført med et prekodet spørreskjema for å kunne sitte igjen med kun kvantitative data. For detaljer om spørreskjemaet, se kapittel 3.3.

Undersøkelsen ble gjennomført som en tverrsnittsundersøkelse. Dette var i hovedsak fordi jeg var ute etter å undersøke hvordan kunnskaper og ferdigheter varierte mellom enhetene som ble undersøkt, framfor hvordan disse varierte over tid. Studiens tidsramme la også store begrensninger på gjennomførbarheten til en longitudinell undersøkelse.

3.2.3 Utvalg og populasjon

Det ble gjort et utvalg basert på random sampling (Creswell & Creswell, 2018, s. 150) hvor 17 tilfeldige kommuner fra området Nordland og gamle Troms fylke ble valgt ut. Med utgangspunkt i denne geografiske avgrensningen og en problemstilling som eksplisitt dreier seg om elever på tiende trinn har man en definisjon av populasjonen som studien ønsker å kunne generalisere til. Siden Troms ikke lengre eksisterer er det vanskelig å få et nøyaktig tall på hvor mange elever på tiende trinn regionen har. Tall fra Statistisk sentralbyrå (2022) viser dog at det i Nordland er 2730 elever på tiende trinn. Går vi tilbake til år 2019 ser vi at det da var 1773 elever på tiende trinn, i det som da var Troms fylke. Totalt blir dette 4503 elever, noe som fungerte som et estimat på populasjonsstørrelsen for denne studien. Den nødvendige utvalgsstørrelsen ble dermed estimert til å være 360 respondenter (Ahmad & Halim, 2017).

I hver av disse kommunene ble tilfeldige skoler plukket ut basert på om de oppfylte inklusjonskriteriene. Disse kriteriene var at skolen var kommunal, hadde et ungdomstrinn, og ikke var fådelt. Som et resultat ble 42 skoler kontaktet ved hjelp av e-post og forespurt om det var klasser på 10. trinn som hadde mulighet til å delta i undersøkelsen. Av de skolene som ble kontaktet gjennom disse e-postene var det syv skoler som ga positiv tilbakemelding.

Det ble ikke satt noen kriterier for hvilken type lærere som kunne delta med sine klasser, hvilken kompetanse disse hadde, eller mengde erfaring. På samme måte ble det kun satt et kriterium for hvilke elever som ikke kunne delta. Elever som var fritatt karakter i faget ble unnlatt fra undersøkelsen, mens elever med individuelle opplæringsplaner ble inkludert. Dette for å få et så representativt utvalg som mulig. På tross av at det ikke var et kriterium for å delta ble lærerne som gjennomførte undersøkelsen bedt om å vurdere i hvilken grad deltakelse kunne være en belastning for sårbare elever. Dette ble gjort på etisk grunnlag for å sikre elevens beste i situasjoner preget av skolevegring, matematikkangst eller lignende. Informasjon om forskningsprosjektet, med informasjon om frivillighet og mulighet for reservasjon mot deltakelse, ble fysisk sendt hjem med elevene (vedlegg 1). I tillegg ble det sendt en melding ut til foresatte over skolenes digitale plattform. Samtlige som var aktuelle valgte å delta.

Variasjon i antall klasser som deltok fra hver skole resulterte i at utvalget endte med å utgjøre 171 elever fordelt på 11 klasser på 10. trinn med en gjennomsnittlig størrelse på $15.\overline{54}$ elever ($\mathrm{SD} = 4.83$). På grunn av begrenset positiv tilbakemelding på forespørslene, og et begrenset tidsrom for datainnsamling, ble fokuset flyttet fra et utvalg som var tilstrekkelig for å generalisere til populasjonen til det å etablere et utvalg som ville gi tilstrekkelig statistisk styrke på testene som skulle kjøres. Dermed ble programmet G*power 3.1 (Faul et al., 2007) benyttet til å estimere en nødvendig utvalgsstørrelse på 125 respondenter. Som et resultat ble et utvalg på 171 elever betegnet som stort nok.

For å unngå støy fra respondenter som bare hadde klikket seg gjennom skjemaet ble det avgjort å legge til et eksklusjonskriteria for utvalget. Respondenter som hadde brukt mindre enn ti sekunder per oppgave i gjennomsnitt ble fjernet fra utvalget. Dette gjorde at utvalget til slutt ble bestående av 160 respondenter.

3.2.4 Datainnsamling og -behandling

Datainnsamlingen ble lagt opp slik at lærerne skulle kunne gjennomføre undersøkelsen på egenhånd med et absolutt minimum av instruksjoner. På denne måten var det mulig å samle inn data over et stort geografisk område uten at jeg selv var tvungen til å være til stede. På tross av dette deltok jeg på de første tre innsamlingene som var avtalt med lokale klasser. Slik fikk jeg se om det var spørsmål relatert til spørreskjema som burde videreformidles til lærerne som samlet inn data på egenhånd senere. Som et resultat ble det videreformidlet at om det oppstod spørsmål om betydningen av *likhet* burde man unngå et fokus på numeriske verdier, slik at elevene ikke ble oppmuntret til å plugge inn tall for variablene og regne seg til tilsvarende algebraiske uttrykk.

Innsamlingen ble gjort i løpet av en enkelt skoletime, hvor den lengste tidsbruken var på 20 minutter (*M*=7.24, *SD*=3.42)[1]. Den ble gjort ved hjelp av digitale spørreskjema som elevene hadde tilgang til gjennom en felles lenke delt med klassen. For detaljer rundt spørreskjema, se kapittel 3.3. Lenken ble sendt til læreren i forkant av undersøkelsen slik at de kunne dele den med elevene, og hver klasse benyttet seg av samme lenke. Tiden før og etter innsamling ble disponert av lærerne som de selv så hensiktsmessig.

Siden all data ble samlet inn digitalt ved hjelp av Nettskjema (Universitetet i Oslo, u.å.) var det ikke noe behov for fysisk håndtering av spørreskjema. Etter hvert som resultatene kom inn fra hver klasse ble resultatene lastet ned fra nettskjema.no i .xlsx format og samlet i samme excel-fil. Denne filen hadde blitt forberedt på forhånd slik at når resultatene ble limt inn kom det automatisk opp kolonner med koding for hvilken type alternativ som var valgt, og om svaret var riktig eller galt. Dette ble i hovedsak gjort av to grunner. Først for effektivitets skyld slik at det øyeblikket innsamlingen var ferdig skulle hoveddelen av kodingen være ferdig, men også på grunn av at Nettskjema ikke håndterer «+» på riktig måte og en oppretting av dette vil medføre et mye mer oversiktlig datamateriale.

Etter den innledende kodingen var gjort og alle data samlet i excel-filen, ble denne filen importert til SPSS (IBM, u.å.). Her ble den siste kodingen og beregningen av de nødvendige variablene gjort før dataene var klare for analyse. Denne analysen ble utført i samme program og blir beskrevet mer detaljert i en senere seksjon av oppgaven.

3.3 Spørreskjema

Sentralt for min valgte strategi, spørreundersøkelse eller *survey*, er selve spørreskjemaet. Jeg vil derfor gå gjennom utformingen av spørreskjemaet. Først vil jeg ta for meg den generelle utformingen og spørreskjemaets layout, før jeg går inn på hvordan spørsmålene i hver enkelt kategori er designet. Mer spesifikke detaljer rundt koding av svaralternativer vil jeg ta for meg i kapitel 3.4.

3.3.1 Generell utforming

Den overordnede strukturen på spørreskjemaet var fire deler med fem spørsmål hver. Her representerte hver side i spørreskjemaet en enkelt kategori, og alle spørsmålene på hver side var innenfor denne kategorien. Spørsmålene ble gitt en tittel på formen «Spørsmål [forbokstav i kategori].[rang etter antatt vanskelighetsgrad]» og deretter lagt i rekkefølge fra lettest til vanskeligst

[1] Basert på tiden brukt på besvarelsen som registrert av Nettskjema. Tar ikke høyde for klasseroms logistikk og lignende.

på hver side i spørreskjemaet. Eksempelvis fikk det antatt letteste spørsmålet i kategorien notasjon dermed navnet «Spørsmål N.1». For alle spørsmål var det tre prekodete svaralternativer. For alle spørsmål ble det lagt inn tilfeldig variasjon i rekkefølgen av svaralternativene slik at man ikke skulle kunne få alt rett ved å for eksempel svare kun øverste svaralternativ på alle spørsmål.

Av hensyn til at rekkefølgen på oppgavene ikke skulle ha en innvirkning på resultatene ble det laget seks varianter av spørreskjemaet, hvor forskjellen mellom dem bestod i rekkefølgen på kategoriene. Samtidig som det ble lagt vekt på at kategorier som kunne påvirke hverandre, spesielt faktorisering og distribusjon, skulle alternere i rekkefølge ble det også lagt vekt på at de antatt vanskeligste kategoriene ikke skulle komme på slutten av skjema. Dermed ble distribusjon og faktorisering enten plassert som første og andre kategori, eller splittet. En oversikt gis i Tabell 3.3.1.1.

Tabell 3.3.1.1: *Rekkefølge på kategoriene i de forskjellige spørreskjemaene*

Skjema	Side 1	Side 2	Side 3	Side 4
Nr. 1	Distribusjon	Kommutativitet	Faktorisering	Notasjon
Nr. 2	Faktorisering	Notasjon	Distribusjon	Kommutativitet
Nr. 3	Kommutativitet	Distribusjon	Notasjon	Faktorisering
Nr. 4	Notasjon	Faktorisering	Kommutativitet	Distribusjon
Nr. 5	Distribusjon	Faktorisering	Kommutativitet	Notasjon
Nr. 6	Faktorisering	Distribusjon	Notasjon	Kommutativitet

Ellers ble formateringen av spørsmål og det generelle utseende av spørreskjemaet diktert av Nettskjema.no (Universitetet i Oslo, u.å.). Skjemaet ble gjort så enkelt som mulig innenfor rammene som nettsiden tilbyr slik at dette ikke skulle være en distraksjon eller et hinder for elevene. For et eksempel på hvordan spørreskjema nr. 1 så ut, se vedlegg 2.

3.3.2 Spørsmålene om distributivitet

Oppgavene i kategorien distribusjon gikk ut på at eleven skal finne skal finne et tilsvarende algebraisk uttrykk blant svaralternativene som det uttrykket som ble presentert i oppgaven. I hver av oppgavene lød oppgaveteksten som følger: «Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?». Hvert spørsmål hadde alternativ som tilsvarte en riktig distribusjon, et alternativ som tilsvarte en fjerning av parentesene, og et alternativ hvor faktoren utenfor parentesen kun hadde blitt distribuert til det ene leddet i parentesen. På denne måten var oppgaven utformet som en *transformerende* aktivitet med et mål om å bevare likhet. Noe som var med på å knytte oppgavene til læreplanen. Oppgavene fikk navn som beskrevet tidligere, hvor D står for distribusjon og sifferet angir vanskelighetsgrad. I Tabell 3.3.2.1 kan man se oppgavene med svaralternativ.

Tabell 3.3.2.1: *Oppgavene i kategorien distribusjon med tilhørende svaralternativ*

Oppgave	Algebraisk uttrykk	Fasit	Svarkode 2	Svarkode 3
D.1	a(b+c)	ab+ac	ab+c	(b+ac)
D.2	z(y+2x)	zy+2xz	zy+2x	(y+2xz)
D.3	a(bc+d)	da+bac	abc+d	(bc+da)
D.4	(x+yz)w	xw+wyz	x+yzw	(xw+yz)
D.5	b(c+ab)	ab^2+cb	bc+ab	(c+ab^2)

Oppgavene ble progressivt vanskeligere gjennom inklusjonen av koeffisienter, variabler, venstre distribusjon, og eksponenter som er med på å skjule strukturen, med utgangspunkt i D.1 som er den distributive lov i sin enkleste form. Her ble det på samme måte som hos Schueler-Meyer (2016) lagt vekt på de forskjellige identifiserbare elementene i et algebraisk uttrykk som kunne være med på å skjule den distributive lovs struktur. Dette gjelder på samme måte for oppgavene om faktorisering. I tillegg ble de kommutative egenskapene til addisjon og multiplikasjon utnyttet til å skjule strukturen ytterligere i både distributivitet og faktorisering.

For et helhetsinntrykk, se side 1 av vedlegg 2.

3.3.3 Spørsmålene om faktorisering

Oppgavene i kategorien faktorisering gikk på samme måte som spørsmålene om distribusjon ut på at eleven skal finne skal finne et tilsvarende algebraisk uttrykk blant svaralternativene som det uttrykket som ble presentert i oppgaven. I hver av oppgavene lød oppgaveteksten også her som følger: «Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?». Noe som her også hjelper med å knytte oppgavene til læreplanen. Disse oppgavene hadde også et riktig svar, i tillegg til to alternativer basert på mulige misoppfatninger. Den første misoppfatningen i disse oppgavene var at fellesfaktor trekkes ut av parentesen, men bare fra et ledd. Andre misoppfatning var at fellesfaktor trekkes riktig fra begge ledd, men begge faktorene beholdes og summeres på utsiden av parentes. I Tabell 3.3.3.1 kan man se oppgavene med svaralternativ.

Tabell 3.3.3.1: *Oppgavene i kategorien faktorisering med tilhørende svaralternativ*

Oppgave	Algebraisk uttrykk	Fasit	Svarkode 2	Svarkode 3
F.1	ab+ac	a(b+c)	a(b+ac)	2a(b+c)
F.2	2x+xy	(2+y)x	x(2+xy)	2x(2+y)
F.3	6b+3a	3(2b+a)	6(b+3a)	9(b+a)
F.4	b^2+b	(b+1)b	b(b+b)	2b(b+1)
F.5	yz+z^2x	(y+zx)z	(yz+x)z^2	3z(y+x)

På samme måte som hos distribusjon ble oppgavene progressivt vanskeligere, med utgangspunkt i oppgave F.1 som er den distributive lov i sin enkleste form. Her ble også koeffisienter, variabler, venstre distributivitet, og eksponenter brukt for å skjule strukturen av den distributive lov. I tillegg ble den fundamentale egenskapen $a = a \cdot 1$ brukt spesifikt i oppgave F.4.

