MASTEROPPGAVE

Emnekode: MAT5003

Navn: Bengt Audun Holann

En analyse av oppgaver i norske lærebøker i matematikk for 3. trinn utgitt etter LK20, sammenlignet med prinsippene i Realistic Mathematics Education.

Dato: 15.05.2023

Totalt antall sider: 56

NORD universitet

www.nord.no

Forord

Denne oppgaven markerer slutten for et femårig utdannelsesløp på lærerutdanningen ved Nord Universitet, avdeling Nesna. Det har vært en periode med utfordrende, men interessant arbeid. Jeg har lært mye gjennom dette arbeidet både om matematikkdidaktikk og min fremtidige profesjon.

Jeg ønsker å rette en takk til fagansvarlige ved Nord Universitet og min veileder, Atle Ivar Olsen. Dere har vært en god støtte gjennom valg av tema, utforming av problemstilling og arbeid med oppgaven. Retter en spesiell takk til Atle som har gitt meg grundige og konstruktive tilbakemeldinger.

Det er også viktig å nevne alle medstudenter som har vært til støtte gjennom hele utdanningsløpet, og spesielt det siste året, hvor arbeidsmengden har vært høy. En spesiell takk til Sofie som har hørt på alle problemer og svart etter beste evne.

En stor takk til de kollegene mine på Åse Montessoriskole som har hjulpet meg gjennom dette året og for forståelsen. Det har vært et utfordrende år som har vært lettere takket være dere.

Til sist vil jeg takke familie og venner for oppmuntrende ord og støtte. Ingen nevnt ingen glemt, dere er mange.

Risøyhamn, mai 2023

Bengt Audun Holann

Sammendrag

Dette er en masteravhandling som analyserer to norske læreverk i matematikk i forhold til den didaktiske tilnærmingen Realistic Mathematics Education (RME). Oppgaven avgrenses til temaet multiplikasjon og kun kapitler som omhandler dette temaet er analysert. Utvalget er to læreverk fra henholdsvis Gyldendal og Cappelen Damm. Det er kun bøker fra 3. trinn på grunnskolen som er analysert, siden det er da multiplikasjon innføres i følge læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020). På bakgrunn av dette undersøkte jeg denne problemstillingen og tre forskningsspørsmål:

Hvor nært ligger multiplikasjonsoppgaver i norske lærebøker, utgitt etter LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020), opp mot prinsippene til Realistic Mathematics Education?

1. På hvilken måte hjelper oppgavene elevene å forstå meningen bak multiplikasjon?
2. Hvordan beveger læreverkene seg fra uformelle representasjoner til formelle representasjoner?
3. På hvilken måte legger oppgavene i læreverkene opp til aktivitet og interaksjon?

For å svare på dette brukte jeg et rammeverk utviklet av Charalambous et al. (2010) og videreutviklet for analyse av Realistic Mathematics Education av van Zanten og van den Heuvel-Panhuizen (2017). Jeg foretok endringer på dette, slik at det var tilpasset temaet multiplikasjon. Studien er en tekstanalyse som bruker mixed methods-tilnærming, siden jeg både har elementer av kvalitativ og kvantitativ analyse.

Det ble funnet egenskaper ved multiplikasjonsoppgavene i læreverkene som samsvarte med de fleste prinsippene til RME. Det var en hovedvekt på oppgaver i læreverkene som brukte kontekst, oppgavene økte i nivå når det gjaldt representasjonene som ble brukt og det var lagt opp til aktiv læring og interaksjon mellom elever.

Abstract

This is a master thesis that analyses two Norwegian mathematics textbooks in relation to the didactic approach Realistic Mathematics Education (RME). The thesis focuses on the topic of multiplication and only chapters related to this topic have been analysed. The selection consists of two textbooks from Gyldendal and Cappelen Damm respectively. Only books for the 3rd grade in primary school have been analysed, as this is when multiplication is introduced according to the mathematics curriculum (Utdanningsdirektoratet, 2020). Based on this, I developed the thesis question and three research questions:

How closely do multiplication tasks in Norwegian textbooks, published after LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020), adhere to the principles of Realistic Mathematics Education?

1. In what way do the tasks help students understand the meaning behind multiplication?
2. How do the textbooks move from informal representations to formal representations?
3. In what way do the tasks in the textbooks encourage activity and interaction?

To answer this, I used a framework developed by Charalambous et al. (2010) and further developed for the analysis of Realistic Mathematics Education by van Zanten and van den Heuvel-Panhuizen (2017). I made modifications to this framework to adapt it to the topic of multiplication. The study is a text analysis that uses a mixed methods approach, as I have both elements of qualitative and quantitative analysis.

Characteristics of multiplication tasks in the textbooks were found to align with most of the principles of RME. There was a strong emphasis on tasks in the textbooks that used context, the tasks increased in level in terms of models used, and active learning and interaction between students were encouraged.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

Denne oppgaven omhandler norske læreverk i matematikk laget etter innføringen av den nye læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020) og den nederlandske didaktikken Realistic Mathematics Education (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020). I dette kapitlet vil jeg si litt om bakgrunnen for valg av tema, hvorfor dette er interessant og redegjøre for problemstillingen. Jeg vil også redegjøre for utvalg og avgrensninger for oppgaven.

1.1 Bakgrunn

På tredjeåret på lærerutdanningen skrev jeg en Forsknings- og Utviklingsoppgave om dybdelæring for elever i multiplikasjonsundervisningen. Jeg gjennomførte en aksjonsforskning der jeg utviklet oppgaver som var ment å legge til rette for dybdelæring. Samtidig som jeg skrev FOU-oppgaven arbeidet vi med en bok skrevet av Magdalena Lampert som tar for seg ulike deler av matematikkundervisningen. Det var inspirerende å lese om hvor gjennomtenkt alt hun foretok seg var og hvordan hvert enkelt valg hadde en tanke bak. En del av dette omhandlet oppgavedesign og problemløsningsoppgaver (Lampert, 2001).

I samme matematikkfaget ble vi også introdusert for rike oppgaver, oppgaver med høye kognitive krav. Tanken bak å fokusere på oppgaver kommer fra artikkelen til Stein & Smith (1998) der de sier at basisen for elevers læring er oppgavene de gjør i klasserommet. Oppgaver er her definert som noe mer enn en enkelt oppgave. Det er et aktivitetssegment i undervisningen. Segmentet kan inneholde en serie av problemer elevene arbeider med, en utvidet oppgave, eller en hel time der elevene arbeider med et komplekst problem. Disse komplekse problemene kan defineres som rike oppgaver (Stein & Smith, 1998).

På fjerdeåret arbeidet vi med forskjellige tema og forskningsartikler. Der kom jeg over den didaktiske teorien Realistic Mathematics Education. Idéene i denne teorien var inspirerende å lese. Det var en helhetlig tankegang og en annerledes måte å lære matematikk på enn det jeg var vant til fra min egen tid i skolen. Her var også fokuset på elevers forståelse. Oppgavene skulle inspirere til å tenke over matematikk i stedet for å rutinemessig komme frem til svaret. Akkurat slik som oppgaver med høye kognitive krav skal være. Fokuset er på elevers utvikling av matematisk forståelse og ikke en mekanisk innlæring av formler. Disse idéene finner vi igjen i kjerneverdiene til læreplanen for matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020).

På bakgrunn av dette bestemte jeg meg for å se på oppgaver i lærebøker som er laget etter læreplanen i matematikk. Følger lærebøker intensjonen til denne læreplanen? Lærebøker er ofte leddet mellom den bestemte læreplanen og klasseromsundervisningen. Det å forstå lærebøker er essensielt for å forstå læringsmulighetene elevene får i utdanningen sin (Valverde et al., 2002, s. 2).

1.2 Problemstilling

Hvor nært ligger multiplikasjonsoppgaver i norske lærebøker, utgitt etter LK20, opp mot prinsippene til Realistic Mathematics Education?

Det er ikke forventet at en norsk lærebok skal følge prinsippene til Realistic Mathematics Education. Lærebokforfattere av norske lærebøker står fritt til å velge didaktisk tilnærming selv. Jeg vil likevel argumentere for at det er likheter mellom kjerneelementene i læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020) og prinsippene til Realistic Mathematics Education. Derfor mener jeg det kan være interessant å analysere oppgavene i norske matematikkbøker opp mot prinsippene til Realistic Mathematics Education.

I tillegg er det utformet 3 forskningsspørsmål:

4. På hvilken måte hjelper oppgavene elevene å forstå meningen bak multiplikasjon?
5. Hvordan beveger læreverkene seg fra uformelle representasjoner til formelle representasjoner?
6. På hvilken måte legger oppgavene i læreverkene opp til aktivitet og interaksjon?

Disse forskningsspørsmålene er knyttet til prinsippene til Realistic Mathematics Education og til kategoriene i innholdsanalysen. Det første spørsmålet er knyttet til *virkelighetsprinsippet* til RME. Elevene skal ifølge RME matematisere virkeligheten, altså fra deres virkelige erfaringer forstå multiplikasjonens idé. Spørsmålet er også knyttet til kategoriene *innhold* og *tilrettelegging for læring* i rammeverket for analysen. Det andre spørsmålet er knyttet til *nivåprinsippet* og kategorien *forventninger til utførelse* i rammeverket. Det tredje spørsmålet er knyttet til *aktivitetsprinsippet* og *interaksjonsprinsippet* og kategorien *tilrettelegging for læring* i rammeverket.

1.2.1 Begreper og avgrensning i problemstillingen

Realistic Mathematics Education (RME) er en didaktisk teori som er utviklet i Nederland. Karakteristikkene er at elevene skal arbeide med rike, «realistiske» situasjoner for å utvikle matematisk forståelse (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020, s. 713)

Jeg velger å analysere grunnbok, fordi den er hoveddelen av læreverkene som brukes. I tillegg analyserer jeg lærerveiledning, fordi den kan gi et bilde på intensjonene til forfatterne av boka. Jeg er interessert i hvordan introduksjonen til multiplikasjon er, derfor velger jeg bort bøker med tilleggsoppgaver. Jeg velger også bort å bruke nettressurser fordi det også er noe som ikke er grunnleggende og tilgangen til slike ressurser krever Feidetilgang. Det er ikke mulig for en student å abonnere på en slik tjeneste.

Masteroppgaven avgrenses til temaet introduksjon av multiplikasjon, og det vil derfor være naturlig å undersøke bøker for 3. trinn siden det er på dette trinnet målene for multiplikasjon først inntrer (Utdanningsdirektoratet, 2020). Valget falt på to forskjellige forlags læreverk. *Multi 3a* og *3b* fra Gyldendal, og *Matematikk 3a* og *3b* fra Cappelen Damm. Jeg valgte de to læreverkene fordi de kommer fra anerkjente forlag. Siden det ikke er noen oversikt over markedsandel til de forskjellige læreverkene, valgte jeg ut ifra dette kriteriet.

2.0 Teori og forskning

Jeg vil her gjøre rede for teorien bak RME og knytte den opp mot sosiokulturell læringsteori. I forskningsdelen vil det gjøres rede for RMEs effekt på elevers måloppnåelse, forståelse og holdninger til matematikk.

2.1 Realistic Mathematics Education

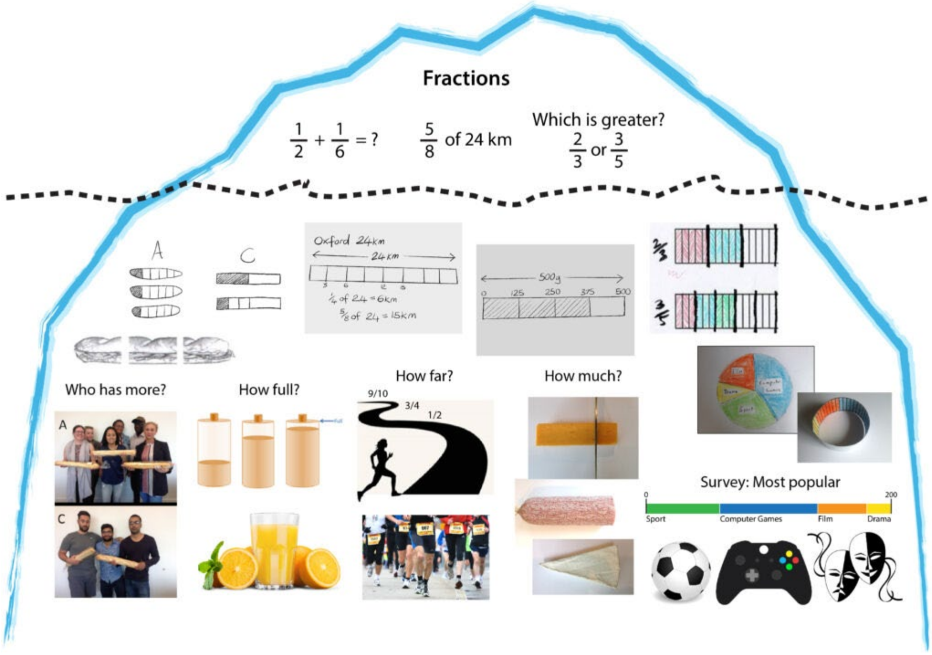
RME er en didaktisk teori for innlæring av matematikk, som er utviklet i Nederland siden 1971, og er en motsetning til tradisjonell mekanisk innlæring av matematikk og den mer formelle inngangen som New Math har (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020, s. 714). RME har siden spredt seg til andre land gjennom prosjekter som for eksempel *Mathematics in Context,* som ble utviklet av University of Wisconsin i USA. I Storbritannia utviklet Manchester Metropolitan University et forskningsprosjekt som førte til utvikling av RME-pensum der (Dickinson & Hough, 2012, s. 4).