For et helhetsinntrykk, se side 3 av vedlegg 2.

3.3.4 Spørsmålene om kommutativitet

Spørsmålene i kategorien kommutativitet stakk seg litt ut sammenlignet med de tre andre kategoriene. Alle disse spørsmålene hadde svaralternativene «alltid», «aldri», og «i noen tilfeller», men ikke alle hadde samme spørsmålstekst. På tross av at spørsmålene hadde samme svaralternativ var de ikke i samme rekkefølge på alle spørsmål. I disse oppgavene skulle elvene evaluere når to algebraiske uttrykk var like, med gitte betingelser.

Eksempelvis fremstod oppgave K.2 som følger i spørreskjema:

> Om a og b kan være hvilke som helst tall, og ha samme verdi,
>
> når er det sant at *a-b* er det samme som *b-a*?

Som de andre oppgavene hadde denne oppgaven svaralternativene alltid, aldri, og i noen tilfeller. Med de betingelser som er formulert i oppgaven ville riktig svar vært «i noen tilfeller», hvor a=b.

Et unntak til denne formuleringen var oppgave K.3 hvor betingelsen at a, b og c ikke kunne ha samme verdi var gitt. En oversikt over oppgavene og svaralternativ er gitt i Tabell 3.3.4.1. Merk at det ikke var en like tydelig progresjon i vanskelighetsgrad i disse oppgavene som i de foregående.

Tabell 3.3.4.1: *Oppgavene i kategorien kommutativitet med svaralternativer*

Oppgave	Algebraisk påstand	Alternativ 1	Alternativ 2	Alternativ 3
K.1	a+b+c = b+a+c	Alltid	I noen tilfeller	Aldri
K.2	a-b = b-a	Aldri	I noen tilfeller	Alltid
K.3	a-b-c = a-c-b *	Alltid	Aldri	I noen tilfeller
K.4	a·b·c = b·a·c	Aldri	I noen tilfeller	Alltid
K.5	a·b:c = a·c:b	Alltid	I noen tilfeller	Aldri

* Gitt at a, b og c ikke har samme verdi

I motsetning til de andre kategoriene var ikke svaralternativene her kodet til noen spesielle misoppfatninger. Disse oppgavene hadde ikke primært som mål å identifisere eventuelle misoppfatninger, men å fungere samlet som et mål på elevens forståelse av den kommutative lov. Av hovedinteresse var derfor riktig eller galt svar.

For et helhetsinntrykk, se side 2 av vedlegg 2.

3.3.5 *Spørsmålene om notasjon*

Oppgavene som gikk på algebraisk notasjon var igjen lagt opp på samme måte som for distribusjon og faktorisering. Elevene ble dog ikke bedt om å finne et tilsvarende uttrykk, men heller å identifisere notasjonens betydning. I spørreskjemaet ble for eksempel oppgave N.1 formulert som dette «I algebra betyr **4x** det samme som» med tre svaralternativer. Tabell 3.3.5.1 gir en oversikt over uttrykk som ble satt inn i de forskjellige oppgavene, med tilhørende svaralternativ.

Tabell 3.3.5.1: *Oppgavene i kategorien notasjon med tilhørende svaralternativ*

Oppgave	Algebraisk uttrykk	Fasit	Svarkode 2	Svarkode 3
N.1	$4x$	$4 \cdot x$	$4+x$	$x \cdot x \cdot x \cdot x$
N.2	xy	$x \cdot y$	$x+y$	$x:y$
N.3	$3x^2$	$3 \cdot x \cdot x$	$3+x \cdot x$	$3x \cdot 3x$
N.4	x^2y	$x \cdot x \cdot y$	$x+x \cdot y$	$x \cdot 2 \cdot y$
N.5	$x(y)$	$x \cdot y$	$x+y$	$x:y$

I dette tilfellet var det kun svarkode 2 som ble koblet til en konkret misoppfatning. Tidligere forskning har påvist at elever forveksler addisjon og multiplikasjon i uttrykk som det i oppgave N.1. Det ble derfor utviklet alternativer hvor dette var et tema. Svarkode 3 ble dermed supplerende alternativer som inneholdt feil av varierende type. Oppgavene øker tilsynelatende i vanskelighetsgrad på samme måte som distribusjon og faktorisering, men dette er i utgangspunktet ikke tilfellet da dette var testing av forskjellig notasjon. Det er verdt å merke seg inklusjonen av oppgave N.5, som ble inkludert for å teste notasjon direkte knyttet til den distributive lov basert på misoppfatninger rundt parentes som et signal om multiplikasjon (Booth et al., 2017).

For et helhetsinntrykk, se side 4 av vedlegg 2.

3.4 Analyse

Datainnsamlingen førte til en mengde data som måtte analyseres. I dette kapitelet vil jeg gå gjennom hvordan dette ble gjort. All analyse og data behandling ble gjort i Excel eller SPSS. Som standard har en kritisk p-verdi blitt satt til 0.05 for alle tester. Resultatene fra testene vil dog bli rapportert som enten nøyaktig verdi eller som $p<.05$, $p<.01$ eller $p<.001$.

3.4.1 *Koding av svar*

En forutsetning for analyse av dataene var at disse var kodet på en hensiktsmessig måte slik at de var mulig å bruke disse både i Excel og SPSS (IBM, u.å.). Jeg vil derfor beskrive forberedelsene som ble gjort i excel før dataene fra undersøkelsene kom inn, nevnt i kapittel 3.2.4, og hvilken koding og kalkulering av nye variabler som ble gjort i SPSS.

For spørsmålene i kategoriene distribusjon, faktorisering og notasjon ble svarene kodet inn i to variabler. Den første var koden for hvilket svaralternativ som hadde blitt valgt, hvor fasitsvaret ble kodet til 1 og feil svar ble kodet til 2 eller 3. Variabelen fikk navn etter spørsmålet den var kodet fra på formen «Kode[spørsmål]». For eksempel «KodeF.3» Denne kodingen samsvarte med tabellene i kapittel 3.3.

På samme måte ble spørsmålene kodet for riktig eller galt svar basert på hvilket svaralternativ som hadde blitt valgt. Spørsmålene ble kodet 1 for riktig svar, gitt at koden for valgt alternativ var 1. Samtidig som spørsmålet ble kodet 0 for galt svar, gitt at svaralternativet var kodet til 2 eller 3. Slik ble «Poeng[spørsmål]» etablert basert på «Kode[spørsmål]».

For spørsmålene i kategorien kommutativitet ble kodingen gjort stort sett på samme måte som i de tre andre kategoriene, bortsett fra at disse spørsmålene ikke hadde noen kategorisering av svaralternativene annet enn rett eller galt. Derfor ble variabelen «Poeng[spørsmål]» og variablene for hvert svaralternativ kodet direkte fra svarene som var gitt.

For å kunne si noe om prestasjonene til hver enkelt respondent ble alle «Poeng[spørsmål]» i hver kategori lagt sammen til en variabel «Poengsum[kategori]». Disse fire ble så lagt sammen til variabelen «PoengsumTotal» som ble brukt som mål på den samlede prestasjonen til respondenten. Denne variabelen utgjorde grunnlaget for de grupperingene som skulle gjøres videre i analysen.

3.4.2 Gruppering

Som en del av analysen ble det sett på forskjeller mellom grupper. Dette ble gjort ved at utvalget ble delt i tre grupper basert på variabelen PoengsumTotal. Siden det var mulig å oppnå fem poeng i fire forskjellige kategorier hadde variabelen PoengsumTotal et utfallsrom fra 0 til 20 poeng. Dette utfallsrommet ble delt i tre like deler, som førte til at de som fikk 0 til og med 6 poeng ble kategorisert i gruppen «lav prestasjon» (LP). De med 7 til og med 13 poeng havnet i gruppen «middels prestasjon» (MP), og de med 14 til og med 20 poeng havnet i gruppen «høy prestasjon» (HP).

3.4.3 Prosenter

Ved hjelp av frekvenstabeller i SPSS ble den relative svarfrekvensen for de forskjellige svaralternativene innenfor kategoriene distribusjon, faktorisering og notasjon beregnet og oppsummert i figurer og tabeller. For kommutativitet ble bare prosentene for riktig og galt svar analysert. Disse prosentene ble brukt til å sammenligne mengden riktige svar mellom enkelt oppgaver i hver kategori. De ble også brukt som grunnlag for den binomiale testingen for å sjekke om feilsvarene i distribusjon og faktorisering var likt fordelt.

3.4.4 Forskjeller

For å kunne teste etter signifikante forskjeller er det en forutsetning at man vet om datamaterialet er normalfordelt eller ikke for å kunne velge riktig test. Av den grunn ble en *Kolmogorov-Smirnov test* brukt til å stadfeste at ingen av variablene som var av interesse hadde en normalfordeling. Dette medførte at testingen av forskjeller måtte gjøres med de ikke-parametriske alternativene.

For å teste om det var en forskjell i oppnådd poengsum mellom kategoriene ble det benyttet en *related-samples Friedman's two-way ANOVA by ranks test* med påfølgende *Dunn's tester* på både hele utvalget og de forskjellige gruppene. En *related-samples Wilcoxon signed-rank test* ble også brukt for å teste om det var en signifikant forskjell mellom prestasjonene i distribusjon og faktorisering hos utvalget og de tre gruppene. En *one-sample Wilcoxon signed-rank test* ble i tillegg brukt for å teste om prestasjonene i kategoriene faktorisering og distribusjon var som forventet basert på et hypotetisk resultat på linje med forventningene skapt av læreplan og eksamen.

For å kunne si noe om størrelsen på forskjellene i disse testene ble det kjørt en *Kendall's W test* (*W*) i SPSS i forbindelse med related-samples Friedman's two-way ANOVA by ranks test, og beregnet en *rank-biserial korrelasjon* (r_{rb}) som beskrevet av Tomczak og Tomczak (2014) baser på resultatene fra både related-samples Wilcoxon signed-rank test og one-sample Wilcoxon signed-rank test. Klassifiseringen av disse effektstørrelsene ble gjort basert på anbefalinger fra Cohen (1992), og grenseverdiene for klassifiseringen kan sees i Tabell 3.4.5.1.

Tabell 3.4.4.1: *Grenseverdier for klassifisering av effektstørrelsene r_{rb} og W*

Effektstørrelse	**Klassifisering av effektstørrelse**
< .20	Liten
.20 - .40	Medium
.40 <	Stor

Note: Utarbeidet fra Cohen, J. (1992). A Power Primer. *Psychological Bulletin*, *112*(1), 155-159 (Table 1, s.157)

For å teste om fordelingen av feilsvar innenfor distribusjon og faktorisering var signifikant forskjellig fra en lik fordeling ble det på samme måte for både utvalg og gruppene gjennomført en tosidig *one-sample binomial test*. Denne ble gjennomført med det samlede antallet feilsvar med kode 2 og 3 innen begge kategorier.

3.4.5 Sammenhenger

Som et resultat av manglende normalfordeling ble korrelasjonsanalysen mellom poengsummene oppnådd i hver kategori gjennomført ved hjelp av *Spearman's rho* (ρ). I analysen og diskusjonen vil det kun være signifikante positive korrelasjoner som er av interesse. Dette er fordi det ikke er noe fra teorien som underbygger denne oppgaven, eller iboende i oppgavens metode, som gir noen årsaker til eller noen forventning om at disse skal oppstå. Ved vurdering av alle korrelasjoner og deres styrke ble følgende tabell fra Johannessen et al. (2016, s. 306) brukt.

Tabell 3.4.5.1: *Grenseverdier for klassifisering av korrelasjon*

Korrelasjonskoeffisienten	**Klassifisering av korrelasjonen**
0 – 0.19	Veldig svak
0.20 – 0.39	Svak
0.40 – 0.69	Moderat
0.70 – 0.89	Høy
0.90 – 1.00	Meget høy

Note: Utarbeidet fra Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Abstrakt Forlag (s. 306)

3.5 Kvalitet i studien

Jeg vil her ta for meg det som er av begrensninger i studiens metode og design som kan være av betydning for kvaliteten. Kvaliteten av en studie kan i hovedsak deles inn i to deler, validitet og reliabilitet. I noen tilfeller vil man se en tredje, generaliserbarhet, men dette kan sees på som ytre validitet. For å kunne si noe om studiens kvalitet vil jeg her også diskutere hvordan jeg vurderer studiens forskjellige typer validitet og reliabilitet, samt hva som er gjort for å sikre disse.

Gulbrandsen og Langfeldt (1997) trekker også fram originalitet, intern- og ekstern relevans som elementer i kvaliteten til forskning. For å kommentere disse kort kan man peke på den manglende litteraturen rundt den distributive lov som et tegn på at denne oppgavens originalitet og interne relevans er sikret. Ved å undersøke elevers forståelse av den distributive lov på en original måte, samtidig som det etableres et utgangspunkt for videre forskning rundt den distributive lov. Den eksterne relevansen kommer inn under implikasjonene for undervisningspraksisen i algebra på ungdomsskolen, og bidrar på den måtene til forskningens kvalitet.

3.5.1 Metodekritikk

En svakhet ved kvantitativ metode er at man gjennom kvantifisering går glipp av mye informasjon (Hjelseth, 2000, s. 90). Dette gjorde at mitt valg av tilnærming førte med seg et begrenset innsyn i elevenes tankegang i besvarelsen av spørreskjema. Dermed var det en videre konsekvens at jeg kun kunne teste etter kjente misoppfatninger fra den eksisterende litteraturen. I tillegg til at jeg i utformingen av spørreskjema ikke kunne ta høyde for en uttømmende liste av misoppfatninger knyttet til de forutsettende kunnskapene for å benytte den distributive lov. Dette gjeldte også for misoppfatninger knyttet direkte til den distributive lov.