Karakteristikken til RME er at rike «realistiske situasjoner er fremtredende i læringssituasjonen. Disse situasjonene skal gi elever en inngang til matematisk tankegang og kunnskap. Gradvis skal situasjonene gå fra å være kontekstavhengige til å bli mer formelle og generelle. Elevene skal matematisere virkeligheten og gjennom aktiviteter skal elever forstå matematikk (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020, s. 713).

Realistisk har i denne sammenhengen en bredere betydning enn situasjoner som er knyttet til virkeligheten. Det betyr alle situasjoner eller kontekster som en elev kan forestille seg. «Realistic» knyttes til det nederlandske uttrykket «zich REALISEren», som betyr nettopp å forestille seg (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020, s. 713).

2.1.1 Målene til RME

På nettsiden om RME til MMU (2022) står det at målet til RME er å bygge dyp og langvarig forståelse av matematikk. Gjennom å bli utsatt for uformelle situasjoner og modeller knyttet opp til et matematisk problem skal elever til slutt formalisere og generalisere matematikken. Prosessen for å bruke modeller og verktøy til å løse problemer kalles for «horisontal matematisering». Gjennom arbeid med forskjellige modeller beveger man seg til den symbolske matematiske verden. Når man da bruker disse modellene til å formalisere og generalisere kalles prosessen for «vertikal matematisering» (Barmby et al., 2011, s. 48). Figur 1 illustrerer dette.



Figur 1. Eksempel på hvordan forskjellige representasjoner av et matematisk tema lager et grunnlag for elevers forståelse. I dette tilfellet brøk. Hentet fra MMU (2022).

Vertikal matematisering er en bevegelse gjennom modellene til det symbolske, fra det uformelle til det formelle. *Vertikal matematisering* er også noe mer enn dette. van den Heuvel-Panhuizen (2001) siterer Freudenthal på at *vertikal matematisering* er å bevege seg innenfor verden av symboler. Hun beskriver videre at *vertikal matematisering* er å finne sammenhenger og snarveier innenfor matematikken. Selv om definisjonene av *vertikal* og *horisontal* er klare, er det likevel ikke en helt klar grense mellom de, men det er to likeverdige prosesser (van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Man kan si at det å arbeide med forskjellige representasjoner og tankeganger rundt multiplikasjon vil være en form for horisontal matematisering og for en elev å oppdage sammenhengen mellom regneartene kan være en form for vertikal matematisering. Samtidig er det å oppdage idéen bak multiplikasjon, sammenhengen mellom ulike representasjoner og symboler også en form for *vertikal matematisering.*

2.1.2 Prinsippene til RME og læreplanen i matematikk (LK20)

For å oppnå målene beskrives det 6 kjerneprinsipper i RME (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020):

- *Aktivitetsprinsippet* er det første prinsippet. Elever skal behandles som aktive aktører i læringsprosessen. Matematikk er en menneskelig aktivitet og matematisering foregår gjennom å aktivt delta i prosessen.
- *Virkelighetsprinsippet* er en del av RME på to måter. Først utrykker det at målet for elevene er å kunne bruke matematikken til å løse «virkelige» problemer. For det andre uttrykker det at matematikklæring skal starte med meningsfulle problemer som elever kan forestille seg. På denne måten kan de gi en mening til de matematiske utrykkene de lager for å løse problemet, matematisering av virkeligheten altså. Fra uformelle representasjoner til det formelle.
- *Nivåprinsippet* betyr at for å lære matematikk går man gjennom flere nivåer. Gjennom arbeid med problemer skal de gradvis lage seg snarveier og skjemaer om hvordan konsepter og strategier henger sammen. Modeller skal gradvis gå fra det uformelle til det formelle. Man beveger seg vertikalt i matematikken.
- *Det sammenflettede prinsippet* sier at matematiske domener ikke er adskilte, men overlappende. Tallforståelse, geometri, måling og statistikk skal ikke være adskilte kapitler i pensum. Elevene skal utforske rike problemløsningsoppgaver som gir de muligheten til å bruke flere matematiske redskap for å nå målet.
- *Interaksjonsprinsippet* forteller at matematikk ikke er en individuell øvelse. RME foretrekker klasseromsdiskusjoner og gruppearbeid som gir elevene en mulighet til å dele strategier og oppdagelser. Dette skal igjen føre til refleksjon som skal øke elevenes forståelse.
- *Veiledningsprinsippet* handler om at læreren skal foreta målrettede inngripener. Læreren må være proaktiv i måten den underviser på, og hen må legge opp til scenarioer der eleven har mulighet til å nå neste nivå. Langsiktig og sammenhengende planer for undervisningen er derfor viktig.

Ser man på prinsippene til RME og samtidig ser på læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020) kan man se mange likheter i språket. Under sentrale verdier står det at «Elevene skal legge mer vekt på fremgangsmåter og strategier enn på løsninger» (Utdanningsdirektoratet, 2020), som er likheter med RME sine idéer om å bevege seg horisontalt og vertikalt i matematikken. En dyp og varig forståelse er viktig.

Ser vi på kjerneelementene står det under modellering og anvendelser i læreplanen:

> En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk handler om å lage slike modeller. Det handler også om å kritisk vurdere om modellene er gyldige, og hvilke begrensninger de har, vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og vurdere om de kan brukes i andre situasjoner. Anvendelser i matematikk handler om at elevene skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Her ser vi at fokuset til RME om å bruke uformelle modeller, som er hentet fra noe elevene kan forestille seg, til å utvikle disse modellene til noe mer generelt også samsvarer med kjerneelementene i læreplanen.

Både resonnering, argumentasjon, representasjon og kommunikasjon er prinsipper innenfor RME også. Det legges også i læreplanen vekt på at elever skal forstå og se sammenhenger, samtidig er det å lære å kommunisere matematisk viktig.

Under abstraksjon og generalisering sies det at «elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnementer» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Noe som nesten er ordrett nivåprinsippet til RME.

I matematiske kunnskapsområder sier læreplanen at: «Kunnskapsområdene danner grunnlaget som elevene trenger for å utvikle matematisk forståelse ved å utforske sammenhenger innenfor og mellom kunnskapsområdene» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Også noe som er likt det sammenflettede prinsippet.

På grunn av disse likhetene mener jeg det er mulig å analysere norske matematikklærebøker, som er laget etter innføringen av ny læreplan i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020), om jeg kan finne egenskaper ved oppgavene som er lik egenskapene til RME.

2.1.3 Forskning på RME

Det er to store prosjekter som handler om utvikling av pensum inspirert av RME i USA og Storbritannia. Det amerikanske prosjektet heter Mathematics in Context. Prosjektet førte til utviklingen av pensum som er i bruk i noen amerikanske skoler (Dickinson & Hough, 2012, s. 4).

Det britiske prosjektet var inspirert av det amerikanske og forskningen foregikk i 8 år. Forskere fra Manchester Metropolitan University (MMU) testet ut RME i engelske klasserom. Over 40 skoler og 2000 elever var med på prosjektet. Prosjektet resulterte i utvikling av pensum inspirert av RME for elever i 3 – 7 trinn i Storbritannia (Dickinson & Hough, 2012).

Elever ble testet opp mot kontrollgrupper som fikk tradisjonell undervisning. Gruppen som fikk undervisning etter prinsippene til RME hadde en signifikant større sannsynlighet til å få et korrekt svar på en oppgave, i tillegg viste elevene en signifikant større forståelse gjennom deres evner til å forklare strategiene de brukte (Barmby et al., 2011).

Samtidig viser også en amerikansk studie, der de analyserte standardiserte tester på statsnivå, at skoler som brukte RME har en signifikant lavere andel elever som scorer på laveste nivå. Samtidig hadde de en signifikant økning av elever som testet på middels og høyt nivå i forhold til andre skoler (Dickinson & Hough, 2012).

Det britiske prosjektets kvalitative intervjuer av lærerne viser også at læreres holdninger til matematikkundervisning ble utfordret og forandret seg. Fra fokus på memorering til fokus på å arbeide med problemløsning og forståelse. Lærerne uttrykte i intervjuer at elever fikk en annen holdning til matematikktimene også. Motivert av å forstå matematikken og hvorfor man brukte den i situasjoner som de kunne forestille seg (Dickinson & Hough, 2012).

2.1.4 Kritikk av RME

Når jeg har gjennomgått kilder til denne oppgaven har jeg også sett etter kritiske blikk på RME. I gjennomgangen til Dickinson og Hough (2012) skriver de om noen av problemene som oppstod under prosjektet. Det som kom mest frem var fra skoleledere og foreldre. De mente det var vanskelig å måle progresjon fordi det ikke var så mye skriftlig arbeid som før. Samtidig var det mindre formell testing, noe som førte til at evalueringen var vanskeligere. Forberedelsene til standardiserte tester var også et problem siden disse testene absolutt ikke fulgte prinsippene til RME. Her skulle nye, mer tilpassede tester implementeres i 2010.

Marja van den Heuvel-Panhuizen (2020, s. 13) skriver at en av kritikkene mot RME er at det er for mye fokus på horisontal matematisering og for lite fokus på å bevege seg til det symbolske. Hun mener at tidlig utvikling av RME ville distansere seg fra New Math bevegelsen og derfor hadde et stort fokus på uformelle modeller. I senere tid mener hun at det begynner å balansere seg mer.

Noen kritikker av RME kommer også fra uvitenhet om prinsippene til RME, for eksempel kritikken om at det er lite veiledning og tydelig retning for elevene. van den Heuvel-Panhuizen (2020) skriver at det er det motsatte RME står for. Dette kan vi også se i prinsippene til RME, der veiledning er et viktig prinsipp.

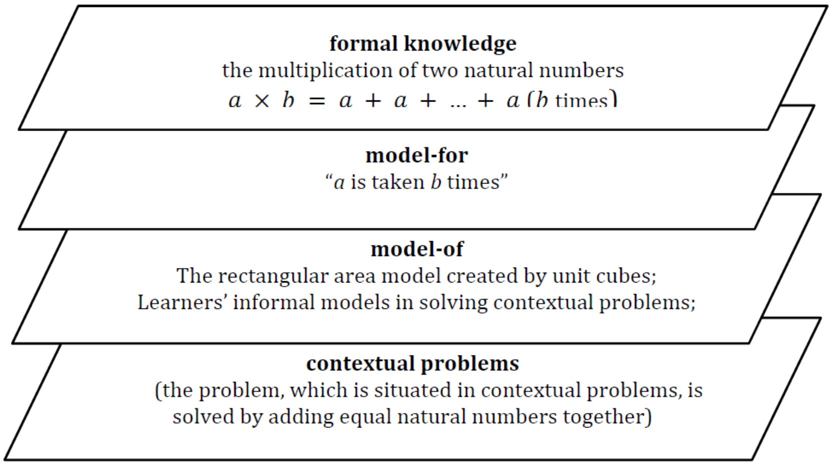
2.1.5 Multiplikasjonsoppgaver som følger prinsippene til RME

Siden jeg analyserer multiplikasjonsoppgaver i lærebøker i forhold til prinsippene i RME måtte jeg også definere hva det betyr. Hvordan kjenner man igjen prinsippene til RME i en multiplikasjonsoppgave? Jeg støtter meg til forskning og teori om RME for å definere dette, samt teori om multiplikasjon generelt.

For å få en kontekst til multiplikasjon arbeider man med forskjellige tankemodeller. Det blir nevnt 10 forskjellige tankemodeller i QED 1-7 (Hinna et al., 2012, s. 106), som er et læreverk for lærerstudenter i matematikk. Det nevnes også at det er viktig at elevene arbeider med flere av tankemodellene for å utvikle et godt multiplikasjonsbegrep (Hinna et al., 2012, s. 106). I boken Alfa: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen (Bjørnestad et al., 2016, s. 58) kalles tankemodeller for multiplikative situasjoner. Situasjonene er klassifisert i 5 kategorier. Det nevnes at kategoriene passer best til naturlige tall. Det kan antas at naturlige tall er lettere for en elev å bruke når man introduserer en ny regneart.

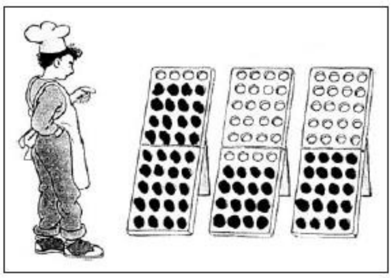
I artikkelen Developing Primary Students' Understanding of Mathematics through Mathematization: A Case of Teaching the Multiplication of Two Natural Numbers (Thi & Phu, 2021) blir det vist oppgaver som skal være laget etter prinsippene i RME. Den egenutviklede modellen de bruker vises i Figur 2.