Den strukturerte utformingen som kvantitativ metode er preget av gjorde også at jeg endte opp med å teste elevenes kompetanse på en ekstremt spesifikk måte. Dette medførte en god kontroll på validitet og etterprøvbarhet, men det gjorde også undersøkelsen sårbar ovenfor lærerens tilnærming til den distributive lov i undervisningen. Dette medførte at det alltid ville være en fare for at elevene ikke skjønte spørsmålene, på tross av at det ble lagt stor vekt på klarhet i utformingen av skjema. En annen begrensning som følger av strategien som ble valgt er at man må ha svaralternativer som er så uttømmende som mulig slik at respondenten finner et svar som gjør at svaret ikke må tilpasses for å passe (Johannessen et al., 2016, s. 263).

Her ville en kvalitativ tilnærming hatt en fordel da fleksibiliteten i en intervjusituasjon ville gjort at man hadde kunnet hatt flere tilnærminger til samme spørsmål, slik at man kunne vært sikker på at man kom fram til elevenes ekte kompetanse (Grimen & Ingstad, 2004, s. 284-286). Dette ble dog vurdert som mindre problematisk opp mot ønsket om å kunne generalisere basert på standardiserte spørsmål og en mer objektiv datainnsamling. En blandet tilnærming med både kvalitative og kvantitative data hadde kanskje vært ideelt siden tilnærmingene utfyller hverandre (Ivankova & Creswell, 2009; Migiro & Magangi, 2011). Dette ville dog vært veldig ressurskrevende, og ville i praksis ikke latt seg gjennomføre som et mastergradsprosjekt på grunn av tiden det ville tatt å utvikle et slikt prosjekt skikkelig. I tillegg til det omfattende analysearbeidet som ville vært en følge av en slik tilnærming (Halcomb, 2019; Migiro & Magangi, 2011).

En kvantitativ tilnærming vil bety at man må trekke slutninger basert på statistikk og hypotesetester. Dette åpner for at man trekker gale slutninger, og gjør type I- eller type II-feil. Å gjøre en type I-feil vil si at man feilaktig forkaster en nullhypotese som i virkeligheten er sann. På samme måte er en type II-feil det å beholde en nullhypotese som i virkeligheten er uriktig (Johannessen et al., 2016, s. 388). Man kan gjøre sjansen for type I-feil minimal ved å velge en veldig liten α, eller kritisk p-verdi, men man vil da samtidig maksimere sjansene for å gjøre en type II-feil. På grunn av dette vil valget av signifikansnivå alltid være en balansegang basert på hvor viktig det vil være å unngå å gjøre hver av disse feilene. For denne oppgaven er et signifikansnivå på 0.05 valgt som standard for all testing da det er antatt å gi en god balanse mellom risikoene for å gjøre en av de to typene feil (Johannessen et al., 2016, s. 388). Dette vil dog alltid være et underliggende problem for slutningsstatistikken i en kvantitativ tilnærming.

3.5.2 Validitet

Gjeldende for denne masteroppgaven er det som kalles begrepsvaliditet og ytre validitet. Man kan også vurdere indre validitet, men da dette er knyttet til kausalitet vil det ikke være nødvendig å vurdere dette for denne studien (Johannessen et al., 2016, s. 311). Begrepsvaliditet dreier seg om i hvor stor grad man har klart å operasjonalisere et fenomen på en god måte. Dette går i stor grad på sunn fornuft, eller *face validity* (Johannessen et al., 2016, s. 66-67). Her er det gjort en god jobb med utformingen av spørreskjema, og vurdering av type spørsmål, i samarbeid med veileder. Dermed vil jeg si at masteroppgavens begrepsvaliditet er god, basert på omtanken som er lagt ned i å finne gode indikatorer på respondentenes matematiske forståelse på forskjellige felt. Undersøkelsen vil i tillegg ha en god økologisk validitet siden besvaringen av spørreskjema ble gjennomført i en kjent setting, med en kjent lærer, hvor elevene er vant med å vise sin matematiske kompetanse (Dahlum, 2021).

Det er dog en større bekymring rundt den statistiske og ytre validiteten basert på utvalget som er gjort i forbindelse med undersøkelsen. Selv om det er gjort et utvalg basert på random sampling, vil størrelsen ikke være tilstrekkelig for å gjøre en generalisering gjeldende for alle elever i området Nordland og gamle Troms fylke. En annen bekymring går på at det blant skolene som ble trukket ut var et bortfall på hele 83%, noe som utgjør en trussel mot representativiteten til utvalget. På tross av dette har utvalget en god representativitet når det kommer til geografisk utbredelse i det aktuelle området, i tillegg til en variasjon i klassestørrelse som virker representativ. Med tanke på ytre validitet vil det her være viktig å være klar over at innføringen av LK20 fortsatt ikke er fullstendig. Dette gjør at resultatet vil kunne miste sin validitet over tid etter hvert som undervisningen nærmer seg læreplanen. Dette gjør at resultatene av studien i stor grad er et resultat av tidspunktet studien er gjort på, og derfor må rapporteres med forsiktighet.

3.5.3 Reliabilitet

Masteroppgavens reliabilitet, eller pålitelighet, hviler i stor grad på standardiseringen av spørreskjema. Et godt utformet spørreskjema med et behov for et minimum av instruksjon i forkant vil bidra til en god test-retest pålitelighet. Det vil i løpet av masteroppgaven dog være administrering av skjema i flere klasser. Dette vil være en mulig kilde til målefeil på grunn av små variasjoner i settingen siden jeg ikke er med på alle gjennomføringene selv. Denne standardiseringen med tydelige spørsmål kombinert med en godt forklart metode vil også bidra til å styrke oppgavens reproduserbarhet, som videre styrker dens reliabilitet. I tillegg vil statistisk signifikante funn i analysen være et tegn på reliabilitet i seg selv (Svartdal, 2020). Det må likevel på samme måte som for validitet pekes på det store bortfallet blant skolene som ble forespurt om å delta. På samme måte må man anerkjenne at man her forholder seg til et utvalg lærere som velger å delta med sine klasser. Uten noe innsikt i hvilke motivasjoner eller grunner disse lærerne har for å delta vil man måtte se på dette som en faktor som senker studiens reliabilitet. Basert på tilbakemeldingene fra noen av lærerne som deltok må man også ta i betraktning at spørsmålene i kategorien kommutativitet har vært uklare for noen av elevene. Noe som også påvirker studiens reliabilitet negativt.

3.6 Forskningsetikk

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har vedtatt noen forskningsetiske retningslinjer som har vært veiledende for denne masteroppgaven (Johannessen et al., 2016, s. 85). På tross av at masteroppgaven baserer seg på et anonymt spørreskjema var det etiske betraktninger som måtte vurderes.

Et eksempel var forskeres ansvar for å unngå skade og belastning som følge av forskningen (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2021). I utgangspunktet vil man ikke tro at det å fylle ut et spørreskjema ville bidra med en betydelig belastning for en elev. Dette er dog noe som måtte vurderes. Et pilotprosjekt til en annen masteroppgave har for eksempel vist at det er en betydelig andel elever som selv rapporterer matematikkangst. Samtidig vil det å bli testet i et ekstremt spesifikt emne av matematikken kunne være spesielt belastende for elever som allerede sliter i matematikk og ikke har noen vei til mestring. Om man i tillegg ser på elever med individuelle opplæringsplaner (IOP) som medlemmer av en sårbar gruppe kan dette bli en utfordring. Som et resultat har jeg måtte ha en dialog med elevenes kontaktlærer for å forsikre meg om at studien ikke blir en for stor belastning for eleven på tross av et eventuelt samtykke. Her har jeg dog måtte være forsiktig slik at manglende deltakelse ikke medfører et unødvendig stigma for elever som fra før føler at de stikker seg ut på grunn av for eksempel spesielle tiltak i en IOP. Det viste seg at ingen av lærerne vurderte belastningen slik at en elev ikke deltok.

Generelt har det vært et stort fokus rundt samtykke og anonymisering. Anonymiseringen kom av seg selv ved at jeg i utgangspunktet ikke samlet inn personidentifiserende informasjon. Siden spørreskjema var fullstendig anonymisert, ville det ikke være nødvendig med noen melding til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS (NSD) (Johannessen et al., 2016, s. 90). Retningslinjene ble tolket slik at anonymisering førte til at respondentene ikke trengte en mulighet for å trekke seg da de allerede var anonyme, og dermed ble det ikke nødvendig med identifiserende data i spørreskjema som kunne utløse meldeplikt. De etiske aspektene rundt samtykke ble tatt hånd om ved hjelp av gode informasjonsskriv til skole og hjem basert på mal fra NSD (Norsk senter for forskningsdata, u.å.). Samtidig som det ble innhentet et samtykke fra foresatte. Med dette mener jeg at det etiske for denne masteroppgaven har blitt godt ivaretatt.

4.0 Resultater

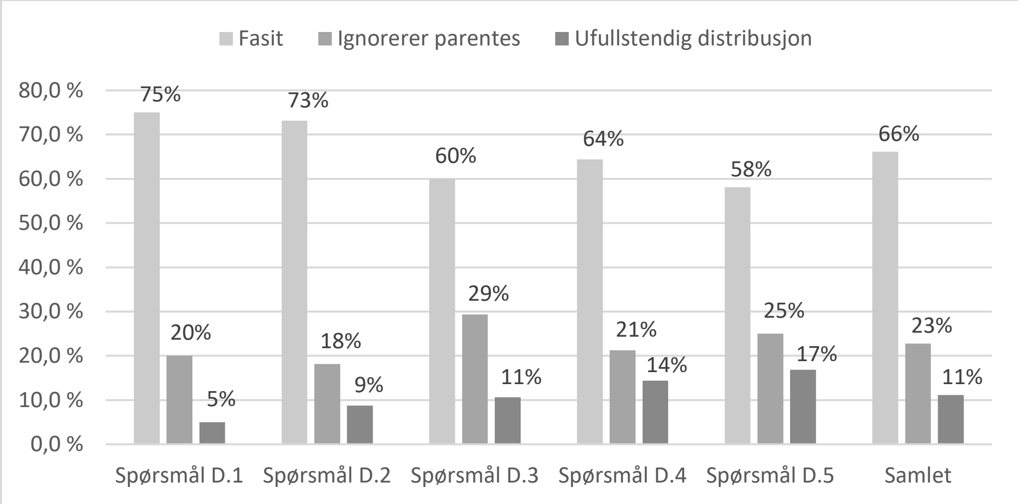
Som et resultat av dataanalysen beskrevet i kapittel 3.4 ble det produsert en rekke resultater med mål om å kunne belyse problemstillingen for denne masteroppgaven. Hensikten med dette kapitelet er å legge fram mine resultater på en så ryddig og oversiktlig måte som mulig, uten omfattende kommentarer. For en drøfting av resultatenes betydning, se kapittel 5.

Basert på poengsummen i hver kategori hadde elevene høyest prestasjon i kategorien notasjon (M=3.54, SD=1.302), og lavest i kategorien kommutativitet (M=2.37, SD=1.211). Mellom disse ligger distribusjon (M=3.31, SD=1.833) og faktorisering (M=2.67, SD=1.849). Sammenlagt førte dette til en gjennomsnittlig total poengsum på 11.9 poeng (SD=4.67). Ved å teste om dataene var normalfordelte hjelp av en Kolmogorov-Smirnov test kunne vi konstatere at verken den totale poengsummen eller poengsummene i noen av kategoriene var normalfordelt blant respondentene (p<.001).

Etter elevene ble inndelt etter prestasjon utgjorde gruppen med lav prestasjon 22 elever (14%), gruppen med middels prestasjon 74 elever (46%), og gruppen med høy prestasjon 64 elever (40%). Disse gruppene hadde henholdsvis en gjennomsnittlig samlet poengsum på 5.05 poeng (SD=0.844), 9.69 poeng (SD=2.067), og 16.78 poeng (SD=1.856). De oppnådde poengsummene viste seg å ikke være normalfordelte i noen av gruppene basert på en Kolmogorov-Smirnov test (p<.05).

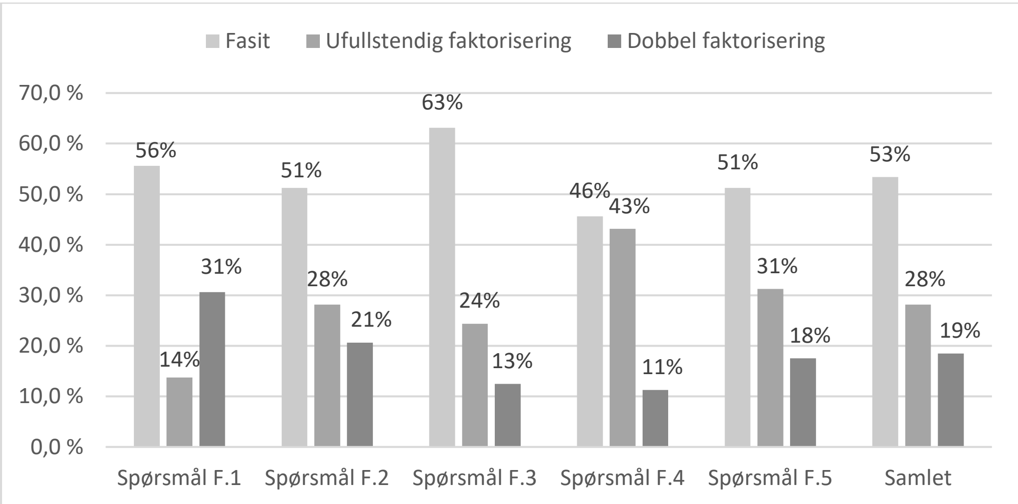
4.1 Resultantene fra enkeltoppgavene i hver kategori

Figur 4.1.1 og Figur 4.1.2 viser henholdsvis den relative andelen som har svart de forskjellige svaralternativene på oppgavene om distribusjon, og oppgavene om faktorisering. Her ser vi en synkende andel fasit svar i takt med den antatt økende vanskelighetsgraden hos distribusjon, men en litt mer tilfeldig trend hos faktorisering.



Figur 4.1.1: Relativ svarfrekvens for de forskjellige svaralternativene på oppgavene om distribusjon
Note: For svaralternativ, se Tabell 3.3.2.1.

Av Figur 4.1.1 kan vi se at den gjennomsnittlige andelen riktige svar i kategorien distribusjon er på 66%, og varierer i et område fra 58% til 75%. Andelen som har valgt svaralternativ hvor man ignorerer parentes er betydelig lavere med en gjennomsnittlig andel på 23%, hvor det for hvert spørsmål varierer mellom 18% til 29%. Ufullstendig distribusjon er det svaralternativet som har den laveste andelen svar med et gjennomsnitt på bare 11%. Denne feiltypen varierer dog mellom 5% til 17%, som er et nesten like stort spenn som ignorerer parentes.



Figur 4.1.2: Relativ svarfrekvens for de forskjellige svaralternativene på oppgavene om faktorisering
Note: For svaralternativ, se Tabell 3.3.3.1.

Fra Tabell 4.1.2 kan vi se at dobbel faktorisering er det svaralternativet som er minst valgt innenfor kategorien faktorisering med en samlet andel på 19%. Med en variasjon mellom fra 11% til 31% ser vi en noe høyere variasjon her enn i kategorien distribusjon. Dette ser vi også hos alternativet ufullstendig faktorisering som varierer fra 14% til 43%, med et snitt på 28%. Den samlede andelen riktige svar i kategorien faktorisering er på 53%, hvor andelen for hvert spørsmål varierer mellom 46% til 63%.

Tabell 4.1.1: *Relativ svarfrekvens for riktig og galt svar på oppgavene om kommutativitet*

Oppgave	Algebraisk påstand	Riktig svar	Galt svar
K.1	a+b+c = b+a+c	75 %	25 %
K.2	a-b = b-a	49.4 %	50.6 %
K.3	a-b-c = a-c-b **	20.6 %	79.4 %
K.4	a·b·c = b·a·c	50.6 %	49.4 %
K.5	a·b:c = a·c:b	41.3 %	58.8 %
Samlet		47.9 %	52.6 %

** Gitt at a, b og c ikke har samme verdi

Note: For svaralternativ, se Tabell 3.3.4.1

Andelen riktige svar på spørsmålene om kommutativitet for hele utvalget er presentert i Tabell 4.1.1. Her ser vi en ganske lik fordeling av riktige og gale svar, bortsett fra på oppgave K.1 og K.3 som har en henholdsvis høy andel riktige svar med 75%, og lav andel riktige svar med 21%. Det er påfallende at respondentene samlet sett svarer mer feil enn rett i denne kategorien med kun 48% riktige svar.

Tabell 4.1.2: *Relativ svarfrekvens for de forskjellige svaralternativene på oppgavene om notasjon*

Oppgave	Algebraisk uttrykk	Fasit	Svarkode 2	Svarkode 3
N.1	$4x$	61.3 %	7.5 %	31.3 %
N.2	xy	85 %	14.4 %	0.6 %
N.3	$3x^2$	56.3 %	12.5 %	31.3 %
N.4	x^2y	73.8 %	15 %	11.3 %
N.5	$x(y)$	78.1 %	15 %	6.9 %
Samlet		70.9 %	12.9 %	16.2 %

Note: For svaralternativ, se Tabell 3.3.5.1

I kategorien notasjon ser man også en del variasjon. Her i hovedsak i andelen riktige svar og hvor mange som svarer alternativet med kode 3. Alternativet med kode 2 har i motsetning en mer stabil økende forekomst. Av Tabell 4.1.2 kommer det også fram at dette er utvalgets beste kategori med et samlet resultat på 71% riktige svar. Oppgave N.3 den oppgaven med mest feil, etterfulgt av N.1 med henholdsvis 56% og 61% riktige svar. Oppgavene N.2 og N.5 er oppgavene med flest riktige svar, med henholdsvis 85% og 78% riktige svar. Resultatet viser at det er en uoverensstemmelse mellom resultatene og den forventede vanskelighetsgraden på oppgavene.

4.2 Resultatene av korrelasjonsanalysen

Resultatet av korrelasjonsanalysen mellom prestasjonene i hver kategori kan sees i Tabell 4.2.1. Her ser vi signifikante korrelasjoner mellom samtlige kategorier. Korrelasjonene kan beskrives som svake til moderate basert på klassifiseringen fra Johannessen et al. (2016, s. 306). Som forventet er korrelasjonen mellom distribusjon og faktorisering den sterkeste av de moderate korrelasjonene. Kategorien notasjon har moderate korrelasjoner til både distribusjon og faktorisering. For kategorien kommutativitet viser det seg å være kun svake korrelasjoner hvor den sterkeste av dem er med distribusjon, den midterste korrelasjonen er med notasjon, og den svakeste korrelasjonen finner vi mellom kommutativitet og faktorisering.

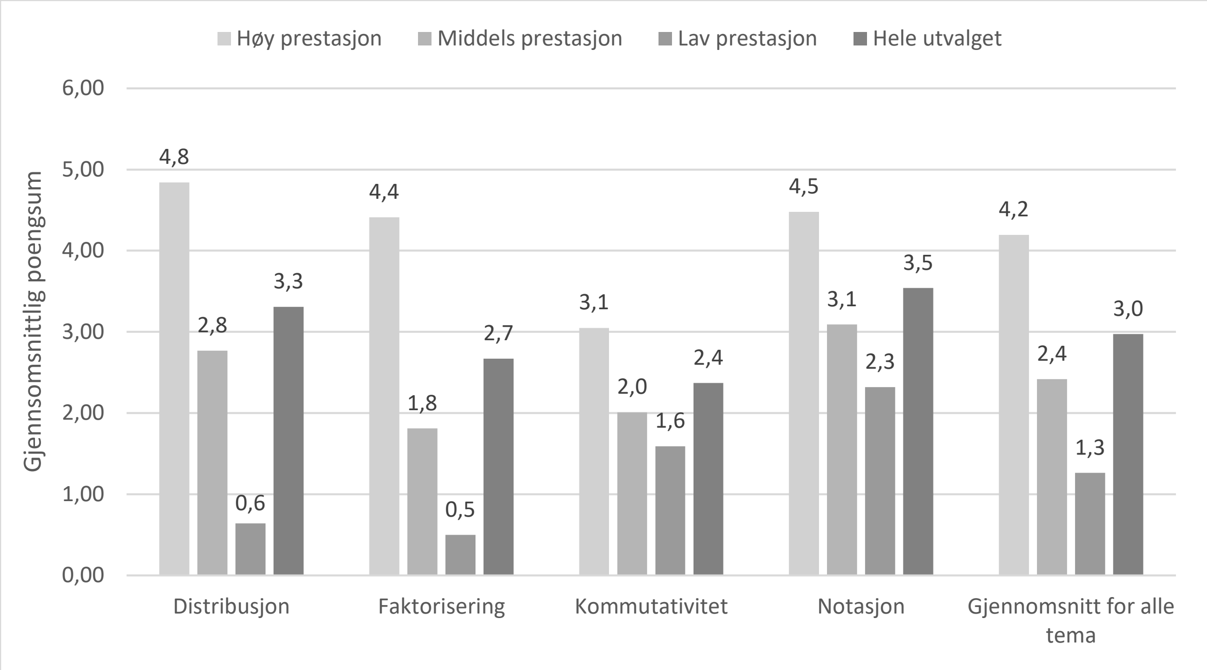
Tabell 4.2.1: *Korrelasjon mellom oppnådd poengsum I hver kategori for hele utvalget*

			Poengsum D	Poengsum F	Poengsum K
Spearman's ρ	Poengsum F	Koeffisient	$.670^{***}$		
		Sig. (2-tailed)	<.000		
		N	160		
	Poengsum K	Koeffisient	$.312^{***}$	$.254^{**}$	
		Sig. (2-tailed)	<.000	.001	
		N	160	160	
	Poengsum N	Koeffisient	$.456^{***}$	$.487^{***}$	$.300^{***}$
		Sig. (2-tailed)	<.000	<.000	<.000
		N	160	160	160

* $p<.05$, ** $p<.01$, *** $p<.001$

4.3 Resultatene fra hypotesetesting av forskjeller

Gjennomsnittlig poengsum for hver gruppe innenfor hver kategori er illustrert i Figur 4.3.1. Disse resultatene er det som danner grunnlaget for hypotesetestene senere i delkapittelet. På samme måte som hos hele utvalget viser en Kolmogorov-Smirnov test at poengsummene i hver kategori ikke er normalfordelt (p<.001) og at det derfor må benyttes ikke-parametriske tester.



Figur 4.3.1: Gjennomsnittlig poengsum i hver kategori for gruppene med lav, middels og høy prestasjon, og hele utvalget

For å undersøke forskjellene mellom prestasjonene i hver kategori ble de gjennomført en related-samples Friedman's two-way ANOVA by Rank test. Resultatene av denne testen er oppsummert i Tabell 4.3.1.1 i neste seksjon. I senere seksjoner vil det refereres tilbake til denne tabellen, men de følgende seksjonene vil dog ha egne tabeller for resultatene av post-hoc testing.

4.3.1 Friedman's ANOVA - hele utvalget

Resultatet av related-samples Friedman's two-way ANOVA by ranks testen fra Tabell 4.3.1.1 viste at det var en signifikant, men liten forskjell mellom resultatene i de forskjellige kategoriene for hele utvalget. Post-hoc analyse (se Tabell 4.3.1.2) viste signifikant forskjell mellom faktorisering og kommutativitet. Kategorien distribusjon var signifikant forskjellig fra både faktorisering og kommutativitet. Mens notasjon var signifikant forskjellig fra både faktorisering og kommutativitet.

Tabell 4.3.1.1: ***Related-samples*** *Friedman's two-way ANOVA by* ***Rank Test for utvalget og de tre gruppene med forskjellig prestasjon***

	N	χ^2_{rank}	*p*-verdi	*W*
Hele utvalget	160	85.756	<.001***	.179
Høy prestasjon	64	98.095	<.001***	.511
Middels prestasjon	74	38.576	<.001***	.174
Lav prestasjon	22	32.070	<.001***	.486

* *p*<.05, ** *p*<.01, *** *p*<.001

Dette medfører at notasjon og distribusjon er utvalgets beste kategorier med et signifikant bedre resultat enn både kategorien faktorisering og kategorien kommutativitet. Samtidig er kommutativitet utvalgets dårligste kategori med en signifikant dårligere prestasjon enn samtlige andre kategorier.

Tabell 4.3.1.2: *Resultatene av Dunn's pairwise post hoc tests etter Friedman's two-way ANOVA by ranks test for hele utvalget*

Sample 1 - Sample 2	Test verdi (*z*)	p-verdi
Poengsum F - Poengsum D	.619	<.001***
Poengsum K - Poengsum F	.294	.042*
Poengsum F - Poengsum N	-.737	<.001***
Poengsum K - Poengsum D	.913	<.001***
Poengsum D - Poengsum N	-.119	.411
Poengsum K - Poengsum N	-1.031	<.001***

Note: Hver rad tester nullhypotesen at fordelingen av Sample 1 og Sample 2 er lik.
* $p<.05$, ** $p<.01$, *** $p<.001$

4.3.2 Friedman's ANOVA - gruppen med høy prestasjon

Resultatet av related-samples Friedman's two-way ANOVA by ranks testen for gruppen med høy prestasjon (se Tabell 4.3.1.1) viste at det var en signifikant og stor forskjell mellom resultatene i de forskjellige kategoriene for gruppen. I Tabell 4.3.2.1 kan vi se at gruppen presterer like godt i kategoriene notasjon og faktorisering. Mens gruppen gjør det signifikant bedre i distribusjon enn de andre kategoriene. Gruppen presterer dårligst i kommutativitet som er signifikant dårligere enn samtlige andre kategorier.

Tabell 4.3.2.1: *Resultatene av Dunn's pairwise post hoc tests etter Friedman's two-way ANOVA by ranks test for gruppen med høy prestasjon*

Sample 1 - Sample 2	Test verdi (*z*)	p-verdi
Poengsum F - Poengsum D	.531	.020*
Poengsum K - Poengsum F	1.297	<.001***
Poengsum F - Poengsum N	-.078	.732
Poengsum K - Poengsum D	1.828	<.001***
Poengsum N - Poengsum D	.453	.047*
Poengsum K - Poengsum N	-1.375	<.001***

Note: Hver rad tester nullhypotesen at fordelingen av Sample 1 og Sample 2 er lik.
* $p<.05$, ** $p<.01$, *** $p<.001$

4.3.3 Friedman's ANOVA - gruppen med middels prestasjon

En related-samples Friedman's two-way ANOVA by ranks test, gjengitt i Tabell 4.3.1.1, viste at det var en signifikant, men liten forskjell mellom resultatene i de forskjellige kategoriene i gruppen med middels prestasjon. Post-hoc analyse viste signifikant forskjell på poengsummene mellom alle sammenlignede par bortsett fra mellom resultatene oppnådd i kategoriene notasjon og distribusjon, og mellom faktorisering og kommutativitet. Med dette kan vi konkludere at kategoriene notasjon og distribusjon viste et signifikant bedre resultat enn kategoriene kommutativitet og faktorisering.

Tabell 4.3.3.1: *Resultatene av Dunn's pairwise post hoc tests etter Friedman's ANOVA for gruppen med middels prestasjon*

Sample 1 - Sample 2	Test verdi (*z*)	p-verdi
Poengsum F - Poengsum D	.845	<.001***
Poengsum F - Poengsum K	-.135	.524
Poengsum F - Poengsum N	-1.020	<.001***
Poengsum K - Poengsum D	.709	.001**
Poengsum D - Poengsum N	-.176	.408
Poengsum K - Poengsum N	-.885	<.001***

Note: Hver rad tester nullhypotesen at fordelingen av Sample 1 og Sample 2 er lik.
* p<.05, ** p<.01, *** p<.001

4.3.4 Friedman's ANOVA - gruppen med lav prestasjon

Fra Tabell 4.3.1.1 kan vi se resultatene av en related-samples Friedman's two-way ANOVA by ranks test for gruppen med lav prestasjon. Denne viste at det var en signifikant og stor forskjell mellom resultatene i de forskjellige kategoriene for denne gruppen. Ved hjelp av Dunn's test viste post-hoc testing at begge kategoriene distribusjon og faktorisering ga signifikant dårligere resultater enn både kategorien notasjon og kategorien kommutativitet. Det ble dog ikke påvist noen forskjell mellom kategoriene notasjon og kommutativitet, eller mellom kategoriene distribusjon og faktorisering.