I artikkelen argumenterer Thi & Phu (2021) for at tallforståelse krever at man lærer matematiske problemer i en kontekst. Oppbygging av å forstå multiplikasjon, som Figur 1 viser, er en gradvis oppbygging gjennom kontekstuelle tankemodeller. Det første nivået er et kontekstuelt problem som løses med å addere like mengder sammen, like grupper, eller gjentatt addisjon. Så utvikler de en modell av problemet, eksemplet i artikkelen er en rektangulær modell som består av enkeltkuber. Dette er en uformell representasjon av multiplikasjon som bruker tankemodellen rektangulært argument. Dette skal igjen utvikle en mer formell forståelse av multiplikasjon hvor begrepet «a ganger b» forstås som «a» gjentatt «b» ganger. Tankemodeller, eller multiplikative situasjoner, kan knyttes direkte opp mot virkelighetsprinsippet til RME. Tankemodeller gir kontekst til den abstrakte idéen «$a \cdot b = c$».



Figur 2. Eksempel på nivåprinsippet i RME. Fra uformelt til formelt. Denne er spesifikt laget til multiplikasjon. Hentet fra Thi & Phu (2021).

Setadi (2020) har forsøkt å introdusere multiplikasjon etter prinsippene til RME. Her har oppgavene både en kontekst og visuelle representasjoner som skal hjelpe elevene til å løse oppgavene. Slik som Figur 3. Her ser vi i det første stativet er det 36 kaker, de 2 neste er det 16 og 20. Elevene kan gjøre flere oppdagelser her. De kan se at 36 består av grupper på 20 og 16. Samtidig kan de se sammenhengen mellom 10 · 4 og 9 · 4. Der 9 · 4 = 40 – 4. Poenget her er at representasjonene i oppgaver laget etter prinsippene til RME skal hjelpe elevene til å løse oppgaven. De skal være en faktisk representasjon av oppgaven, de skal også gi elevene en uformell representasjon av hva den matematiske idéen er. Slik vi ser på Figur 1 skal flere slike representasjoner knyttes til det matematiske temaet. I tilfellet med denne oppgaven, multiplikasjon. Representasjonene som Setadi (2020, s. 46 - 50) bruker går fra å være uformelle til formelle i løpet av undervisningen. Denne bevegelsen følger nivåprinsippet, der representasjoner og kontekster skal føre til at man klarer å løse mer abstrakte problem.



Figur 3 Viser multiplikasjonsoppgaver som er utviklet for bruk i RME. Hentet fra Setadi (2020, s. 46).

2.2 Sosiokulturell læringsteori og RME

I sosiokulturell læringsteori forstås læring som en sosial prosess. All intellektuell utvikling og tenkning har utgangspunkt i en sosial aktivitet. Språket er et redskap som bidrar til læring, og bidrar også til å gjøre handlingene mer uavhengig av det konkrete. Det gir individer muligheter til å reflektere over handlinger og seg selv og derfor bidra til læring (Imsen, 2018, s. 187 - 191). Vygotsky, som utviklet denne teorien, sier selv at språket er redskapet barnet bruker for å mestre komplekse oppgaver. Dette kalles også mediering (Vygotsky, 1978, s. 56 - 57).

Læringsprosessen blir til gjennom internalisering. Den starter med at en ekstern sosial aktivitet blir rekonstruert i tankene av språket. En interpersonell prosess blir til en intrapersonell prosess (først sosialt, så individuelt). Denne transformasjonen er en serie med utviklingshendelser (Vygotsky, 1978, s. 56 - 57). Likhetene med de sosiale prinsippene til RME ligger her. Gjennom aktivitet og arbeid med matematikk utvikler elevene den matematiske tankegangen. Både lærere (veiledningsprinsippet) og andre elever (interaksjonsprinsippet) er viktige katalysatorer til matematiseringen. Matematiseringen av virkeligheten er en internaliseringsprosess slik Vygotsky beskriver læringen.

Vygotsky har også et annet poeng, den proksimale utviklingssonen. Slik internaliseringen er så er barnet i stand til å utføre en handling sammen med andre før det er i stand til å gjøre den selv. En handling kan her sees på som å gjøre matematikk. Det er en sone det barnet klarer alene og like utenfor ligger den proksimale utviklingssonen der barnet klarer å gjennomføre noe med hjelp (Imsen, 2018, s. 192). Tankene rundt dette kan overføres til nivåprinsippet der elevene skal gå fra uformelle modeller til mer formelle. En vertikal matematiseringsprosess.

2.3 Lærebøker i matematikk

Det er ofte en diskusjon om matematikkbøkers kvalitet og læringspotensial. Ifølge en TIMMS studie og andre internasjonale sammenligningsstudier har lærebøker en utstrakt bruk spesielt i nordiske land (Grevholm, 2017, s. 9). I en undersøkelse over læreres bruk av matematikkbøker i Finland, Estland og Norge viser det seg at selv om lærebøker i matematikk har en utstrakt bruk, sier lærere i Norge at den didaktiske praksisen deres ikke er avhengig av bøkene. De bruker ofte ressurser utenom bøkene. Nesten halvparten av lærerne bruker boken kun til øvingsbok (Lepik et al., 2017). Dette mener forfatterne fører til at man mister de didaktiske mulighetene som ligger i bøkene.

2.3.1 Forskning på lærebøker i forhold til RME

van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen (2017) har analysert tre nederlandske lærebøker i forhold til RME. Det matematiske temaet de analyserer var desimaltall. De valgte en lærebok gitt ut etter RME-reformen i Nederland og to gitt ut før starten på RME. Artikkelen sammenligner lærebøkene for å se hvilken påvirkning RME har hatt på nederlandske lærebøker.

De undersøker tre spørsmål i artikkelen. Først spør de om hvilke egenskaper fra RME de finner i boken laget etter prinsippene til RME. Deretter spør de om hvilken grad man finner RME i bøkene utgitt før RME-reformen og på hvilken måte det er forskjell å lære på fra bøkene før og boken etter RME-reformen (van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2017).

Hovedfunnene i artikkelen er at de finner nesten alle egenskaper til RME i læreboken laget etter RME-reformen, men de finnet også spor av egenskapene til RME i de eldre bøkene. Når de så på om oppgaver ga en kontekst til matematikken finner de at det er en signifikant større andel av oppgavene i den nyere boken som gir en kontekst i forhold til de eldre. Visuelle hjelpemidler, som tallinjer, er nesten fraværende i de eldre bøkene, men fremtredende i den nyere boken. Likevel finner de egenskaper til RME i de eldre bøkene. van Zanten & van den Heuvel- Panhuizen (2017) konkluderer derfor med at ikke alle egenskaper ved RME var nytt for matematikkundervisningen.

3.0 Metode

For å besvare problemstillingen, «*Hvor nært ligger multiplikasjonsoppgaver i norske lærebøker, laget etter LK20, opp mot prinsippene til Realistic Mathematics Education?*» valgte jeg å gjøre en kvalitativ tekstanalyse av lærebøker. Jeg analyserte lærebøkene Matematikk fra Cappelen Damm og Multi fra Gyldendal slik at det også ble en komparativ studie.

«Kvalitative metoder innhenter informasjon om virkeligheten gjennom ord eller språk. Beskrivelsen av virkeligheten fremstilles i tekster, enten i form av rene nedskrivinger av hva folks skriver, eller i en form der forskeren selv skriver ned hva han eller hun observerer» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 89). Den virkeligheten jeg beskriver er innholdet i matematikklærebøker, altså en tekstanalyse. Denne undersøkelsen er en kvalitativ undersøkelse siden dataene som behandles er en tekst og ikke noe som skal tallfestes. Jeg finner denne inngangen gunstig fordi jeg leter etter en idé i teksten, prinsippene til RME.

Tilnærmingen til analysen er en pragmatisk tilnærming, den er hverken induktiv eller deduktiv, denne tilnærmingen kalles også for abduksjon (Postholm & Jacobsen, 2018). Jeg gikk ut fra teorien om RME og brukte et analyseverktøy basert på dette. Fra dette verktøyet utarbeidet jeg et rammeverk og testet den mot lærebøkene. «Abduksjon er en kontinuerlig vekselvirkning mellom teori og empiri, der ingen av de to kan sies å ha forrang» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 103). Problemstillingen min stiller åpne spørsmål.

Det teoretiske rammeverket av lærebokanalysen er bygget på van Zanten og van den Heuvel-Panhuizen (2017). De analyserer oppgaver i nederlandske lærerbøker i forhold til RME. I Figur 4 ser vi at både innhold, forventninger til elevenes utførelse og hvilken didaktisk støtte som finnes i bøkene er analysert.

Table 1. *Analysis Framework*

Perspective	Category	Sub-category
Content	Types of decimal numbers	Bare decimal numbers Measurement decimal numbers Monetary decimal numbers
Performance expectations	Types of calculations with decimal numbers	Mental calculation Estimation Written calculation Calculation with calculator
Learning facilitators	Didactical support	Use of contexts Use of the number line Use of a place value chart Use of different calculation methods Use of own productions

Figur 4. Dette er rammeverket som van Zanten & van den Heuvel- Panhuizen har utviklet da de analyserte læreverk fra Nederland i forhold til RME. Dette er rammeverket som er grunnlaget for min oppgave. Hentet fra van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen (2017).

Jeg beholdt hovedkategoriene, altså innhold, forventninger til utførelse og tilrettelegging for læring, men selve kodene i kategoriene ble gjort om til å omhandle multiplikasjon. På *innhold* ligger det hvilke tankemodeller innenfor multiplikasjon elevene blir presentert, som for eksempel rektangulært areal. *Forventninger til utførelse* handler om hvilke representasjoner elevene er forventet å bruke. I *tilretteleggingen av læringen*, den didaktiske tilnærmingen, så jeg på hvordan bøkene lager en kontekst og om den er meningsfull, om illustrasjonene er knyttet til uformelle representasjoner, bruken av tallinjer og egenproduserte oppgaver. Kodene ble laget ved at jeg hentet informasjon fra teorien om RME, oppgaver som er laget etter prinsippene til RME og forskningsartikler der temaet er RME og multiplikasjon.

3.1 Vitenskapsteoretisk perspektiv

Utgangspunktet for forskningen min er å få kunnskap om en virkelighet, i dette tilfellet matematikklærebøkers kvaliteter. Det er flere syn på kunnskap om virkeligheten, epistemologier, som for eksempel positivisme, konstruktivisme og post-positivisme eller pragmatisme (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 46). Mitt epistemologiske ståsted er viktig for å forstå hvordan jeg tolker og analyserer data. Det er derfor viktig at jeg redegjør for hvilket ståsted jeg har.

Positivisme er inspirert av naturvitenskapene, og betrakter virkeligheten som noe som er utenfor oss selv og som er noe konstant som kan måles (Postholm & Jacobsen, 2011). For positivismen er generalisering av fenomener mulig og å avdekke sosiale lovmessigheter målet. Det ideelle forskningsdesignet er det kontrollerte eksperimentet, der man kontrollerer alle forhold for så å variere et av de slik at man isolerer effekten av et av de (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 47).

Selv om konstruktivister ikke fornekter at det eksisterer en fysisk og objektiv virkelighet, er de uenig med positivistene om at den sosiale virkeligheten kan beskrives på samme måte. En sosial virkelighet, for eksempel en skoleklasse, er for kompleks til å forske på samme måte som man forsker på et naturvitenskapelig fenomen vil de hevde (Postholm & Jacobsen, 2011, s. 28). Konstruktivismen er ikke så enhetlig som den positivistiske epistemologien. Fra den ytterliggående formen for konstruktivisme, fenomenologi, som hevder at sannheten blir konstruert av hvert enkelt individ og det eksisterer ingen universell sannhet, til sosialkonstruktivismen, som sier at sannheten blir konstruert i samhandling med andre. Det de er enige om er at det ikke kan være kun en objektiv sannhet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 49 - 51).

Som et slags kompromiss nesten, har vi post-positivismen. Som med konstruktivismen er den enig i at kunnskap er fortolkning av virkeligheten, og at forskeren ikke kan være fullstendig objektiv. Det er derfor viktig at man er reflektert over sin egen rolle som forsker. Den hevder likevel at kunnskap kan være gyldig på tvers av kontekster. Det vil si at man kan si at noe er sannsynlig, selv om det ikke er en lovmessighet, som i naturvitenskapen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 51-54). Dette kan også sees på som en pragmatisk posisjon, der man forsøker å forene trekk med positivismen og konstruktivismen. Et komplekst sosialt fenomen, som læring, kan ikke måles fullstendig. I stedet kan man måle indikasjoner på læring. Den sosiale virkeligheten kan altså bare delvis måles. For å få tak i denne kunnskapen kreves ulike innfallsvinkler av flere forskere (Postholm & Jacobsen, 2011, s. 29).

Mitt eget vitenskapelige ståsted vil jeg definere som pragmatisk. Mitt eget forskningsprosjekt er å tolke oppgaver i lærebøker. Selv om jeg baserer meg på definerte kriterier, vil min egen subjektivitet over hva RME er spille inn, noe som det er viktig å være klar over når jeg analyserer. Det er også viktig at metoden og forskningsdesignet mitt blir tydelig lagt frem slik at det kan reproduseres av andre. Med et Post-positivistisk perspektiv mener jeg det likevel er mulig for meg å beskrive virkeligheten, altså lærebøkers kvaliteter.