Tabell 4.3.4.1: *Resultatene av Dunn's pairwise post hoc tests etter Friedman's ANOVA for gruppen med lav prestasjon*

Sample 1 - Sample 2	Test verdi (*z*)	p-verdi
Poengsum F - Poengsum D	.114	.770
Poengsum F - Poengsum K	-1.182	.002**
Poengsum F - Poengsum N	-1.705	<.001***
Poengsum D - Poengsum K	-1.068	.006**
Poengsum D - Poengsum N	-1.591	<.001***
Poengsum K - Poengsum N	-.523	.179

Note: Hver rad tester nullhypotesen at fordelingen av Sample 1 og Sample 2 er lik.
* p<.05, ** p<.01, *** p<.001

4.3.5 *Wilcoxon testing*

En one sample Wilcoxon signed-rank test viste at elevenes resultat i distribusjon (*Mdn*=4.0) ikke var signifikant avvikende fra den hypotetiske verdien (*Mdn*=3.5) diktert av forventningene gitt av læreplan og eksamen. Samme test viste dog at elevenes resultat i faktorisering (*Mdn*=3.0) var signifikant lavere, med stor effekt, enn det hypotetiske nivået (*Mdn*=3.5) som læreplan og eksamen legger opp til.

Tabell 4.3.5.1: *Resultatet av one sample Wilcoxon signed-rank test for kategoriene distribusjon og faktorisering hos hele utvalget*

	Forventet Mdn	Observert Mdn	Z	p-verdi	r_{rb}
Distribusjon	3.5	4.0	-.709	.478	.063
Faktorisering	3,5	3.0	-5.070	<.001***	.457

* *p*<.05, ** *p*<.01, *** *p*<.001

Ved hjelp av resultatene fra en related-samples Wilcoxon signed rank test (se Tabell 4.3.5.2) ble det vist at det var en signifikant forskjell, med medium effekt, i elevenes prestasjon i kategoriene distribusjon og faktorisering i hele utvalget. Forskjellen i prestasjon mellom distribusjon og faktorisering ble vist ved hjelp av samme test å være signifikant med en stor effekt for gruppen med middels prestasjon og med en medium effekt for gruppen med høy prestasjon. Det ble ikke vist noen signifikant forskjell mellom elevenes prestasjon i distribusjon og faktorisering for gruppen med lav prestasjon.

Tabell 4.3.5.2: ***Related-samples Wilcoxon signed sank test for utvalget og de tre gruppene mellom distribusjon og faktorisering***

	N	Z	p-verdi	r_{rb}
Hele utvalget	160	-4.994	<.001***	.312
Høy prestasjon	64	-3.368	.001**	.295
Middels prestasjon	74	-3.892	<.001***	.430
Lav prestasjon	22	-.483	.629	.044

* *p*<.05, ** *p*<.01, *** *p*<.001

4.3.6 *One-sample binomial testing*

Tosidet one-sample binomial testing (se Tabell 4.3.6.1) viste både at andelen feil kodet som «Ignorerer parentes» for samtlige spørsmål i kategorien distribusjon var signifikant større enn den forventede andelen på 50% av totalt antall feil (67%) for hele utvalget. Andelen feil kodet som «Ufullstendig faktorisering» for samtlige spørsmål i kategorien faktorisering var også signifikant større enn den forventede andelen på 50% av totalt antall feil (60%) for hele utvalget. Feilkoden «Ignorerer parentes» var i tillegg signifikant større for gruppene med lav og middels prestasjon, med en andel av totalt antall feil på henholdsvis 69% og 67%. Feilkoden «Ufullstendig faktorisering» viste seg å være signifikant større for gruppen med høy prestasjon med en andel på 68% av totalt antall feil. Det samme viste seg for gruppen med middels prestasjon med en andel av totalt antall feil på 60%. For gruppen med høy prestasjon var det ingen signifikant forskjell mellom fordelingen av «Ignorerer parentes» og «Ufullstendig distribusjon». Det var heller ingen signifikant forskjell på fordelingen av «Ufullstendig faktorisering» og «Dobbel faktorisering» i gruppen med lav prestasjon.

Tabell 4.3.6.1: *Resultatet av one-sample binomial test for kategoriene distribusjon og faktorisering hos utvalget og gruppene med forskjellig prestasjon*

Kategori	Gruppe	Feil kategori	N	Observert andel	Test andel	p-verdi
Distribusjon	Hele utvalget	Ignorerer parentes	182	.67	.50	<.001***
		Ufullstendig distribusjon	89	.33		
	Høy prestasjon	Ignorerer parentes	5	.50	.50	1.000
		Ufullstendig distribusjon	5	.50		
	Middels prestasjon	Ignorerer parentes	111	.67	.50	<.001***
		Ufullstendig distribusjon	54	.33		
	Lav prestasjon	Ignorerer parentes	66	.69	.50	<.001***
		Ufullstendig distribusjon	30	.31		
Faktorisering	Hele utvalget	Ufullstendig faktorisering	225	.60	.50	<.001***
		Dobbel faktorisering	148	.40		
	Høy prestasjon	Ufullstendig faktorisering	26	.68	.50	.034*
		Dobbel faktorisering	12	.32		
	Middels prestasjon	Ufullstendig faktorisering	142	.60	.50	.002**
		Dobbel faktorisering	94	.40		
	Lav prestasjon	Ufullstendig faktorisering	57	.48	.50	.159
		Dobbel faktorisering	42	.42		

* $p<.05$, ** $p<.01$, *** $p<.001$

4.4 Oppsummering av hovedfunn

Related-samples Friedman's two-way ANOVA by ranks testing med påfølgende Dunn's tester viste at kommutativitet hadde signifikant dårligere resultat enn de andre kategoriene. Notasjon og distribusjon hadde et signifikant høyere resultat. Det ble funnet signifikante, svake til moderate korrelasjoner mellom alle kategorier. Related-samples Wilcoxon signed rank tester viste signifikant forskjell i prestasjon mellom distribusjon og faktorisering. One sample Wilcoxon signed-rank test viste en signifikant lavere prestasjon i faktorisering enn forespeilet av Fagfornyelsen. Binomial testing viste en signifikant høyere forekomst av feilene «Ignorerer parentes» og «Ufullstendig faktorisering».

5.0 Diskusjon

Med mål om å kunne besvare problemstillingen «I hvilken grad kan tiende klassinger benytte seg av den distributive lov i algebra, gjennom gjenkjenning av struktur?» vil jeg i dette kapitelet forsøke å gi mening til resultatene fra forrige kapittel. Dette vil jeg prøve å oppnå ved å diskutere dem gjennom linsen av det teoretiske grunnlaget for denne studien som ble beskrevet tidligere i oppgaven. Sentralt for problemstillingen er det strukturelle aspektet ved algebra. Diskusjonen vil dermed i stor grad være sentrert rundt *structure sense* som beskrevet i kapittel to.

Strukturen i kapittelet vil være en som baserer seg på å gå fra enkelt elementene av undersøkelsen, til et mer overordnet nivå mot slutten av kapitelet. Konkret vil det si at jeg først tar for meg indikasjonene fra besvarelsen av enkeltspørsmålene, før jeg videre ser på hvordan de forskjellige kategoriene forholder seg til hverandre og hvordan dette kan belyse problemstillingen.

5.1 Diskusjon av resultatene fra enkeltoppgavene

En gjennomgang av svarene på oppgavene avslører både resultater som er som forventet, og noen resultater som er overraskende. Siden oppgavene ble laget med utgangspunkt i teorien på feltet er det dermed interessant å se på hvilke oppgaver som stikker seg ut, og hvilke implikasjoner disse variasjonene medfører. Jeg vil derfor ta for meg oppgavene i disse to gruppene og diskutere hvorfor de kan klassifiseres på den måten for hver kategori, før jeg ser på hvordan disse overraskende resultatene kan forklares.

5.1.1 Oppgavene innen distribusjon

Oppgavene relatert til distribusjon ga resultater som i stor grad var forventet med tanke på økende vanskelighetsgrad. Oppgave D.1 har 75% riktige svar, mens D.5 har 58%. Oppgavene innen distribusjon har en gjennomsnittlig andel riktige svar på 66%. Denne forventningen var basert på resultatene til Schueler-Meyer (2016) som viser studenters problemer med å gjenkjenne den distributive lov i uttrykk med økende kompleksitet. Forventningen ble videre forsterket ved at det i denne studien ble brukt et utvalg av de samme egenskapene brukt i Table 2. av Schueler-Meyer (2016, s. 2725) for å skjule strukturen av den distributive lov, og på den måten utfordre elevenes structure sense.

For oppgavene i distribusjon ser vi også en forventet forekomst av svarkode 2, «Ignorerer parentes», basert på litteraturen som studien er basert på. Dette er en misoppfatning som trekkes fram av både Aydin-Güc og Aygün (2021), og MacGregor og Stacey (1997). Den samlede forekomsten av denne feilen er på 23%, noe som er betydelig høyere enn det som var forespeilet. Den høye forekomsten kan nok forklares med at hver oppgave kun hadde tre svaralternativer, noe som gjør at dette alternativet innehar en større andel tilfeldige feil. Andelen av «Ignorerer parentes» er på 67% av det samlede antallet feil, noe som er signifikant høyere enn «Ufullstendig distribusjon» (33%). Dette ser vi også i gruppene med lav og middels prestasjon.

I kategorien distribusjon kan man se at oppgave D.4 har en andel riktige svar på 64%, som er 4 prosentpoeng høyere enn D.3 og bare 2 prosentpoeng lavere enn gjennomsnittet for oppgavene i kategorien. Dette er et noe uventet resultat som man kan se på to forskjellige måter. En måte å tolke det på er at D.4 har en kunstig høy andel riktige svar. Fra et strukturelt ståsted vil man kunne si at D.4 har høyere vanskelighetsgrad enn D.3 siden det her blir introdusert venstre distributivitet. Det er dog mer sannsynlig at det her er et tilfelle hvor D.3 har en større vanskelighetsgrad enn først antatt. Om man tar resultatene i kategorien kommutativitet i betraktning, sammen med tidligere litteratur som beskriver den kommutative lov som et problem område, vil man kunne spekulere i at dette er en faktor i denne oppgaven (Bush & Karp, 2013; Maffia & Mariotti, 2017; Warren, 2003). I oppgave D.3 blir man bedt om å distribuere uttrykket *a(bc+d)* hvor utrykket *da+bac* fungerer som fasit svar. Om man har vanskeligheter med kommutativitet for både multiplikasjon og addisjon kan dette alternativet være vanskelig å gjenkjenne som det riktige svaret. Dette kan også forklare hvorfor D.3 har den høyeste andelen av svarkode 2 (29%). I det alternativet vil produktet *abc* være mer gjenkjennelig enn *bac*, som gjør alternativet attraktivt på tross av mangelen på *da*.

5.1.2 Oppgavene innen faktorisering

På tross av manglende forskning rundt norske elevers beherskelse av faktorisering på tiende trinn viser resultatene at nivået ligger lavere enn det var forventet å ligge basert på analyse av læreplan og eksempler på eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2020b, 2020c, 2020e, 2023). Dette viser seg gjennom en gjennomsnittlig poengsum i kategorien på 2.67 poeng og et gjennomsnitt på 53% riktige svar for faktoriseringsoppgavene. Samtidig kan dette være et tegn på at norske elever har lignende problemer med faktorisering som vi ser internasjonalt (Dogrucan et al., 2020; Hurst et al., 2021; Zakaria et al., 2010). Disse oppgavene viste dog ikke samme forutsigbare vanskelighetsgrad, og stabilitet i typen feilsvar som hos distribusjon. På tross av en mangel på tidligere forskning rundt konkrete misoppfatninger i faktorisering, er den signifikant større andelen av «Ufullstendig faktorisering» hos både hele utvalget og gruppene med høy og middels prestasjon forventet. Dette baseres på det at «Ufullstendig faktorisering» sees på som en invers til «Ufullstendig distribusjon» som presenteres som en misoppfatning av Booth et al. (2014).

Det er flere overraskende funn i kategorien faktorisering. Her er det elementer med oppgavene F.1, F.3 og F.4 som stikker seg ut. F.1 er den distributive lov i på sin enkleste form. Her svarer 56% av elevene riktig, noe som bare er 3 prosentpoeng mer enn det samlede resultatet. Denne oppgaven er også den eneste oppgaven med en overvekt av svarkode 3 (31%) kontra svarkode 2 (14%). Noe som bryter veldig med gjennomsnittet på henholdsvis 19% og 28%. Siden F.1 er den eneste oppgaven hvor dette skjer er det vanskelig å finne noen god forklaring på dette, spesielt når F.2 er så lik F.1 i struktur.

Hvorfor F.1 tilsynelatende er så vanskelig kan dog sees i forbindelse med F.3. Basert på både resultatene fra hele utvalget kan vi se at elevene gjør det merkbart bedre på F.3 (63%) enn det samlede resultatet (53%). Det unike med oppgave F.3 er at det er den eneste oppgaven som består av summen av to variabler med hver sin koeffisient. Fra et *structure sense* perspektiv kan man spekulere i at dette gjør oppgavens struktur enda tydeligere da distinksjonen mellom tall og variabel er med på å skille faktorene fra hverandre. Det er også mulig at en misoppfatning hvor variablene blir ignorert, som beskrevet av blant andre Küchemann (1981), kan være med å hjelpe elevene fokusere på felles faktoren ved en tilfeldighet. Det kan også spekuleres i at erfaring fra primtallsfaktorisering gjør oppgaven lettere. Det kan i tillegg være mulig at dette er en type oppgave som er veldig mye brukt i undervisning, og at den derfor er mer kjent for elevene.

F.4 er den oppgaven hvor elevene har dårligst resultat (46%) og den stikker seg også ut ved at andelen riktige svar bare er 3 prosentpoeng høyere enn svarkode 2, som er ufullstendig faktorisering (43%). Dette gjør også oppgaven til den som har den laveste andelen svarkode 3 (11%). Uttrykket som skal faktoriseres i F.4 er b^2+b. Fra et strukturelt ståsted er dette det uttrykket hvor strukturen av den distributive lov er mest gjemt. Det kan basert på F.4 alene være vanskelig å si hva som har størst effekt av $bb=b^2$ og $1b=b$, men om vi ser på F.5 som også inneholder en eksponent så ser vi at denne oppgaven har et resultat på linje med F.2. Vi kan dermed anta at det som gjør oppgave F.4 ekstra vanskelig er å identifisere b som $1 \cdot b$.

5.1.3 Oppgavene innen notasjon

Elevene gjorde det ikke uventet best i kategorien notasjon, men vi får også her bekreftet tilstedeværelsen av misoppfatninger fra litteraturen. Hos disse oppgavene ser vi en ganske stabil forekomst av svaralternativ 2, med en gjennomsnittlig andel på 12.9%. Siden disse alternativene tar utgangspunkt i misoppfatningen om at skjult multiplikasjon i algebraisk notasjon forveksles med addisjon (Booth et al., 2014; Booth et al., 2017) er dette ikke spesielt overraskende.

På samme måte som i kategorien faktorisering så er det dog flere overraskelser i kategorien notasjon. For oppgave N.1 har svarkode 3 en veldig overraskende svarandel på 31%. Noe som tilsynelatende tilsier at elevene forveksler $4x$ med x^4. Om man ser på resultatene av oppgave N.3 og N.4 ser man dog at elevene har en grunnleggende forståelse av eksponenter som noe ganget med seg selv. Om man kombinerer svarene til dem som svarer korrekt på N.3 og de som forveksler $3x^2$ med $(3x)^2$ ender man med en andel på 87,5%. Siden den nevnte forvekslingen var forventet basert på misoppfatninger rundt operasjonsrekkefølge og ikke eksponenter er det rimelig å anta at elevene har en grunnleggende forståelse for eksponenter (Bush & Karp, 2013; Wang, 2015). At N.4 har en andel av riktige svar på 74% støtter opp om dette.

I lys av resultatet på N.1 blir også resultatet til N.2 oppsiktsvekkende. Andelen riktige svar øker med 24 prosentpoeng på en tilsynelatende tilsvarende oppgave. Inklusjonen av to variabler skulle antyde at N.2 kunne oppleves som vanskeligere enn N.1 på grunn av misoppfatninger rundt variabler (Bush & Karp, 2013; Wang, 2015). Forklaringen på dette ligger nok i hvordan svaralternativene fungerer. For oppgave N.2 ser vi at svarkode 3 har blitt valgt av færre enn 5% av respondentene. Dette kan tyder på at svarkode 3 ikke er appellerende nok, og at oppgave N.2 i realiteten bare har to svaralternativ (Gierl et al., 2017). Noe som hever andelen riktige svar på en kunstig måte i forhold til de andre oppgavene. Dette er spiller nok inn på den høye andelen riktige svar på N.5 også, da denne oppgaven har samme svaralternativer som N.2. Noe som muligens fører til en undervurdering av hvor mange som har misoppfatningen om betydningen av parentes som signal om multiplikasjon fra Booth et al. (2017).

5.1.4 Oppgavene innen kommutativitet

Oppgavene i kategorien kommutativitet er i stor grad karakterisert av dårligere resultater enn forventet. Her spesielt på oppgavene relatert til multiplikasjon og kontrollspørsmålene. På tross av 75% riktig svar på K.1 ender den totale andelen riktige svar på 48%. Noe som kan tyde på at det i utarbeidingen av disse oppgavene ble undervurdert alvorlighetsgraden av misoppfatningene rundt den kommutative lov beskrevet i litteraturen (Bush & Karp, 2013; Maffia & Mariotti, 2017; Warren, 2003). Tilbakemeldinger fra datainnsamlingen tyder på at noen av elevene hadde problemer med å skjønne oppgavene. Noe som også kan tyde på at resultatene her også blir påvirket av en misoppfatning om at to ulike variabler ikke kan ha samme verdi, på tross av at dette er presisert i oppgaven (Bush & Karp, 2013).

5.2 Diskusjon av resultatene fra korrelasjonsanalysen

Av Tabell 4.2.1 kan vi se signifikante korrelasjoner mellom alle kategorier i undersøkelsen som varierer mellom svak og moderat. Dette var i stor grad forventet basert på faktorisering og distribusjons felles opphav i den distributive lov, som kombinert med en relasjonell forståelse ideelt skulle føre til en meget høy korrelasjon (Hofmann, 2019a; Skemp, 1976). Bruken av den kommutative lov til å skape strukturelle utfordringer i oppgavene legger også et grunnlag for en høy korrelasjon mellom resultatene i distribusjon og faktorisering, og resultatene i kommutativitet. Notasjon i algebra er grunnleggende for å forstå hva som står i oppgavene, og hva uttrykk betyr, det er dermed også naturlig å tro at dette vil korrelere høyt med all algebra. På tross av en signifikant korrelasjon mellom notasjon og kommutativitet er det noe overraskende at denne er svak. Dette kan nok forklares med at det i oppgavene om kommutativitet bevisst er brukt multiplikasjonstegn for å gjøre oppgavene i kategorien så uavhengige av notasjon som mulig.

5.3 Diskusjon av forskjellen i prestasjon mellom kategorier

Ikke overraskende viste resultatene at notasjon var det kategorien som elevene gjorde det best i, med en gjennomsnittlig poengsum på 3.54 poeng (*SD*=1.302). På tross av litteraturen som peker på misoppfatninger hos elever når det kommer til notasjon vil notasjon fortsatt være grunnleggende for å forstå hva oppgavene betyr (Booth et al., 2014; Booth et al., 2017). Som nevnt i diskusjonen rundt enkeltoppgavene ser vi nok her et noe redusert resultat på grunn av misoppfatninger rundt operasjonsrekkefølge basert på hva litteraturen sier (Booth et al., 2017; Bush & Karp, 2013; Wang, 2015). Noe som kan forklare hvorfor post-hoc testing etter Friedman's test ikke viste noen signifikant forskjell mellom resultatene i notasjon og distribusjon (*p*=.411). Et mer overraskende resultat var at samme testing viste kommutativitet som signifikant dårligere enn samtlige kategorier med en gjennomsnittlig poengsum på 2.37 poeng (*SD*=1.211). Dette kan som nevnt tidligere tyde på en større grad av misoppfatninger rundt kommutativitet enn hva som framstår av litteraturen, i tillegg til en påvirkning fra misoppfatninger rundt variabelbegrepet (Bush & Karp, 2013; Maffia & Mariotti, 2017; Warren, 2003).

Det mest uventede resultatet er nok den signifikante forskjellen mellom resultatene i distribusjon og faktorisering. Noe som man også ser hos gruppen med middels prestasjon og gruppen med høy prestasjon. Dette er videre understreket av at forskjellen i andel riktige svar mellom oppgave D.1 (75%) og F.1 (56%) er hele 19 prosentpoeng, hvor begge oppgavene representerer den distributive lov på sin enkleste form. I likhet med forventningene til en høy korrelasjon mellom distribusjon og faktorisering stammer forventningen til en lik prestasjon mellom de to kategoriene fra det faktum at begge transformasjonene av uttrykkene i oppgavene stammer fra den distributive lov (Hofmann, 2019a). En relasjonell forståelse av denne loven, og en forståelse av likhet, vil da resultere i en lik beherskelse av begge kategorier (Kieran, 1981; Skemp, 1976). Zakaria et al. (2010) peker på faktorisering som et problem for elever på niende trinn, så resultatet kunne på den måten kanskje vært forventet. Forbindelsen mellom distribusjon og faktorisering hadde nok dog heller ført til en tilsvarende lav forventning i kategorien distribusjon, framfor en signifikant forskjell.

Vi finner dog muligens forklaringen på denne forskjellen hos Hoch og Dreyfus (2004) som i sin undersøkelse peker på at parenteser i uttrykk kan hjelpe elever med å gjenkjenne struktur og like elementer. Forskjellen i prestasjon kan dermed ha sin forklaring i at parentesene i uttrykket $a(b+c)$ hjelper elevene å oppfatte a som en faktor som skal multipliseres med $(b+c)$, og at dette gjelder for alle oppgavene i kategorien distribusjon. I motsetning til i oppgavene i kategorien faktorisering hvor mangelen på parenteser kan gjøre det vanskeligere å identifisere de to addendene *ab* og *ac* som to multiplikasjoner med fellesfaktor *a* i uttrykket *ab+ac.* Som nevnt i diskusjonen av enkeltoppgavene kan også den ekstra strukturelle utfordringen med å kunne identifisere *b* som *1·b* være en faktor som er med på å forklare forskjellen.

5.4 Diskusjon av prestasjon opp mot læreplan

Innenfor kategorien distribusjon presterte elevene som forventet (*Mdn*=3.5) med en median på 4.0 poeng i kategorien. Med dette demonstrerer elevene at de behersker å bruke den distributive lov til distribusjon i *transformerende* aktiviteter, som beskrevet av GTG-modellen (Kieran, 2007). Dette var i stor grad forventet i og med at undervisningen til elevene i likhet med oppgavene i undersøkelsen er lagt opp etter læreplanen og eksamen for tiende trinn i matematikk. Det viste seg derimot at elevenes prestasjon i faktorisering (*Mdn*=3.0) var signifikant lavere enn det som var forventet basert på forventningene lagt av læreplanen, eksemplene på eksamen, og veiledningen til eksamen for våren 2023 med en stor effektstørrelse (Utdanningsdirektoratet, 2020c, 2021, 2022, 2023). Som beskrevet tidligere med tanke på enkeltoppgaver og forskjellen mellom kategoriene kan man i stor grad koble disse svake resultatene til utfordringer med å gjenkjenne struktur. Med utgangspunkt i eksempelsett fra Utdanningsdirektoratet (2022) ser det ut til at elevene har utfordringer som vil gjøre seg spesielt gjeldende i arbeidet med figurtall. Problemer med å identifisere *b* som *1·b* vil kunne føre til problemer med å identifisere *n* som *1·n.* Som et resultat vil man kunne oppleve problemer med å faktorisere uttrykk som n^2+n. Det blir ikke eksemplifisert i denne studien, men dette kan også føre til problemer med faktorisering av uttrykk som *4n+2* om samme problem oppstår med *2=1·2.*

6.0 Avslutning

Som en avslutning av denne oppgaven vil jeg besvare problemstillingen «*I hvilken grad kan tiende klassinger benytte seg av den distributive lov i algebra, gjennom gjenkjenning av struktur?*» ved å sammenfatte forskningsspørsmålene. På den måten vil oppgaven kunne oppfylle sin hensikt som beskrevet i innledningen. Avslutningsvis vil det i tillegg bli en oppsummering av studiens begrensninger før det legges fram noen forslag til videre undervisningspraksis og videre forskning.

6.1 Konklusjon

Med utgangspunkt i forskningsspørsmålene for denne studien kan det nå konkluderes med at det er moderat korrelasjon mellom kategorien notasjon, og kategoriene distribusjon og faktorisering. Vi finner også svake korrelasjoner mellom kategorien kommutativitet, og kategoriene distribusjon og faktorisering. Kategoriene distribusjon og faktorisering viser seg i tillegg til å ha en moderat korrelasjon seg imellom.

Videre kan vi konstatere at notasjon er kategorien som elevene gjør det best i både for hele utvalget og på tvers av prestasjonsnivå. Kommutativitet viser seg på samme måte å være elevenes svakeste kategori. Elevene gjør det signifikant dårligere i faktorisering enn i distribusjon på tvers av prestasjonsnivå, med en medium forskjell i prestasjon mellom dem for hele utvalget. En kvantifisering av forventningene etablert av Utdanningsdirektoratet viser at elevene gjør det som forventet i kategorien distribusjon, men at de gjør det signifikant dårligere enn forventet i faktorisering.

Det helhetlige inntrykket fra elevenes besvarelser viser at elevene innen distribusjon har en misoppfatning rundt betydningen av parentes som gjør at disse ignoreres. Under faktorisering har elevene misoppfatninger som fører til at de gjør en ufullstendig faktorisering, hvor fellesfaktoren blir trukket utenfor parentesen og samtidig blir beholdt som en faktor i et av leddene inne i parentesen. Besvarelsen i distribusjon kombinert med det dårlige resultatet i kommutativitet støtter også opp om den eksisterende litteraturen som påpeker misoppfatninger rundt den kommutative lov (Bush & Karp, 2013; Maffia & Mariotti, 2017; Warren, 2003). Besvarelsen i kategorien faktorisering peker også mot en manglende bevissthet rundt identitetselementet til multiplikasjon.

Konklusjonen på denne oppgaven blir dermed at tiendeklassingene i denne studien i stor grad klarer å benytte seg av den distributive lov for å distribuere en faktor over en sum på tross av oppgaver med strukturer som i økende grad var vanskeligere å identifisere. Men elevene klarer i liten grad å benytte den distributive lov til å faktorisere algebraiske uttrykk hvor strukturen av den distributive lov i økende grad er skjult.

6.2 Studiens begrensninger

Enhver konklusjon må balanseres med de begrensingene som ligger i studien den tilhører. Derfor vil disse begrensningene bli oppsummert her. Med tanke på tilnærmingen som er brukt i denne studien er det en klar begrensning at den ikke gir noe innsyn i elevenes tankegang, og at denne må ekstrapoleres fra mønster i besvarelsene. Som igjen er avhengig av operasjonaliseringen av fenomenene. Noe som åpner for feilaktig tolkninger, som igjen gjør at man må tilskrive noe usikkerhet til konklusjonen. Samtidig er det to faktorer som påvirker den ytre validiteten i en negativ retning. Studien har ikke et tilstrekkelig stort utvalg i forhold til populasjonen som dette er trukket fra. Dette gjør at man ikke med tilstrekkelig sikkerhet kan generalisere konklusjonen til hele populasjonen. Samtidig er elevene som har deltatt i studien første generasjon som har fulgt Fagfornyelsen gjennom alle tre år på ungdomsskolen. Som et resultat av dette vil den ytre validiteten være svekket fra perspektivet av å beholde sin validitet over tid, etter hvert som de nye elementene fra Fagfornyelsen blir bedre implementert i undervisningen (Johannessen et al., 2016, s. 389-390).