3.2 Kvalitativt og kvantitativt

Kvalitativt og kvantitativt sier først og fremst noe om hvilken data jeg bruker for å besvare problemstillingen min. Kvalitativt handler om å hente informasjon om virkeligheten gjennom ord eller språk. Kvantitativt handler om informasjon som forteller noe om virkeligheten gjennom tall (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 89). Da jeg analyserte matematikklærebøker forholdt jeg meg først og fremst til ord og matematisk språk som data. Både oppgavene, illustrasjonene og eventuelle representasjoner ble analysert. Lærerveiledningens tekster inngikk også i analysen. Det er altså en kvalitativ undersøkelse, siden jeg forholdt meg til ord og språk.

Nå er det ikke slik at en kvalitativ metode utelukker en kvantitativ tilnærming. En pragmatisk tilnærming sier at tall og ord har lik verdi i samfunnsvitenskapelige undersøkelser, men de har ulike styrker og svakheter (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 100). Under utviklingen av problemstillingen min vurderte jeg om jeg skulle basere meg på ren kvalitativ tolkning av bøkene, eller om jeg skulle bruke en form for tallfesting. I undersøkelsen til van Zanten og van den Heuvel-Panhuizen (2017) bruker de både koder og tall. For å få en oversikt over bøkenes innhold og for sammenligningens del bruker de tall for å vise andelen av typer oppgaver bøkene bruker. Dette kaller de for en horisontal analyse. En kvantitativ beskrivelse av bokens oppbygging, som også baserer seg på den kvalitative analysen av oppgavene.

I likhet med van Zanten og van den Heuvel-Panhuizen (2017) har også jeg gjort en horisontal analyse av bøkene. Jeg har altså brukt en Mixed Method (Creswell & Plano Clark, 2018). En blanding av kvalitative data og kvantitative data hjalp meg til også å se på strukturen. Spesielt hvordan nivået til oppgavene forandrer seg gjennom kapitlene.

3.3 Forskningsdesign

For å belyse problemstillingen på best mulig måte måtte jeg finne det rette forskningsdesignet til dette formålet. Her er utfordringen å finne et forskningsdesign som gir en best mulig datainnsamling tilpasset problemstillingen (Postholm & Jacobsen, 2018). Problemstillingen min begrenser mitt valg allerede med lærebøker. Skal jeg studere lærebøker kan jeg ikke bruke en Casestudie for eksempel, da denne er ment for å studere handlinger eller prosesser innenfor et gitt tidsrom.

Det er flere navn på slike studier ut ifra hvilke bøker jeg trekker informasjonen fra. Siden jeg skal finne egenskapene til oppgavene i lærebøkene, må jeg analysere disse bøkene. Dette kan kalles en dokumentanalyse, fordi det er beretninger som ikke er generert av meg som forsker (Christoffersen & Johannesen, 2012). I en slik analyse blir teorien som er relevant til problemstillingen rammeverket, i dette tilfellet egenskapene til RME.

Det er ulike strategier for dokumentanalyse. Bratberg (2021) har idéanalyse som en av strategiene. Det er en kvalitativ analyse av idéer sin tilstedeværelse i teksten, der fortolkning er en vesentlig side av analysen. I motsetning til en kvantitativ innholdsanalyse der jeg leter etter konkrete ord og tallfester de, vil en slik idéanalyse gå bak selve teksten og tolke hva slags idéer som ligger bak. Her tolker jeg hva slags idéer og mål oppgavene i matematikkboka har, og hvilke forventninger til elevene og læreren den har. Det at jeg tolker idéinnholdet innebærer en lesing av meningsinnhold i lys av noe utenfor teksten som det kan holdes opp mot. Dette gir oss en ramme for å si hva noe er (Bratberg, 2021, s. 31). I dette tilfellet var prinsippene til RME det som var utenfor læreboka som jeg holdt den opp mot.

En slik analyse kan også kalles en fenomenologisk studie. «Fenomenologiske studier har som målsetting å forstå identiteten eller essensen når det gjelder et fenomen eller en hendelse» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 76). I dette tilfellet var fenomenet lærebøkene jeg analyserte. Slike undersøkelser brukes vanligvis som analyse av intervjuer, men kodingen og analysen av teksten har mye til felles med hvordan man gjør det for et intervju (Bratberg, 2021, s. 80).

3.3.1 Koding og datainnsamling

I motsetning til intervju er første del av innsamling av data allerede til stede. Lærebøkene er allerede skrevet. Min første del av forskningen blir derfor selve kodingen. Det er flere stadier når man gjennomføre en slik prosess. Du har åpen koding, som navnet tilsier en åpen tilnærming og er derfor en induktiv tilnærming, men gjennom prosessene vil jeg starte en mer lukket prosess som blir deduktiv. Derfor er hele prosessen en abduktiv tilnærming. Gjennom analysen vil jeg komme inn i andre analyse stadier, aksial koding og selektiv koding. Selve formålet med kodingen, og all kvalitativ analyse, er å kategorisere datamaterialet, i dette tilfellet lærebøkene, slik at jeg kan få en oversikt og presentere det i en skriftlig tekst (Postholm & Jacobsen, 2018).

Konstant komparativ metode, også referert til som Grounded Theory, kan brukes i både fenomenologiske studier og tekstanalyser. Det er et sett med systematiske prosedyrer for en analyseprosess (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 140). Denne analyseprosessen ble brukt av Charalambous et al. (2010) når de gjorde en komparativ analyse av lærebøker i tre forskjellige land, som er en av artiklene jeg baserte meg på da jeg analyserte.

Selv om dette er en systematisk prosess, er det ikke en mekanisk prosess med en konkret oppskrift. Det fordrer at forskeren er til stede og med i en kreativ prosess. Den kreative delen for forskeren er navngiving av kategoriene og hvordan en stiller spørsmål. Kreativiteten utfordres også når en kontinuerlig sammenligner dataene for å gjøre oppdagelser (Postholm & Jacobsen, 2018). I min forskning var dette da jeg laget kategoriene som skulle systematisere hva prinsippene til RME er i oppgaver som omhandler multiplikasjon, men også under selve kategoriseringen av oppgavene og den påfølgende analysen av dette.

Når en bruker konstant komparativ metode til analyse av noe utvikler man noe som kalles teoretisk sensitivitet (Postholm & Jacobsen, 2018). Det er en forståelse av det man forsker på. Denne forståelsen av abstrakte begreper brukes i analysen av teksten. Dette er en motsetning til konkrete termer. Erfaringen man får under slik forskning øker den teoretiske sensitiviteten. Det er likevel viktig å være klar over sin subjektivitet og være skeptisk til egen analyse (Postholm & Jacobsen, 2018).

Under kodingen satte jeg merkelapper på teksten for å avdekke meningen med teksten og organisere dette. Den åpne kodingen startet med en tekstanalyse for å skaffe meg begreper gjennom tidligere forskning og teorier. Dette materialet laget grunnlaget for teorien. Teorien og forskningen gav meg grunnlaget for min forskning. Det krevde en viss teoretisk sensitivitet for å lage disse kodene, noe som jeg måtte tilegne meg gjennom denne litteraturen.

Charalambous et al. (2010) startet i den åpne kodingsprosessen å gjennomgå litteratur på lærebokforskning, finne likheter og hull i tidligere rammeverk, for så å lage egne kategorier til eget rammeverk. De brukte også andre matematikere for å sjekke om kodene deres var i overenstemmelse med faget. Så denne åpne kodingen vil være utvikling av kategoriene, begrepene som beskriver prinsippene til RME.

Den aksiale kodingen (Postholm & Jacobsen, 2018) vil da være å bruke disse kodene til å si noe om innholdet i lærebøkene. Både hovedkategorier og underkategorier er laget her. Dette var en deduktiv prosess. Gjennom analysen ble noen av kodene i kategoriene modifisert da jeg i møte med utvalget fant nye koder. Etter analysen av læreverkene starter analysen av det igjen. Den selektive kodingen (Postholm & Jacobsen, 2018) vil være å gi en mening til den aksiale kodingen. Si noe om kodene jeg har gitt oppgavene og hva det vil si for problemstillingen og forskningsspørsmålene. Dette er likevel ikke noen lineær prosess. Funn førte til nytt syn og nye begreper. Noe som gjorde kodingen til en abduktiv tilnærming.

3.3.2 Design av rammeverk

Christoffersen & Johannesen (2012) gjennomgår prosessen med slike analyser og har satt disse opp i steg. Første steget er å danne seg et helhetsinntrykk, sammenfatte hva meningen er. Neste steget er kodingen, lage kategorier og begreper. Her kan man for eksempel se på kodene i Figur 4 eller Tabell 1. Etter kodingen kommer kondenseringen. Her trekkes deler av teksten ut, i dette tilfellet oppgavene, for å settes inn i tabeller etter kategoriene som ble utvikler under kodingen. Neste steget er sammenfatningen. Her finner man mønster og ser om man finner svar på spørsmål og problemstilling. Siste steget er rapporteringen.

Jeg har sett på helhetsinntrykket og gjort litteratursøk. Søket har omhandlet RME og forskning på lærebøker. I en stor undersøkelse av Valverde et al. (2002) fokuserer de på flere karakteristikker ved lærebøker. Disse er *foreslåtte klasseromsaktiviteter, omfanget på innholdet i boken og kompleksiteten til dette, rekkefølgen innhold presenteres på* og *kompleksiteten på krav til elevene.* Dette er for omfattende å ta for seg i en master. Charalambous et al. (2010) identifiserer tre aspekter ved rammeverket deres. *Horisontal, vertikal* og *kontekstuell.* Den *horisontale* analysen ser på lærebøkenes helhet. Utseende, organisering av innhold, antall sider og antall oppgaver. Dette fokuset får kritikk for at det overser hvordan innholdet blir presentert. En *vertikal* analyse ser derimot på hvordan et spesielt matematisk tema blir behandlet i lærebøkene. Denne analysen overser derimot hvordan temaene i bøkene relateres til hverandre. *Kontekstuell* analyse ser på hvordan lærebøker brukes som hjelp til å gjøre aktiviteter i klasserommet. Dette omhandler hva som er intensjonen til lærebøkene. Charalambous et al. (2010) mener at et rammeverk som inkluderer både *horisontal* og *vertikal analyse* er nødvendig for å belyse alle karakteristikkene til lærebøker. En *horisontal* analyse ligger nærmere en kvantitativ innholdsanalyse, og det vil derfor være nødvendig med en Mixed Method tilnærming.

van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen (2017) sitt rammeverk er også lagt opp slik som hos Charalambous et al. (2010). For den vertikale analysen brukte de tre perspektiver: *innhold, forventninger til utførelse* og *tilrettelegging for læring.* Under disse perspektivene kommer kategorier og underkategorier. *Forskjellige typer desimalnummer, forskjellige typer utregninger* og *didaktisk støtte.* Underkategoriene er mer spesifikke igjen. Figur 4 er den de bruker i sin analyse av RME. van Zanten og van den Heuvel-Panhuizen bruker prinsippene til RME som grunnlag for hva disse kategoriene skal være. Nå er dette forskere som har stor teoretisk sensitivitet som har arbeidet mye med RME. van den Heuvel-Panhuizen har også skrevet prinsippene til RME (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020).

Jeg har også de samme perspektivene som van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen (2017). Tabell 1 viser kategoriene. Dette var en abduktiv tilnærming der kategoriene forandret seg under kodingsprosessen. En oppgave, som er enheten som blir kodet, ble definert i lærerveiledningen. I tillegg til læreboken elevene har, brukte jeg også lærerveiledningen for å få mer informasjon til kodingen. Denne sa mer om intensjonene bak oppgavene.

Tabell 1. Rammeverk for lærebokanalysen. Er utviklet fra teori om RME (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020) van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen sitt rammeverk (2017), teorier om multiplikasjon (Bjørnestad et al., 2016), artikkelen skrevet av Thi & Phu (2021) og artikkelen til Setadi (2020).

Perspektiv	Kategorier	Underkategorier
Innhold	Forskjellige tankemodeller for multiplikasjon	- Like grupper (Gjentatt addisjon) - Multiplikativ sammenligning - Rektangulært arangement
Forventninger til utførelse	Forskjellige typer representasjoner	- Eget valg - Uformelle presentasjoner - Fra uformell til formell representasjon - Formell
Tilrettelegging for læring	Didaktisk støtte	- Bruk av kontekst - Bruk av tallinjer - Bruk av visuelle hjelpemidler - Bruk av egenproduserte oppgaver

Under *innhold*, ser jeg på hva slags tankemodeller oppgavene inneholder. I forhold til RME er tankemodeller en måte å sette multiplikasjon inn i en kontekst, å gi elevene en mulighet til å se for seg den matematiske idéen. Dette følger virkelighetsprinsippet til RME.

Tankemodellene jeg så på i denne oppgaven var hentet fra boken Alfa (Bjørnestad et al., 2016). De forskjellige tankemodellene er *like grupper, multiplikativ sammenligning* og *rektangulært argument. Kombinatorisk type* ble også sett på, men det var ingen oppgaver som falt under denne kategorien. I tillegg utelukket jeg tankemodellen *rate* fordi den er meget lik *like grupper.*

Tankemodellene defineres slik (Bjørnestad et al., 2016, s. 58):

Like grupper er som navnet tilsier grupper med samme mengde addert gjentatte ganger. For eksempel: 3 barn har 5 epler hver. Hvor mange har de til sammen?

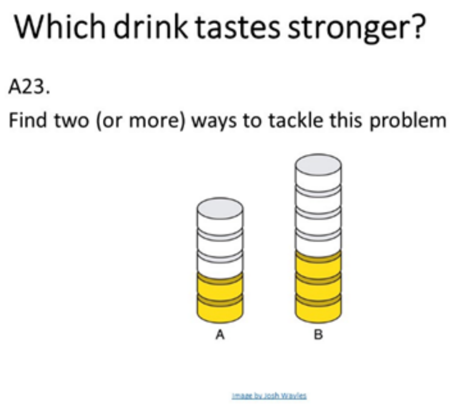
Multiplikativ sammenligning tar en mengde og setter den i et forhold til noe annet. Som for eksempel: Arne har 5 tusjpenner. Sandra har 3 ganger så mange. Hvor mange tusjpenner har Sandra?

Rektangulært arrangement brukes når man ser på multiplikasjon i en geometrisk situasjon. For eksempel: I et klasserom er det 3 rader av bord, med 5 bord i hver rad. Hvor mange bord er det i klasserommet?

I forventninger til utførelse omhandler kategoriene hvilke typer representasjoner elevene er forventet å bruke. Her kommer vi inn i aktivitetsprinsippet med kategorien «eget valg». Samtidig så jeg på nivåprinsippet når det gjelder bruken av uformelle representasjoner og overgangen til mer formelle representasjoner. Jeg startet først med et klart skille mellom formell og uformell, men fant ut under analysen at det måtte komme en kategori som oppgaver der begge representasjoner var til stede.

I *tilrettelegging for læring* ser jeg på hvordan boken hjelper elevene til å bruke ulike representasjoner, få en kontekst til multiplikasjon og være en aktiv deltaker. *Tallinjer* og andre visuelle representasjoner skal hjelpe elevene frem til en forståelse av hva multiplikasjon er. De skal hjelpe elevene til å se for seg uformelle representasjoner. Et *visuelt hjelpemiddel* som hjelper elevene er ikke bare et bilde, men noe visuelt som kan hjelpe de med å se matematikken som skal læres bort. De visuelle hjelpemidlene skal gi elevene en uformell måte å representere multiplikasjon på, samtidig gir de elevene en kontekst. *Egenproduserte oppgaver* gir elevene enda større interaksjon med det matematiske stoffet i boken. I dette tilfellet er det oppgaver der elevene enten må lage sin oppgave ut fra et regnestykke, altså lage konteksten selv, eller at de lager både regnestykke og kontekst selv. *Konteksten* er for å knytte multiplikasjon til noe som elevene kan se for seg, sette multiplikasjon inn i den virkelige verden. *Kontekst*-kategorien er oppgaver som bruker språk i stedet for visuelle hjelpemidler for å gi en kontekst, for eksempel en regnefortelling. Dette knyttes til RME gjennom aktivitets-, interaksjons-, og virkelighetsprinsippet.

Figur 5. En visuell presentasjon som ikke hjelper elevene med å visualisere matematikken. Hentet fra MMU (2022).



Figur 6. En visuell representasjon som hjelper elevene med å visualisere matematikken. Hentet fra MMU (2022)

3.3.3 Fremgangsmåte for analysen

Jeg fulgte samme analyseprosedyre som van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen (2020). Først identifiserte jeg kapittel i lærebøkene fra 3. trinn som omhandlet multiplikasjon. Deretter kodet jeg oppgavene etter rammeverket ved hjelp av lærerveiledningen, den aksiale kodingen. Da denne analysen var gjort for alle bøkene, gjentok jeg denne for å kvalitetssjekke. Oppgavene som var kodet forskjellig på de to rundene med koding gikk jeg over enda en gang. Etter dette analyserte jeg resultatene, det som kalles kondenseringen og sammenfatningen. Dette er altså den selektive kodingen, som gir mening til den aksiale kodingen av oppgavene. Dette ble et kvalitativt dypdykk for å svare på problemstilling og forskningsspørsmålene.

van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen (2017) gjorde også en horisontal analyse av bøkene. Dette gjør også jeg. Charalambous et al. (2010) deler den horisontale analysen inn i to kategorier. Disse kategoriene er bakgrunnsinformasjon og struktur. *Bakgrunnsinformasjon* gir en oversikt over lærebøkenes produksjon. Det vil si forfattere, forlag, årstall for utgave, sidetall og informasjon om eventuelle tilleggsmaterialer. Bakgrunnsinformasjonen presenterer altså utvalget mitt på en oversiktlig måte.

Strukturen, den andre delen av horisontal analyse, tar for seg hvordan bøkene er satt sammen. Denne kategorien viser hvordan lærebøkenes inndeling av kapitler og matematiske konsept (Charalambous et al., 2010). I denne delen av analysen ser jeg på kapitlene som omhandler det matematiske konseptet multiplikasjon. Jeg så på hvor mange kapittel som omhandlet multiplikasjon i bøkene, hvordan disse oppgavene er inndelt, hvordan det skilles mellom oppgaver og antall oppgaver i hvert kapittel. For å gjennomføre kodingen av oppgavene i den vertikale delen av studiet var det viktig å få en oversikt, slik at jeg kunne identifisere enhetene som skulle kodes, altså hva en oppgave defineres som. Antall oppgaver i hvert kapittel var viktig å identifisere for den kvantitative analysen av kapitlene. Denne delen av analysen ble gjort på flere stadier. Identifiseringen av oppgavene og kapitler som inneholdt multiplikasjon ble gjort før den kvalitative kodingen av oppgavene. Resten av strukturanalysen ble gjort i etterkant.

I tillegg til dette kan strukturen også si noe om hvordan de forskjellige temaene i bøkene behandles. Er det separate kapitler eller går temaer inn i hverandre. Dette kan også hjelpe meg å si noe om det *sammenflettede prinsippet* til RME. Jeg går ikke dypt inn i dette, men jeg legger det frem i analysedelen.

Det siste jeg gjorde var å lese gjennom forordet til lærerveiledningen. Der sier forfatterne noe om intensjonene de hadde når de skrev læreverket. Det er interessant i forhold til hvilken inspirasjon og didaktisk inngangsvinkel de hadde. Dette legges også frem i resultatet.

3.3.4 Utvalg

Utvalget av data i denne studien er norske lærebøker. Vi har ikke noen offentlig godkjenning av lærebøker i Norge og det er heller ingen oversikt over markedsandelene de forskjellige forlagene har når det gjelder lærebøker, slik som Charalambous et al. (2010) baserer seg på. Jeg brukte derfor bøker jeg har kommet over i egen praksis. De er også fra anerkjente forlag i Norge, Cappelen Damm og Gyldendal. Siden multiplikasjon, ifølge målene i læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020), introduseres i tredje trinn så jeg på bøker fra dette trinnet. Det er et tverrsnitt av lærebøker i matematikk. Jeg valgte et spesifikt tema, fordi kodene må lages til et tema innen matematikk. Skulle jeg ha sett på flere tema måtte jeg laget flere koder og tabeller. Undersøkelsen ville da blitt meget omfattende.

3.4 Gyldighet og pålitelighet

Siden jeg ikke har et utelukkende positivistisk syn på forskning kan jeg i denne oppgaven ikke påstå at jeg avdekker en fullstendig og universell sannhet, og det er heller ikke et mål i seg selv ved samfunnsvitenskapen. Når jeg skal si noe om verdien og kvaliteten med forskningen min kan jeg ikke bare si noe om resultatet. Postholm & Jacobsen (2018) skriver at man på en kritisk måte beskriver hvordan kunnskapen som forskningsteksten bringer frem er konstruert. Gyldighet, eller validitet, beskriver begrensningene knyttet til egen forskning. Påliteligheten, eller relabiliteten, beskriver hvordan gjennomføringen av forskningen kan ha påvirket resultatet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222).

3.4.1 Gyldighet

Gyldighet deles inn i to typer, indre og ytre. Indre sier noe om årsak og virkning. Man spør seg også om det vi har målt er det vi sier vi har målt. En såkalt begrepsmessig gyldighet. Den ytre gyldigheten sier noe om overførbarhet til andre kontekster enn det jeg har studert. (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 223). Altså, om de kapitlene jeg sier noe om kan fortelle hvordan andre kapitler er, og om dette kan si noe om andre norske lærebøker.

Jeg sier ikke noe om årsak eller virkning i min oppgave. Det måles ikke en effekt av noe. Jeg prøver ikke å besvare hvorfor noe er som det er. Problemstillingen er en måling av om en idé ser ut til å være til stede, altså en idéanalyse. Bratberg (2021) skriver at når man bedriver idéanalyse er det viktig å tydeliggjøre kriteriene for analysen for at forskningen skal ha kvalitet. Analyseskjemaet burde være utviklet før analysen starter og det skal være tydelig på hva som måles empirisk. Det anses som nødvendig at denne delen er deduktiv innrettet. Det som analyseres skal holdes opp mot noe utenfor selve analysen.

I min forskning er det nettopp dette jeg gjør. Selve analysen av lærebøkene blir gjort etter koder som er tydelig lagt frem i en tabell. Kodene er utarbeidet fra teori om RME, og forskning på RME og lærebøker. Analysen av lærebøker holdes altså opp mot noe utenfor selve analysen.

Man må også stille seg et spørsmål om hva man skal gjøre med eventuelle idéer som havner utenfor det man har i skjemaet. Skal man utvikle nye kategorier underveis? Og hvor viktig er disse idéene (Bratberg, 2021)? Dette tok jeg stilling til under utarbeidelsen av problemstillingen. Vekten av et didaktisk prinsipp mot et annet. RME eller mekanisk innlæring for eksempel. Skal jeg si noe om dette må det måles på en eller annen måte. Det er en utfordring å måle dette, vekten av en idé. Derfor ligger det i problemstillingen at jeg ser etter om egenskapene til RME finnes i oppgavene. Oppgaver som ikke kan settes inn i kategoriene jeg har blir registrert som *uten* eller *mangler*.

Ytre gyldighet omtales også som overførbarhet. Altså i hvor stor grad kan det jeg undersøker overføres til andre kontekster enn det som er studert (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 223). Kan det jeg finner i disse kapitlene overføres til andre lærebøker, eller til resten av bøkene jeg studerer? I samfunnsvitenskap generelt og idéanalyser som jeg gjennomfører er den ytre gyldigheten begrenset. Man kan si lite om en generell virkelighet og det er ikke målet heller. Her sier jeg noe om en del av en kompleks virkelighet. Skal man få en god oversikt over kvaliteten til norske lærebøker må de undersøkes med flere innfallsvinkler og perspektiver. Og et større utvalg. Det som kan sies noe om i denne undersøkelsen er innholdet i de kapitlene jeg ser på.

3.4.2 Pålitelighet

Pålitelighet med et positivistisk perspektiv handler om forskningen kan reproduseres av andre og gi samme resultat. I dette ligger et syn på at virkeligheten er objektiv og konstant. Med et pragmatisk vitenskapelig perspektiv, og i samfunnsvitenskapen generelt, er ikke dette like klart, og det kan nødvendigvis ikke reproduseres. Pålitelighet knyttes derfor til forskers refleksjon over sin påvirkning på eget resultat og at forskningsprosessen er synlig slik at andre kan reflektere over den (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 233 - 234).

Min refleksjon over egen subjektivitet er et viktig punkt. Det er en tolkning av en tekst som gjøres, ut fra mitt ståsted. Samtidig sier Postholm & Jacobsen (2018) at det er viktig at jeg dokumenterer mine egne tolkninger, slik at jeg kan se over de og få et metablikk over min tolkning. Forskerloggen hjelper meg til dette og jeg tolker også resultatene mine to ganger. Om noe er forskjellig fra første til siste gang analyserer jeg de oppgavene en gang til.

Når det gjelder om prosessen er synlig for andre er det viktig for meg å dokumentere prosessen min. Her blir også metodekapittelet viktig, samtidig som det er viktig å dokumentere funnene mine på en tydelig måte som er lett for andre å forstå. Rammeverket jeg bruker er et rammeverk som er brukt i flere undersøkelser og skal være mulig for andre å bruke.

3.5 Etiske betraktninger

Ifølge Postholm & Jacobsen (2018) tar forskningsetikken i Norge utgangspunkt i tre grunnleggende krav: informert samtykke, krav på privatliv og krav på å bli riktig gjengitt. I og med at jeg ikke utgir noen personopplysninger og ikke er i avhengig av andre mennesker vil punktet om informert samtykke ikke gjelde for min studie. Forfatterne av lærebøkene vil ikke ha mulighet til å gi samtykke til min forskning, men dette er ikke noe som kreves da lærebøkene kan regnes som offentlige dokumenter. Det er likevel viktig at jeg tar hensyn og respekterer forfatternes arbeid, og presentere funnen mine så nøytralt og nøyaktig som mulig. Jeg skal ikke drive en anmeldelse av bøkene, jeg skal kun si noe om karakteristikker av oppgaver. Samtidig må jeg være klar over at det jeg skriver kan tolkes som en kritikk av bøkene og må være forsiktig i hvordan jeg ordlegger meg.