6.3 Implikasjoner for profesjonspraksisen

Hensikten med denne oppgaven var å bidra til en forbedring av norske elevers prestasjon innen algebra i henhold til både læreplan og internasjonale undersøkelser. Med utgangspunkt i konklusjonen vil jeg derfor peke på noen mulige anbefalinger for undervisningspraksisen i forbindelse med den distributive lov. Primært støtter denne forskningen opp om behovet for et søkelys på elevers misoppfatninger rundt de grunnleggende egenskapene til addisjon og multiplikasjon. Her spesielt den kommutative- og distributive lov. Studiens støtte til Booth et al. (2017) tyder også på at et fokus på parentes som et signal om multiplikasjon vil ha stor gevinst. Det dårlige resultatet innenfor faktorisering tyder også på at dette er noe som må vektes tyngre i undervisningen, samtidig som man bør klare å innlemme identitetselementet til multiplikasjon i undervisningen.

6.4 Videre forskning

Av videre forskning er det i hovedsak to typer prosjekter som jeg ser på som spesielt nyttige på dette feltet. I første omgang hadde en kvantitativ tilnærming vært veldig verdifull for å kunne få tilgang til elevenes tankegang i møte med den distributive lov, og på den måten kunne bidra til en mer utfyllende liste over misoppfatninger knyttet til denne loven. Noe som senere vil kunne gi et mer representativt bilde av de forskjellige misoppfatningenes forekomst i senere kvantitative prosjekter. Den andre typen forskning som jeg ser på som en naturlig vei videre er prosjekter som kartlegger lærernes tilnærming til den distributive lov i undervisningen. Ved hjelp av slike prosjekter kan man identifisere gode praksiser som fører til gode resultater.

Litteraturliste

Ahmad, H. & Halim, H. (2017). Determining Sample Size for Research Activities: The Case of Organizational Research. *Selangor Business Review*, *2*(1), 20-34. https://sbr.journals.unisel.edu.my/ojs/index.php/sbr/article/view/12

Andini, M. & Prabawanto, S. (2020). Relational Thinking in Early Algebra Learning: A Systematic Literature Review. *Journal of Physics: Conference Series*, *1806*, Artikkel 012086. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1806/1/012086

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35. https://www.jstor.org/stable/40248121

Arcavi, A. (2005). Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25*(2), 42-47. https://www.jstor.org/stable/40248497

Aubert, K. E. (2021, 23. juni). Algebra. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 18. januar 2023 fra https://snl.no/algebra

Aydin-Güc, F. & Aygün, D. (2021). Errors and misconceptions of eighth-grade students regarding operations with algebraic expressions. *International Online Journal of Education and Teaching (IOJET)*, *8*(2), 1106-1126. https://eric.ed.gov/?id=EJ1294052

Berch, D. B. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 290-380. https://doi.org/10.1177/00222194050380040901

Bergem, O. K. & Kaarstein, H. (2016). *Vi kan lykkes i realfag - Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (T. Nilsen, Red.). Universitetsforlaget. https://doi.org/10.18261/97882150279999-2016

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F. & Pare-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *The Journal of Problem Solving*, *7*(1), 10-23, Artikkel 3. https://doi.org/10.7771/1932-6246.1161

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C. & Young, L. K. (2017). Misconceptions and Learning Algebra. I S. Stewart (Red.), *And the Rest is Just Algebra* (s. 63-78). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_4

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* [PDF]. Læringssenteret (LS). https://web01.usn.no/~panderse/KIMhefter/kimgammeldiag.pdf (Opprinnelig utgitt på oppdrag fra Utdanningsdirektoratet som en del av KIM-prosjektet)

Brekke, G. & Rosén, B. (1996). Diagnostisk undervisning. *Nämnaren*, (2), 35-40. http://ncm.gu.se/media/namnaren/fulltextpdf/1996/nr_2/3540_96_2.pdf

Bush, S. B. & Karp, K. S. (2013). Prerequisite Algebra Skills and Associated Misconceptions of Middle Grade Students: A Review. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 613-632. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.07.002

Carpenter, T. P., Levi, M., Loef Franke, M. & Koehler Zeringue, J. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,*, *37*(1), 53-59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Cohen, J. (1992). A Power Primer. *Psychological Bulletin*, *112*(1), 155-159. https://doi.org/10.1037/0033-2909.112.1.155

Corry, L. (2022, 9. desember). Algebra. I *Encyclopedia Britannica*. Hentet 21. januar 2023 fra https://www.britannica.com/science/algebra

Creswell, J. W. & Creswell, J. D. (2018). *Research Design: Qualitative, Quantitative & Mixed Methods Approaches* (5. utg.). SAGE Publishing.

Dahlum, S. (2021, 9. mars). Validitet. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 20. januar 2023 fra https://snl.no/validitet

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2021, 16. desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* [Nettside]. Hentet 08. september 2022 fra https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Dogrucan, H., Soybas, D. & Sevgi, S. (2020). The Investigation of Middle School Student Learning Difficulties and Concept Misunderstandings in Multipliers and Factorization. *The Excellence in Education Journal*, *9*(2), 109-144. https://www.excellenceineducationjournal.org/wp-content/uploads/2021/04/EEJ-Volume-9-Issue-3-Fall-2020.pdf

Faul, F., Erdfelder, E., Lang, A.-G. & Buchner, A. (2007). G*Power 3: A flexible statistical power analysis program for the social, behavioral, and biomedical sciences. *Behavior Research Methods*, *39*, 175-191. https://www.psychologie.hhu.de/arbeitsgruppen/allgemeine-psychologie-und-arbeitspsychologie/gpower.html

Fujii, T. (2020). Misconceptions and Alternative Conceptions in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2. utg., s. 625-627). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_114

Gersten, R. & Chard, D. (1999). Number Sense: Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities. *The Journal of Special Education*, *33*(1), 2-61. https://doi.org/10.1177/002246699903300102

Ghosh, A. & Grøtvik, R. (2020, 08. desember). *5.-klassingene på Europa-toppen i matematikk* [Nettside]. Utdanningsforbundet. Hentet 03. oktober, 2022 fra https://www.utdanningsforbundet.no/nyheter/2020/5.-klassingene-pa-europa-toppen-i-matematikk/

Gierl, M. J., Bulut, O., Guo, Q. & Zhang, X. (2017). Developing, Analyzing, and Using Distractors for Multiple-Choice Tests in Education: A Comprehensive Review. *Review of Educational Research*, *87*(6), 1082-1116. https://doi.org/10.3102/0034654317726529

Grenness, T. (2001). *Innføring i vitenskapsteori og metode* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Grimen, H. & Ingstad, B. (2004). Kapittel 9 Kvalitative forskningsopplegg. I H. B. Benestad & P. Laake (Red.), *Forskningsmetode i medisin og biofag* (s. 283-310). Gyldendal akademisk.

Grønmo, L. S. (2013). Algebra og tall er motoren i matematikken – derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. *Bedre skole*, *1*. Hentet 4. juni 2022, fra https://utdanningsforskning.no/artikler/2013/algebra-og-tall-er-motoren-i-matematikken--derfor-gar-matematikkfaget-i-norden-for-halv-fart/

Grønmo, S. (2023, 16. januar). Kvantitativ metode. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 20. januar 2023 fra https://snl.no/kvantitativ_metode

Gulbrandsen, M. & Langfeldt, L. (1997). *Hva er forskningskvalitet? En interviustudie blant norske forskere* (9/97). Norges forskningsråd. N.-N. i. f. s. a. f. o. utdanning. https://nifu.brage.unit.no/nifu-xmlui/bitstream/handle/11250/2425814/NIFUrapport1997-9.pdf?sequence=1

Halcomb, E. J. (2019). Mixed Methods Research: The Issues Beyond Combining Methods. *Journal of Advanced Nursing*, *75*(3), 499-501. https://doi.org/10.1111/jan.13877

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78. https://www.jstor.org/stable/3482666

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and Procedural Knowledge - The Case of Mathematics* (s. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates, Inc. https://doi.org/10.4324/9780203063538 (Opptrykk av Routledge - Taylor & Francis Group)

Hjelseth, A. (2000). *Samfunnsvitenskapelig metode - Studiehefte* (K. A. Rødnes, Red.). Høgskolen i Molde. https://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2008120800129

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets. I M. Johnsen-Høines & A. B. Fuglestad (Red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, s. 49-56). PME. https://www.emis.de/proceedings/PME28/resdom.html#4

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2005). Students' Difficulties With Applying a Familiar Formula in an Unfamiliar Context. I H. Chick & J. L. Vincent (Red.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, s. 145-152). PME. https://www.emis.de/proceedings/PME29/

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2007). Recognising an Algebraic Structure. I D. Pitta & G. Philippou (Red.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 436-445). Department of Education – University of Cyprus. http://erme.site/cerme-conferences/cerme-5/

Hofmann, A. (2019a, 27. juni). Den distributive lov. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 18. januar 2023 fra https://snl.no/den_distributive_lov

Hofmann, A. (2019b, 27. juni). Den kommutative lov. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 20. januar 2023 fra https://snl.no/den_kommutative_lov

Hofmann, A. (2021, 20. juni). Den assosiative lov. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 21. januar 2023 fra https://snl.no/den_assosiative_lov

Hosch, W. L., Young, G., Lotha, G. & Gregersen, E. (2022, 21. juni). Distributive Law. I *Encyclopedia Britannica*. Hentet 22. januar 2023 fra https://www.britannica.com/science/distributive-law

Hurst, C. & Huntley, R. (2020). Distributivity, Partitioning, and the Multiplication Algorithm. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, *5*(3), 231-246. https://doi.org/10.23917/jramathedu.v5i3.10962

Hurst, C., Hurrell, D. & Huntley, R. (2021). Factors and multiples: Important and misunderstood. *International Online Journal of Primary Education (IOJPE)*, *10*(2), 273-286. https://www.iojpe.org/index.php/iojpe/article/view/171

IBM. (u.å.). *SPSS Statistics* (Versjon 27) [Programvare]. IBM. Hentet 27. september 2022 fra https://www.ibm.com/analytics/spss-statistics-software

Ivankova, N. V. & Creswell, J. W. (2009). Mixed Methods. I J. Heigham & R. A. Croker (Red.), *Qualitative Research in Applied Linguistics - A Practical Introduction* (s. 135-161). Palgrave Macmillian. https://link.springer.com/book/10.1057/9780230239517#page=149

Iversen, J. & Holm, S. (2004). Kapittel 1 Vitenskapsteori. I H. B. Benestad & P. Laake (Red.), *Forskningsmetode i medisin og biofag* (s. 27-56). Gyldendal akademisk.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Abstrakt Forlag.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated With the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326. https://www.jstor.org/stable/3482333

Kieran, C. (1996). The Changing Face of Algebra. I C. Alsina, J. M. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Red.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected Lectures* (s. 271-290). S.A.E.M. Thales. https://www.mathunion.org/icmi/digital-library/icme-proceedings

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151. https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching of Algebra at the Middel School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Meaning. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Bd. 2, s. 707-762). Information Age Publishing.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Bradford, F. (Red.). (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822.

Knowles, J. [NTNU Undervisning]. (2018a, 25. september). *ExPhil: Demarkasjonskriteriet* [Video]. Youtube. Hentet 24. oktober 2022 fra https://youtu.be/UdcJtNCV9zQ

Knowles, J. [NTNU Undervisning]. (2018b, 25. september). *ExPhil: Induksjonsproblemet* [Video]. Youtube. Hentet 24. oktober 2022 fra https://youtu.be/AqvnCrKQjwk

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. I K. M. Hart (Red.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (s. 102-119). John Murray. https://www.researchgate.net/profile/Dietmar-Kuechemann/publications

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2019: Kortrapport*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo. https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/timss/

Larsen, S. (2010). Struggeling to Disentangle the Associative and Commutative Properties. *For the Learning of Mathematics*, *30*(1), 37-42. http://www.jstor.org/stable/20749437

Lee, L. & Wheeler, D. (1989). The Arithmetic Connection. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 41-54. https://www.jstor.org/stable/3482561

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship Between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 173-196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

MacDuffee, C. C. (2021, 14. mars). Arithmetic. I *Encyclopedia Britannica*. Hentet 21. januar 2023 fra https://www.britannica.com/science/arithmetic

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19. https://www.jstor.org/stable/3483002

Maffia, A. & Mariotti, M. (2017). Seeking Symmetry in Distributive Property: Children Developing Structure Sense in Arithmetic. I T. Dooley & G. Gueudet (Red.), *Proceedings of the Tenth Congress of the*

European Society for Research in Mathematics Education (s. 379-386). Institute of Education - Dublin City University and ERME. http://erme.site/cerme-conferences/

Migiro, S. O. & Magangi, B. A. (2011). Mixed Methods: A Review of Literature and the Future of the new Research Paradigm. *African Journal of Business Management*, *5*(10), 3757-3764, Artikkel 376999E39803. https://doi.org/10.5897/AJBM09.082

Niss, M. A. (2007). The Concept and Role of Theory in Mathematics Education. I C. Bergsten, B. Grevholm, H. S. Måsøval & F. Rønning (Red.), *Relating practice and research in mathematics education : Proceedings of Norma 05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education* (s. 97-110). Tapir Academic Press.

Norsk senter for forskningsdata. (u.å.). *NSD* [Nettside]. Hentet 22. mai 2022 fra https://www.nsd.no/

Novatná, J. & Hoch, M. (2008). How Structure Sense for Algebraic Expressions or Equations is Related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 93-104. https://doi.org/10.1007/BF03217479

Nygaard, O. & Zernichow, A. G. (2006). Den blokkerende misoppfatning. *Spesialpedagogikk - Temanummer Matematikkvansker/mestring*, *4*, 36-40. https://www.utdanningsnytt.no/files/2019/08/21/Spesialpedagogikk%204%202006.pdf

Pournara, C., Hodgen, J., Sanders, Y. & Adler, J. (2016). Learners' Errors in Secondary Algebra: Insights from Tracking a Cohort from Grade 9 to Grade 11 on a Diagnostic Algebra Test. *Pythagoras - Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, *37*(1), Artikkel 334. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v37i1.334

Radford, L. (2001). The Historical Origins of Algebraic Thinking. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Red.), *Perspectives on School Algebra* (s. 13-36) (Mathematics Education Library). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_2

Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen [The Structuring of an Algebraic Expression as the Production of Relations]. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*, 113-141. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0034-x

Schnepper, L. C. & McCoy, L. P. (2014). Analysis of Misconceptions in High School Mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research*, *15*(1), Artikkel 7. https://doi.org/10.4148/2470-6353.1066

Schueler-Meyer, A. (2014). Students' Manipulation of Algebraic Expressions as 'Recognizing Basic Structures' and 'Giving Relevance'. I P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol & D. Allan (Red.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Bd. 4, s. 209-216). PME. https://eric.ed.gov/?id=ED599913

Schueler-Meyer, A. (2016). Flexibly Applying the Distributive Law – Students' Individual Ways of Perceiving the Distributive Property. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *12*(10), 2719-2732. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1307a

Silver, E. A. & Herbst, P. G. (2007). Theory in Mathematics Education Schollarship. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Bd. 1, s. 39-67). Information Age Publishing.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, *77*(1), 20-26. http://www.davidtall.com/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf

Star, J. R. (2020). Instrumental and Relational Understanding in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2. utg., s. 389-392). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_79

Star, J. R. & Newton, K. J. (2009). The Nature and Development of Experts' Strategy Flexibility for Solving Equations. *ZDM: the international journal on mathematics education*, *41*(5), 557-567. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0185-5

Statistisk sentralbyrå. (2022, 16. desember). *Elevar i grunnskolen* [Nettside]. Hentet 10. mai 2022 fra https://www.ssb.no/utdanning/grunnskoler/statistikk/elevar-i-grunnskolen

Svartdal, F. (2020, 3. april). Reliabilitet. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 18. januar 2023 fra https://snl.no/reliabilitet

Thompson, P. W. (2020). Constructivism in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2. utg., s. 127-134). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_31

Thurén, T. (2009). *Vetenskapsteori för nybörjare* [Vitenskapsteori for nybegynnere] (D. Gjesteland & K. Gjerpe, Overs.; 2. utg.). Gyldendal Akademisk.

Tomczak, M. & Tomczak, E. (2014). The need to report effect size estimates revisited. An overview of some recommended measures of effect size. *Trends in Sport Sciences*, *1*(21), 19-25. http://www.tss.awf.poznan.pl/index.php/archives-tss

Tønnessen, E. (2016, 06. desember). *Algebra-trøbbel er kritisk* [Nettside]. Khrono. Hentet 02. oktober, 2022 fra https://khrono.no/timss-matemtaikk-naturfag/algebra-trobbel-er-kritisk/148370

Tønnessen, E. (2020, 08. desember). *Norske femteklasser fortsatt best i Norden i matematikk* [Nettside]. Khrono. Hentet 02. oktober, 2022 fra https://khrono.no/norske-femteklasser-fortsatt-best-i-norden-i-matematikk/538049

Universitetet i Oslo. (2021, 5. januar). *Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning,. Hentet 4. juni 2022 fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/timss/

Universitetet i Oslo. (u.å.). *Nettskjema - Hva er Nettskjema?* [Nettside]. Nettredaksjonen USIT. Hentet 21. mars 2023 fra https://www.uio.no/tjenester/it/adm-app/nettskjema/

Utdanningsdirektoratet. (2020a, 3. september). *Hva er nytt i matematikk?* [Nettside]. Hentet 10. februar 2023 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet. (2020b, 13. august). *Kjennetegn på måloppnåelse – Matematikk 10. trinn* [Nettside]. Hentet 10. februar 2023 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/kjennetegn/kjennetegn-pa-maloppnaelse-matematikk-10-trinn/

Utdanningsdirektoratet. (2020c). *Læreplan i Matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)* [Nettside]. Hentet 02. oktober 2022 fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Utdanningsdirektoratet. (2020d). *Læreplan i Matematikk Fellesfag vg1 Teoretisk (matematikk T) (MAT09-01)*. Hentet 02. oktober 2022 fra https://www.udir.no/lk20/mat09-01

Utdanningsdirektoratet. (2020e). *Matematikk 1–10 (MAT01-05): Kjerneelementer* [Nettside]. Hentet 10. februar 2023 fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Eksempelsett MAT0010 Matematikk - Del med hjelpemidler* [PDF]. Hentet 27. februar 2023 fra https://matematikk.net/side/Eksamensoppgaver

Utdanningsdirektoratet. (2022, 14. januar). *Eksempeloppgave MAT01-05 Matematikk - Del 2* [PDF]. Hentet 27. februar 2023 fra https://matematikk.net/side/Eksamensoppgaver

Utdanningsdirektoratet. (2023). *Eksamensveiledning – om vurdering av eksamensbesvarelser, MAT0015 Matematikk* [PDF]. Hentet 23. januar 2023 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html?query=MAT0015

Utdanningsdirektoratet. (u.å.). *TIMSS* [Nettside]. Udir. Hentet 06. november 2022 fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/timss/

Van Stiphout, I., Drijvers, P. & Gravemeijer, K. (2013). The Development of Students' Algebraic Proficiency. *International Electronic Journal of Mathematics Education – IΣJMΣ*, *8*(2-3), 62-80. https://doi.org/10.29333/iejme/274

Vermeulen, N., Olivier, A. & Human, P. (1996, 8-12. juli). *Students' Awareness of the Distributive Property* [Paperpresentasjon]. The Twentieth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME 20), València, Spain. http://alearningplace.com.au/wp-content/uploads/2021/01/Vermeulen-DISTRIBUTIVE.pdf

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, Investigating, and Enhancing Adaptive Expertise in Elementary Mathematics Education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*, Artikkel 335. https://doi.org/10.1007/BF03174765

Wang, X. (2015). The Literature Review of Algebra Learning: Focusing on the Contributions to Students' Difficulties. *Creative Education*, *6*, 144-153. https://www.scirp.org/journal/paperinformation.aspx?paperid=53882

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mattlematics Education Research Journal*, *15*(2), 122-137. https://doi.org/10.1007/BF03217374

Wormnæs, O. (1984). *Vitenskapsfilosofi*. Gyldendal Norsk Forlag.

Wormnæs, O. (1993). *Vitenskapsfilosofi* (2. utg.). Ad Notam Gyldendal AS. https://www.nb.no/items/afe9346f7a5fcae831de9b9dfba74a8f?page=0

Yansa, H., Retnawati, H. & Janna, M. (2021). Misconceptions of Basic Algebra on Linear Equation in one Variable Material. *Journal of Physics: Conference Series*, *1882*, Artikkel 012091. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1882/1/012091

Zakaria, E., Ibrahim & Maat, S. M. (2010). Analysis of Students' Error in Learning of Quadratic Equations. *International Education Studies*, *3*(3), 105-110. https://doi.org/10.5539/ies.v3n3p105

Aarnes, J. F. (2020, 30. januar). Aritmetikk. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 21. januar 2023 fra https://snl.no/aritmetikk

Aarnes, J. F. (2021, 11. november). Mohamed Ibn Musa al- Khwarizmî. I E. Bolstad (Red.), *Store norske leksikon*. Hentet 18. januar 2023 fra https://snl.no/Mohamed_Ibn_Musa_al-_Khwarizm%C3%AE

Vedlegg

Vedlegg 1 – Informasjonsskriv til hjemmet

Informasjon om forskningsprosjektet «Distributivitet i Algebra»

Formål

Dette er et mastergradsprosjekt med det formål å bidra til å forbedre den norske algebraundervisningen. Prosjektet vil ende i en mastergradsoppgave med innlevering 15. mai 2023.

Basert på norske elevers lave prestasjon sammenlignet med andre land innenfor temaet algebra på internasjonale undersøkelser har jeg utarbeidet følgende problemstilling:

«*I hvilken grad kan tiende klassinger benytte seg av den distributive lov i algebra, gjennom gjenkjenning av struktur?*»

Hensikten med denne undersøkelsen er å undersøke tiendeklassingers evne til å anvende matematiske lover innenfor algebra. Både gjennom oppløsning av parenteser og faktorisering av algebraiske uttrykk. For så å kunne si noe om i hvilken grad denne evnen er i henhold til hva læreplanene for grunnskolen og videregående skole legger opp til.

Spørreskjemaene som blir samlet inn i forbindelse med dette prosjektet vil bli brukt utelukkende til dette prosjektet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Nord Universitet er den ansvarlige organisasjonen for prosjektet, ved Mohamed el Ghami som veileder.

Hva innebærer det for dere å delta?

For dem som velger å delta i prosjektet innebærer det at de fyller ut et spørreskjema. Det vil variere hvor lang tid dette vil ta, men det vil bli satt et tak på 30 minutter. Spørreskjemaet inneholder spørsmål om grunnleggende ferdigheter i forbindelse med algebra, samt spørsmål relatert til oppløsing av parentes og faktorisering gjennom bruk av den distributive lov. Svarene fra spørreskjemaet blir registrert elektronisk ved hjelp av Nettskjema. <u>Spørreskjema inneholder ingen spørsmål om personlige opplysninger</u> og krever ingen form for innlogging. Opplysningen som blir samlet inn er kun svarene på de forskjellige matematikk oppgavene. Dette gjør skjema 100% anonymt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet for alle elever, ved foresatte. Av den grunn vil det i samarbeid med skolen bli gitt anledning for at dere kan reservere seg mot at deres barn deltar. Hvis dere velger å delta vil ingen personopplysninger som kan identifisere elev, skole eller kommune samles inn. De elevene som eventuelt ikke deltar vil følge vanlig undervisning. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for dem som ikke vil delta.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker opplysninger

Vi vil bare bruke opplysninger vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. All kontaktinformasjon relatert til prosjektet vil oppbevares adskilt fra det øvrige datamaterialet, og vil dermed ikke være med på å identifisere noen. Verken kommune, skole eller elev vil kunne identifiseres i den ferdige masteroppgaven. Prosjektet vil etter planen avsluttes 15. mai, 2023. Datamaterialet som blir samlet inn vil bli lagret i påvente av karakter på masteroppgaven. Etter dette vil det allerede anonyme datamaterialet bli slettet.

Personvernregelverket

På oppdrag fra Nord Universitet har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Reservasjon mot deltakelse

Det er ikke nødvendig å bekrefte at eleven deltar. Om det er ønske om å ikke delta kan man ta kontakt med skolen slik at den det gjelder ikke gjennomfører undersøkelsen.

Med vennlig hilsen

Torbjørn Smedsund
Mastergradsstudent
Nord Universitet, campus Nesna
torbjorn.smedsund@student.nord.no

Mohamed el Ghami
Forsker/veileder
Nord Universitet
mohamed.el-ghami@nord.no

Vedlegg 2 - Spørreundersøkelse til masteroppgave (1)

Obligatoriske felter er merket med stjerne *

Spørsmål D.1 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

a(b+c)

- (b+ac)
- ab+c
- ab+ac

Spørsmål D.2 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

z(y+2x)

- zy+2xz
- (y+2xz)
- zy+2x

Spørsmål D.3 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

a(bc+d)

- abc+d
- (bc+da)
- da+bac

Spørsmål D.4 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

(x+yz)w

- (xw+yz)
- xw+wyz
- x+yzw

Spørsmål D.5 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

b(c+ab)

- bc+ab
- ab^2+cb
- (c+ab^2)

Obligatoriske felter er merket med stjerne *

Spørsmål K.1 *

Om a, b og c kan være hvilke som helst tall, og ha samme verdi,

når er det sant at $a+b+c$ er det samme som $b+a+c$?

- Alltid
- I noen tilfeller
- Aldri

Spørsmål K.2 *

Om a og b kan være hvilke som helst tall, og ha samme verdi,

når er det sant at $a-b$ er det samme som $b-a$?

- Aldri
- I noen tilfeller
- Alltid

Spørsmål K.3 *

Om a, b og c kan være hvilke som helst tall, men ikke ha samme verdi,

når er det sant at $a-b-c$ er det samme som $a-c-b$?

- Alltid
- Aldri
- I noen tilfeller

Spørsmål K.4 *

Om a, b og c kan være hvilke som helst tall, og ha samme verdi,

når er det sant at $a \cdot b \cdot c$ er det samme som $b \cdot a \cdot c$?

- Aldri
- I noen tilfeller
- Alltid

Spørsmål K.5 *

Om a, b og c kan være hvilke som helst tall, og ha samme verdi,

når er det sant at $a \cdot b : c$ er det samme som $a \cdot c : b$?

- Alltid
- I noen tilfeller
- Aldri

Obligatoriske felter er merket med stjerne *

Spørsmål F.1 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

ab+ac

- a(b+ac)
- a(b+c)
- 2a(b+c)

Spørsmål F.2 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

2x+xy

- 2x(2+y)
- x(2+xy)
- (2+y)x

Spørsmål F.3 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

6b+3a

- 9(b+a)
- 3(2b+a)
- 6(b+3a)

Spørsmål F.4 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

b^2+b

- (b+1)b
- b(b+b)
- 2b(b+1)

Spørsmål F.5 *

Hvilket alternativ er likt (=) det følgende uttrykket?

yz+z^2x

- (yz+x)z^2
- 3z(y+x)
- (y+zx)z

Obligatoriske felter er merket med stjerne *

Spørsmål N.1 *

I algebra betyr **4x** det samme som

- $4+x$
- $x \cdot x \cdot x \cdot x$
- $4 \cdot x$

Spørsmål N.2 *

I algebra betyr **xy** det samme som

- $x \cdot y$
- $x+y$
- $x:y$

Spørsmål N.3 *

I algebra betyr **$3x^2$** det samme som

- $3+x \cdot x$
- $3 \cdot x \cdot x$
- $3x \cdot 3x$

Spørsmål N.4 *

I algebra betyr **x^2y** det samme som

- $x \cdot 2 \cdot y$
- $x+x \cdot y$
- $x \cdot x \cdot y$

Spørsmål N.5 *

I algebra betyr **x(y)** det samme som

- $x+y$
- $x \cdot y$
- $x:y$