4.0 Analyse og resultater

Her vil jeg gjennomgå resultatene av den horisontale og vertikale analysen. Jeg velger å gå gjennom den horisontale analysen først slik at bakgrunnsinformasjon og struktur kommer tydelig frem. Det er også gunstig for å forstå den vertikale analysen bedre. Den vertikale analysen kommer deretter. Her vil både kvantitative data og kvalitative dypdykk representeres for å få en forståelse av innholdet i bøkenes oppgaver. De kvantitative dataene som representeres bygger på kodingen av oppgaver i forhold til kategoriene i Tabell 1 (side 20). Det kvalitative dypdykket er en videre analyse basert på kategoriene. Der ser jeg enda nærmere på oppgaver i de forskjellige kategoriene og forklarer hvorfor de er plassert i den kategorien.

4.1 Resultater av horisontal analyse

Jeg tar her først for meg bakgrunnsinformasjonen, så tar jeg for meg strukturen. Bakgrunnsinformasjonen skal gi et bilde av utvalget, strukturen gir en oversikt over omfanget av dette utvalget.

4.1.1 Bakgrunnsinformasjon

Utvalget i denne masteroppgaven er fire lærebøker fordelt på to læreverk. Jeg har også brukt lærerveiledningene til analysen. Lærerveiledningene inneholder samme oppgaver som grunnbøkene, men de har også tilleggsinformasjon om oppgavene og forord av forfatterne. I forordet skriver forfatterne kort om inspirasjon og intensjonen de har hatt når de skrev læreverket. Siden lærerveiledningen inneholder alle sidene i grunnboken og har tilleggsinformasjon som jeg har brukt i analysen har jeg valgt å bruke lærerveiledningen som utvalg i den horisontale analysen. Begge lærerveiledningene er satt sammen likt, med en del som gir informasjon om verket og en del som er gjengivelse av grunnboka med kommentarer og forslag. Jeg skiller mellom sidene som gir informasjon om verket og sidene som gjengir grunnboka til verket.

Tabell 2. Bakgrunnsinformasjon om lærerveiledningene.

	Multi 3a	Multi 3b	Matematikk 3a	Matematikk 3b
Forfattere	Bjørn Alseth Ann- Christin Arnås Mona Røsseland	Bjørn Alseth Ann- Christin Arnås Mona Røsseland	Hanne Hafnor Dahl May- Else Nohr	Hanne Hafnor Dahl May- Else Nohr
Forlag	Gyldendal	Gyldendal	Cappelen Damm	Cappelen Damm
Utgitt	2020	2020	2021	2022
Utgave og opplag	3. utgave 2. opplag	3. utgave 2. opplag	1. utgave 3. opplag	1. utgave 3. opplag
Antall sider om verket	6	7	21	21
Antall sider med grunnbok	113	115	137	151
Antall kapitler i grunnbok	4	4	5	5

4.1.2 Struktur

Her skal jeg vise resultatene av strukturanalysen. Jeg vil vise kapittelinndelingen til hele boken, men jeg går bare inn på antall oppgaver i multiplikasjonskapitlene. Siden det kun er multiplikasjonsoppgaver jeg ser på.

Tabell 3. Kapitteloversikt av grunnbøkene.

Multi 3a	Multi 3b	Matematikk 3a	Matematikk 3b
1 Tallene til 1000	5 Talljakt	1 Tall	6 Multiplikasjon og divisjon
2 Addisjon og subtraksjon	6 Multiplikasjon og divisjon	2 Strategier i subtraksjon	7 Masse og lengde
3 Måle masse og lengde	7 Rutenett og koordinatsystem	3 Addisjon og subtraksjon	8 Likheter og ulikheter
4 Multiplikasjon	8 Regning	4 Multiplikasjon og divisjon	9 Strategier i multiplikasjon
		5 Rutenett og koordinatsystem	10 Overslag, blokkmodeller og tid

Tabellen 2 og 3 viser at det er noen paralleller mellom bøkene. De har de samme matematiske temaene og de starter bøkene med generelt om tall. 3a- bøkene starter med et kapittel om multiplikasjon, som er den første introduksjonen elevene får. Forskjellen mellom bøkene er at *Matematikk*-læreverket setter multiplikasjon i sammenheng med divisjon fra og med første kapittel der temaet er. I tillegg har Matematikk 3b 2 kapitler om multiplikasjon, et om strategier for å regne med multiplikasjon. Multi 3b har et kapittel som heter regning i dette kapitlet er det et delkapittel som heter «regning med multiplikasjon og divisjon». Matematikk 3b har i Kapittel 10 en del som omhandler representasjon av multiplikasjon som blokkmodell.

I Matematikk 3a og 3b fra Cappelen Damm forekommer det 8 forskjellige typer oppgaver i kapitlene. I lærerveiledningen blir hver oppgavetype forklart:

> «Vi tenker» er en utvalgt startoppgave som hjelper klassen med å utforske og samtale om innholdet i delkapitlet. «Vi lærer» viser en eller flere løsninger som dere kan studere og reflektere over sammen. På denne måten kan elevene utvikle en god forståelse av temaet dere skal jobbe med. «?- oppgavene» kan elevene løse sammen med klassekamerater. Her er det ofte flere måter å tenke på for å løse oppgavene. […]. «Øve 1» og «Øve 2» er oppgaver hvor elevene kan bruke det nye de har lært. […]. «Problem» er problemløsningsoppgaver. Disse må elevene kanskje jobbe mer med og prøve flere ganger før de klarer å løse de. Noen av oppgavene har flere løsninger. […] Det er lurt å samarbeide om å løse disse problemene. «Sant eller usant?» er en morsom quiz med påstander som enten er riktige eller gale, og noen er kanskje begge deler. […]. «Min stjernelogg» er en oppgave som gir elevene mulighet til å vise hva de har lært. «Spill». På slutten av hvert kapittel er det et morsomt spill som elevene også lærer matematikk av (Hafnor Dahl & Nohr, 2021).

Disse 8 oppgavetypene var de minste enhetene jeg har analysert i kodingen av Matematikk 3a og 3b. I tillegg til disse har vært hovedkapittel et bilde med en historie til laget for at elevene skal undre seg over ulike matematiske problemstillinger, og man finner målene for kapitlet og begrepene elevene skal lære (Hafnor Dahl & Nohr, 2021).

I Multi 3a og 3b fra Gyldendal forekommer det 5 forskjellige typer oppgaver. Dette er de minste enhetene i kodingen jeg foretok meg. I lærerveiledningen (Alseth et al., 2021a) forklares hver oppgavetype. «Utforskningsoppgavene» (u) inneholder nytt stoff. Disse oppgavene er ment for både klassediskusjoner og samarbeid i grupper. Oppgavene skal også ha muligheter for flere løsninger. «Forklaringsoppgavene» (f) er ment som et supplement til Utforskningsoppgavene. Der forklares disse oppgavene. «Aktivitetsoppgavene» er et bredt spekter av oppgavers som har til felles at det er arbeid utenfor elevboka. Ofte involveres bruk av konkreter og andre hjelpemidler. Det oppfordres til samarbeid. «Spill» er ment som øving på matematisk innhold. De skal egne seg godt til repetisjon. «Øveoppgaver» er nummererte oppgaver. De følger opp Utforskningsoppgaver eller Aktivitetsoppgaver og skal være et slags etterarbeid. De skal også være til hjelp for lærerens vurdering av elevene. I tillegg starter kapitlene med et samtalebilde. Kapitlene avsluttes med en test som heter «Kan du dette?». Dette skal være til hjelp for å vise læreren hvilken måloppnåelse elevene har.

Her ser vi likheter mellom de to forskjellige læreverkene. De starter begge kapitlene med et bilde som skal være en samtalestarter om det matematiske temaet til kapitlet. De har begge oppgaver som er ment til å introdusere nye elementer og brukes til klassediskusjoner. Disse oppgavene blir etterfulgt av en type forklaring. Læreverkene har også oppgavetyper som er ment til samarbeid mellom elever. De har begge oppgaver som er ment som etterarbeid som de kaller for «Øve-oppgaver». Spill av en eller annen form er også med i kapitlene. Noen oppgaver oppfordrer også til aktivitet utenfor boka.

Lærerveiledningene starter med et forord i begge læreverkene. I forordet til læreverket Matematikk (Hafnor Dahl & Nohr, 2021) er hovedpunktene for intensjonene dette:

- Fokuserer på metoder og tenkemåter, slik at elevene får dyp og varig forståelse for faget
- Gir elevene mange muligheter til å kommunisere hvordan de har tenkt og muligheter til å argumentere for egne tenkemåter
- Ønsker at elevene skal jobbe utforskende og problemløsende

I forordet nevnes det også at de har vært inspirert av undervisningsmetoder fra Nederland og Singapore. Det som er interessant her er at Nederlandske undervisningsmetoder i dag er utviklet rundt RME. Vi ser videre at hovedfokuset til dette læreverket samsvarer med læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020). Der er også dyp forståelse, kommunikasjon, argumentasjon, utforskning og problemløsning viktige elementer.

Lærerveiledningen til Multi- læreverket (Alseth et al., 2021a) har disse hovedpunktene i forordet:

- Elevene lærer gjennom utforskning og problemløsning
- Elevene lærer gjennom samarbeid og kommunikasjon
- Undervisningen tar utgangspunkt i elevenes egne erfaringer, tanker og forkunnskaper
- Utvikle kompetanse gjennom matematiske begreper, faktakunnskap, ferdigheter og strategier

Forordet nevner ingen konkrete undervisningsmetoder det er inspirert av, slik Matematikk-læreverket gjør.

Tabell 4. Struktur for kapitler i Matematikk 3a og 3b som omhandler multiplikasjon.

Kapitler	4 Multiplikasjon og divisjon	6 Multiplikasjon og divisjon	9 Strategier i multiplikasjon
Delkapitler	Like grupper Multiplikasjon Multiplikasjon og divisjon Problemløsning Oppsummering Underveisvurdering	Introduksjon til kapittel 6 Rutenett 5- og 10-gangen 2- og 4-gangen 3- og 6-gangen Multiplikasjon og divisjon Problemløsning Oppsummering og vurdering	Introduksjon Sammenhengen 2-, 4- og 8-gangen Sammenhengen 9- og 10-gangen Multiplisere med 7 Multiplikasjon og divisjon Problemløsning Hvordan lese tekstoppgaver? Min Stjernelogg Spill Oppsummering og vurdering
Sider	23	32	24
Antall oppgaver som omhandler multiplikasjon	34	68	49
Totalt antall sider og oppgaver	79 sider og 151 oppgaver		

Tabell 5. Struktur for kapitler i Multi 3a og 3b som omhandler multiplikasjon.

Kapitler	4 Multiplikasjon	6 Multiplikasjon og divisjon
Delkapitler	Hva er multiplikasjon? 2-, 5- og 10-gangen 3- og 4- angen Vi øver multiplikasjon Kan du dette?	Praktisk multiplikasjon Øve på gangetabell Multiplikasjon som rutenett Regnestrategier Praktisk divisjon Sammenheng mellom multiplikasjon og divisjon Kan du dette?
Sider	23	39
Antall oppgaver som omhandler multiplikasjon	59	65
Totalt antall sider og oppgaver	62 sider og 124 oppgaver	

Både Multi- og Matematikk-læreverket har kapitler som handler om både multiplikasjon og divisjon. Sammenhengen mellom det matematiske temaet multiplikasjon og divisjon utforskes altså i begge bøker. Ifølge *det sammenflettede prinsippet* til RME skal man lære elevene sammenhengen mellom matematiske temaer, at matematikk henger sammen. Jeg har likevel ikke valgt å analysere rene divisjonsoppgaver siden det faller utenfor kategoriene i analysen, men jeg har analysert oppgaver som kan løses med både multiplikasjon og divisjon. Det vil si at kapitlene har flere oppgaver enn de som står i Tabell 4 og 5. Antallet oppgaver er antall oppgaver analysert.

4.2 Vertikal Analyse

Her ser jeg på resultatene av den vertikale analysen. I den horisontale analysen så jeg på helheten til lærebøkene og kapitlene. I den vertikale analysen ser jeg på hvordan lærebøkene behandler et matematisk konsept (Charalambous et al., 2010). Selv om dette primært er et kvalitativt dypdykk i kapitlene om multiplikasjon, vil jeg også gi en kvantitativ oversikt over kategoriene i analysen. Dette gjør jeg for å gi en oversikt over bøkenes fokus i de forskjellige kategoriene.

4.2.1 Innhold: Forskjellige tankemodeller for multiplikasjon. Kvantitativ analyse.

Her analyserte jeg om oppgaver brukte tankemodeller for multiplikasjon. Tankemodeller er måter å se for seg multiplikasjon på, det gir multiplikasjon en kontekst. Tankemodellene gir oss et matematisk problem der multiplikasjon kan brukes for å enklere løse det. De kan også tydeliggjøre sammenhengen mellom multiplikasjon og andre matematiske domener, slik som addisjon. Tankemodellene treffer da i hvert fall to prinsipper til RME, *virkelighetsprinsippet* og *det sammenflettede prinsippet.*

Først tar jeg en kvantitativ analyse av lærebøkene. Det er verdt å merke seg at kategoriene i innhold ikke har unike koder. En oppgave kan ha flere tankemodeller. Når jeg nå viser en prosentandel av oppgavene, er det kun i forhold til totalantall oppgaver og ikke i forhold til hverandre. Jeg har derfor analysert antall oppgaver som ikke har noen form for tankemodell også.

Tabell 6. Kvantitativ analyse av tankemodeller i oppgaver i Matematikk 3a og 3b.

Tankemodell	Antall oppgaver og total	% av totalt antall oppgaver
Like grupper	120 av 151	≈ 79,47
Multiplikativ sammenligning	2 av 151	≈ 1,32
Rektangulært arrangement	59 av 151	≈ 39,07
Ingen tankemodeller	20 av 151	≈ 13,25

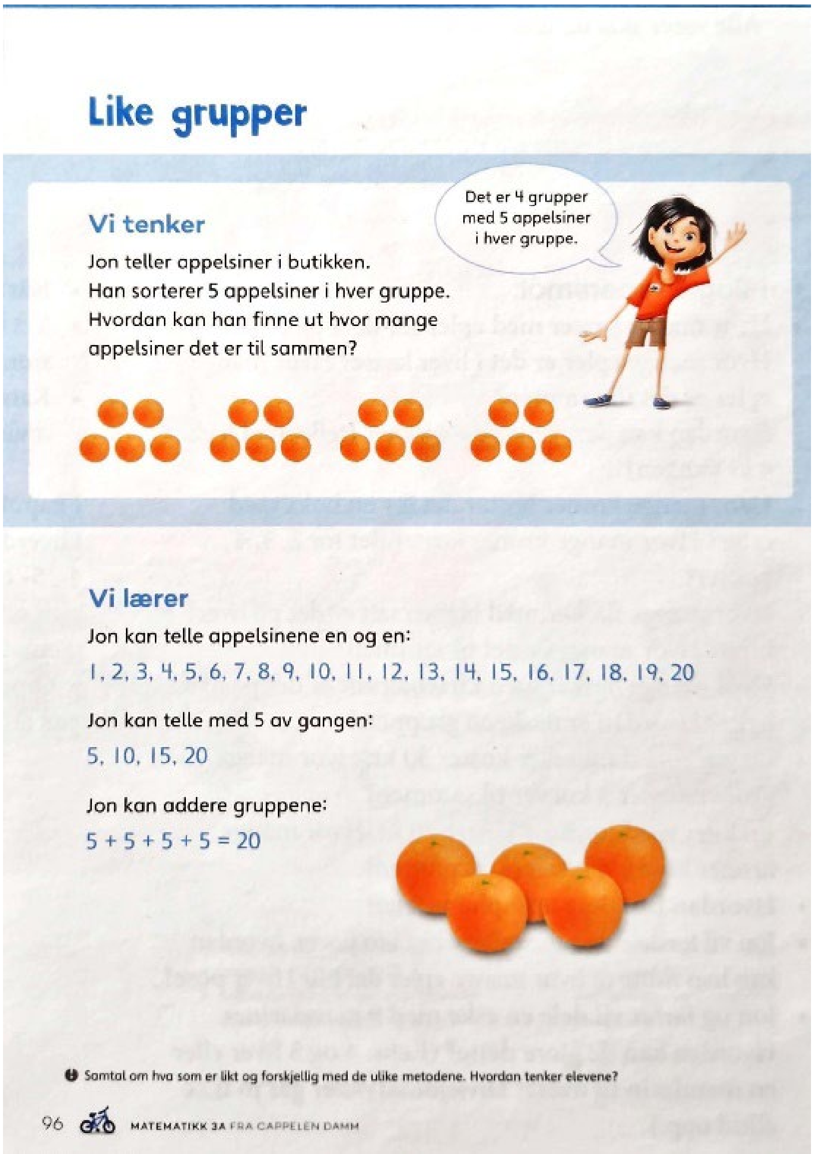
Tabell 7. Kvantitativ analyse av tankemodeller i oppgaver i Multi 3a og 3b.

Tankemodell	Antall oppgaver og total	% av totalt antall oppgaver
Like grupper	79 av 124	≈ 63,71
Multiplikativ sammenligning	2 av 124	≈ 1,61
Rektangulært arrangement	32 av 124	≈ 25,81
Ingen tankemodeller	20 av 124	≈ 16,13

Her ser vi at læreverkene legger størst vekt på *like grupper*. Dette er også et uttalt fokus i lærerveiledningen til Multi 3a (Alseth et al., 2021a, s. 96) og i lærerveiledningen til Matematikk 3a (Hafnor Dahl & Nohr, 2021, s. 94). I kompetansemålene i LK20 står det også at elevene skal utforske multiplikasjon ved telling (Utdanningsdirektoratet, 2020). *Rektangulært arrangement* er også brukt en del som tankemodell. I lærerveiledningene kaller begge læreverkene dette for rutenett. De argumenterer også for at dette er en god måte å få elever til å se for seg multiplikasjon. *Rektangulært arrangement* var også brukt i artiklene som utviklet oppgaver for bruk i RME-undervisning, slik som Figur 3 (side 10). Et mindretall av oppgavene manglet en klar tankemodell.

4.2.2 Innhold: Forskjellige tankemodeller for multiplikasjon. Kvalitativ analyse.

Den kvalitative analysen startet med en gjennomgang av alle oppgavene der jeg plasserte de i kategorier. Nå skal jeg ta et kvalitativt dypdykk der jeg viser frem eksempler på oppgaver i de forskjellige kategoriene, *like grupper, multiplikativ sammenligning* og *rektangulært arrangement*. Noen oppgaver kan være i en gråsone. Da vil jeg redegjøre for valgene jeg har gjort. Det vil bli representert oppgaver fra alle lærebøkene jeg har analysert.



Like grupper

Vi tenker

Jon teller appelsiner i butikken.
Han sorterer 5 appelsiner i hver gruppe.
Hvordan kan han finne ut hvor mange appelsiner det er til sammen?

Vi lærer

Jon kan telle appelsinene en og en:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

Jon kan telle med 5 av gangen:

5, 10, 15, 20

Jon kan addere gruppene:

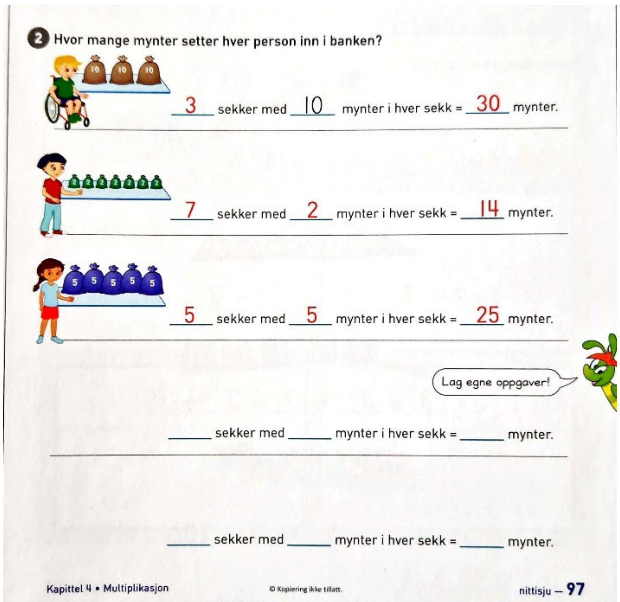
5 + 5 + 5 + 5 = 20

Samtal om hva som er likt og forskjellig med de ulike metodene. Hvordan tenker elevene?

96 MATEMATIKK 3A FRA CAPPELEN DAMM

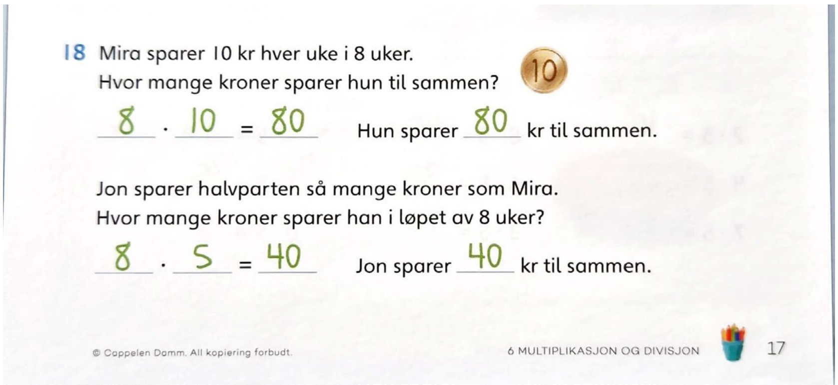
Figur 7. To oppgaver som har tankemodellene like grupper. Hentet fra lærerveiledningen Matematikk 3a (Hafnor Dahl & Nohr, 2021)

Figur 7 viser et eksempel fra Matematikk 3a på en oppgave som har tankemodellen like grupper. Denne oppgaven er den første elevene møter i det første multiplikasjonskapitlet. Den er ment som en utforskning av temaet, der elevene forsøker å løse den på sin måte. Ved hjelp av «vi lærer»- oppgaven under, skal de også ha en diskusjon rundt ulike måter å løse den på. Oppgaven skal oppsummeres med at det er 4 grupper med 5 appelsiner i hver gruppe (Hafnor Dahl & Nohr, 2021, s. 96). Her har altså språket en viktig rolle. Som vi ser utforsker elevene først multiplikasjon ved telling.



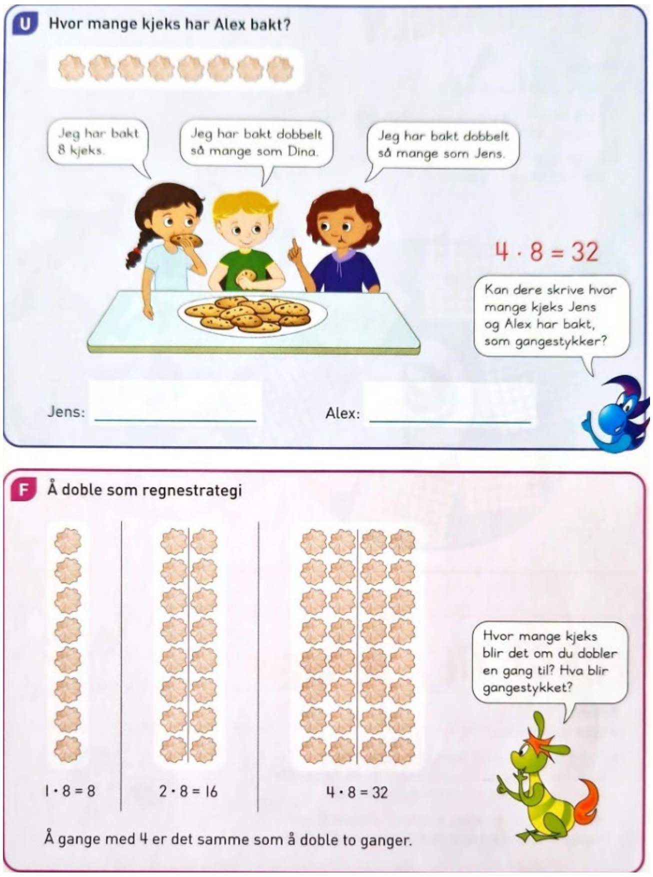
Figur 8. Eksempel på oppgave som har tankemodellen like grupper. Hentet fra Multi 3a(Alseth et al., 2021a).

I Multi 3a finner vi også eksempler på oppgaver som har *like grupper* som tankemodell. Slik som Figur 8. Denne oppgaven bruker tall som representasjon for mengdene, men tankemodellen er den samme som i Figur 7. Også her blir elevene introdusert til å bruke språket. X antall sekker med Y antall mynter i hver sekk. Der sekkene er de like gruppene. Elevene er også, slik som i Matematikk 3a, fri til å regne det ut slik de vil.



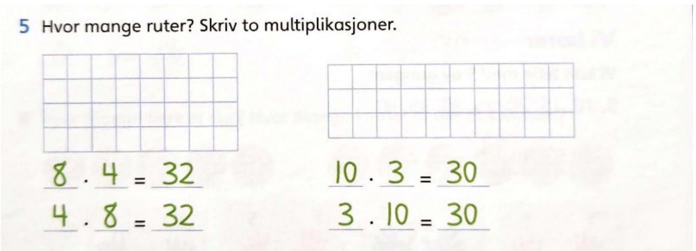
Figur 9. Eksempel på oppgave med tankemodellen multiplikativ sammenligning. Hentet fra Matematikk 3b (Hafnor Dahl & Nohr, 2022).

Et fåtall av oppgavene i begge læreverkene brukte multiplikativ sammenligning. I Figur 9 er et av eksemplene jeg først analyserte til denne kategorien, men etter andre analyse fjernet. Her er det først en oppgave med like grupper, før neste del som tar for seg en sammenligning. Denne sammenligningen er ikke en multiplikativ sammenligning, siden det ikke er en økning, men delingsdivisjon. Oppgavens intensjon er at elevene skal se sammenhengen mellom halvering av faktor og hva produktet blir.



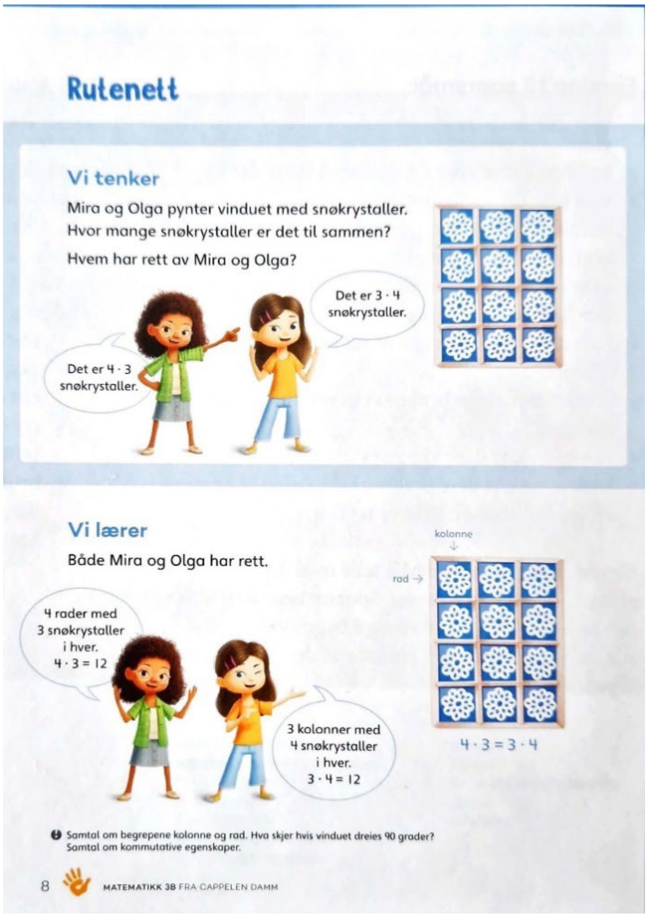
Figur 10. Eksempel på multiplikativ sammenligning hentet fra Multi 3b (Alseth et al., 2021b).

Dette eksemplet i Figur 10 viser en multiplikativ sammenligning der begrepet dobling brukes. Her forsøker også oppgaven å vise elevene sammenhengen mellom dobling av faktor og produktet man da får. Fokuset på at det er ene faktoren som dobles gjør det noe uklart at det er en multiplikativ sammenligning. Det er som sagt et fåtall av oppgavene som bruker multiplikativ sammenligning.



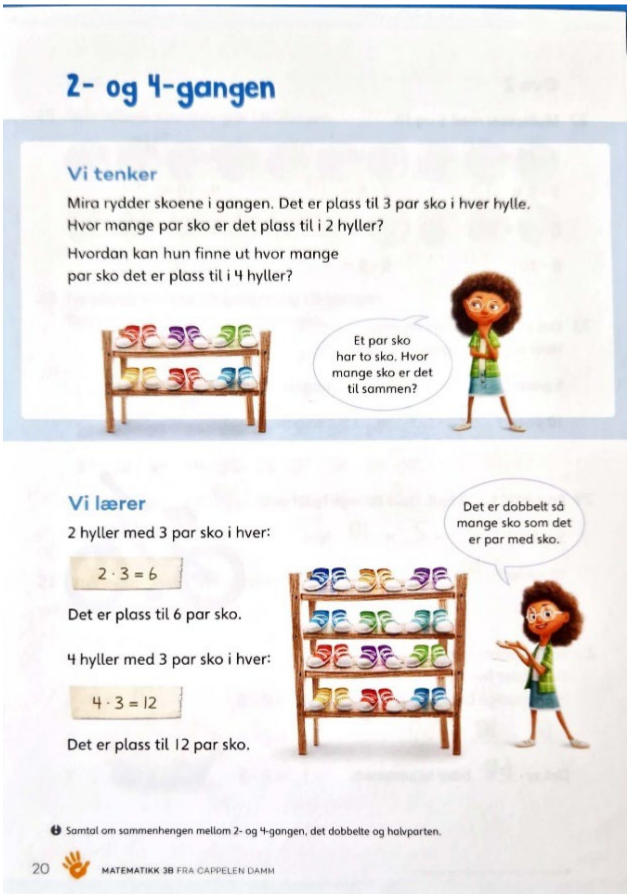
Figur 11. Eksempel på rektangulært arrangement. Hentet fra Matematikk 3b (Hafnor Dahl & Nohr, 2022).

Figur 11 er et eksempel på en oppgave som bruker rektangulært arrangement med geometriske figurer. Rader og kolonner multipliseres sammen, noe som visualiserer multiplikasjon for elevene på en geometrisk måte. Dette kan også overføres videre til å representere multiplikasjon med tall som har flere siffer senere.



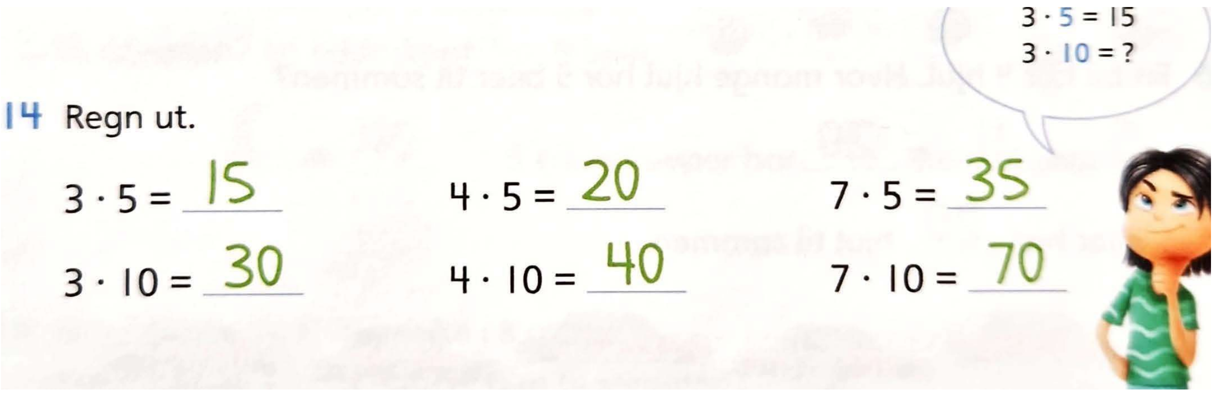
Figur 12. Eksempel på rektangulært arrangement. Hentet fra Matematikk 3b (Hafnor Dahl & Nohr, 2022)

Matematikk 3b utrykker hvor viktig det er at elever får utforske flere representasjonsformer av multiplikasjon. Figur 12 er et eksempel på *rektangulært arrangement,* som skal være med på å vise elevene multiplikasjonens kommutative egenskap. I tillegg er dette en situasjon som er en kjent kontekst. I læreplanen for matematikk står det at elevene skal kunne representere multiplikasjon på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonene (Utdanningsdirektoratet, 2020). Derfor er bruken av flere tankemodeller viktig.

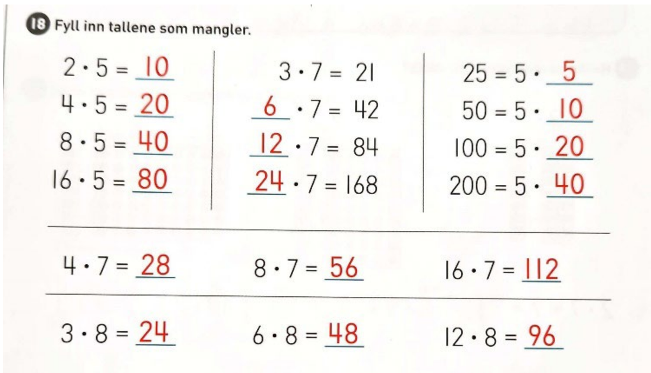


Figur 13. Oppgave som er en blanding mellom rektangulært arrangement og like grupper. Hentet fra Matematikk 3b (Hafnor Dahl & Nohr, 2022).

Oppgaver der man både har et rektangulært arrangement og like grupper samtidig er også brukt, slik som Figur 10 og Figur 13. Siden elever skal lære seg å oversette mellom ulike representasjoner er slike oppgaver viktig å bruke. I Figur 10 kan man se spor av tre forskjellige tankemodeller: *like grupper, multiplikativ sammenligning* og *Rektangulært arrangement.*



Figur 14. Oppgaver uten tydelig tankemodell. Hentet fra Matematikk 3b (Hafnor Dahl & Nohr, 2022)

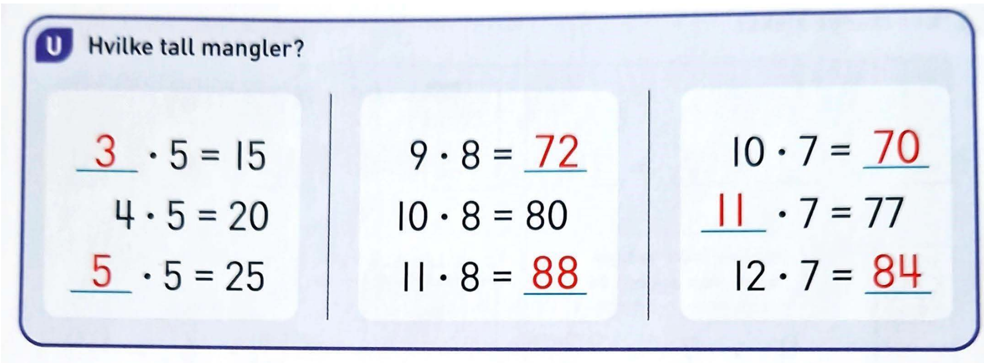


18 Fyll inn tallene som mangler.

2 · 5 = 10	3 · 7 = 21	25 = 5 · 5
4 · 5 = 20	6 · 7 = 42	50 = 5 · 10
8 · 5 = 40	12 · 7 = 84	100 = 5 · 20
16 · 5 = 80	24 · 7 = 168	200 = 5 · 40
4 · 7 = 28	8 · 7 = 56	16 · 7 = 112
3 · 8 = 24	6 · 8 = 48	12 · 8 = 96

Figur 15. Oppgave uten tydelig tankemodell. Hentet fra Multi 3b (Alseth et al., 2021b).

I Figur 14 og 15 ser vi eksempler på oppgaver uten noen form for tankemodeller. Når jeg kom over slike oppgaver sjekket jeg etter i lærerveiledningen hva som var intensjonen med oppgaven. Noen ganger ble det oppfordret til bruk av konkreter for å gi en kontekst, men ikke i disse tilfellene. Oppgaven på Figur 14 er ment at elevene skal gjenkjenne sammenhenger mellom 5- gangen og 10-gangen. I Figur 15 er det meningen å finne sammenhengen mellom dobling av ene faktor. Det at en oppgave ikke har en klar tankemodell er ingen kritikk av oppgaven. Den har her andre kvaliteter og intensjoner. Eneste jeg kan si er at de ikke har spor av virkelighetsprinsippet til RME.



U Hvilke tall mangler?

3 · 5 = 15	9 · 8 = 72	10 · 7 = 70
4 · 5 = 20	10 · 8 = 80	11 · 7 = 77
5 · 5 = 25	11 · 8 = 88	12 · 7 = 84

Figur 16. En oppgave som tilsynelatende mangler tankemodell, men likevel har en. Hentet fra Multi 3b (Alseth et al., 2021b).

Figur 16 viser et eksempel på en oppgave der teksten i lærerveiledningen gir oppgaven en tankemodell. Denne tankemodellen er *like grupper*. Intensjonen til denne oppgaven er at elevene skal se økningen av produktet når ene faktoren øker med 1 og den andre faktoren er konstant. Dette for å lære seg strategier til å regne ut oppgaver man ikke har automatisert ved å bruke noe som er kjent. Grunnen til at denne oppgaven har en tankemodell er på grunn av dette, og at lærerveiledningen oppfordrer til bruk av konkreter.

4.2.3 Forventninger til utførelse: Forskjellige typer representasjoner. Kvantitativ analyse.

Her er nivåprinsippet til RME til stede. Uformelle representasjoner skal læres først. Det er viktig å bruke representasjoner som gir mening i forhold til tankemodellene til multiplikasjon. Representasjoner som går fra uformell til en mer formell forsøker å skape en bro mellom konkret til abstrakt, her brukes kanskje en uformell presentasjon som viser oppgaven og elevene skriver det formelt, eller motsatt vei. Målet er at elever kan tenke matematisk samtidig som de kan arbeide med et formelt matematisk språk.

Først vil jeg presentere oppgavene kvantitativt i en tabell. Her er hver oppgave i en unik kategori, det er ingen overlapping slik det var for *innholds kategorien.* Det vil si at prosentandelene her henger sammen. Det er quizoppgaver i slutten på kapitlene i Matematikk 3a og 3b. Disse oppgavene ble ikke analysert fordi de ikke krever en representasjon fra elevenes side. Dette medfører at det totale antall oppgaver er 162 og ikke 167 som i *innholds kategorien.* Jeg deler opp i kapitler for å se om det er en forskjell når elevene har arbeidet med multiplikasjon en stund.

Tabell 8. En kvantitativ oversikt over oppgaver som krever ulike typer representasjoner fra elevenes side.

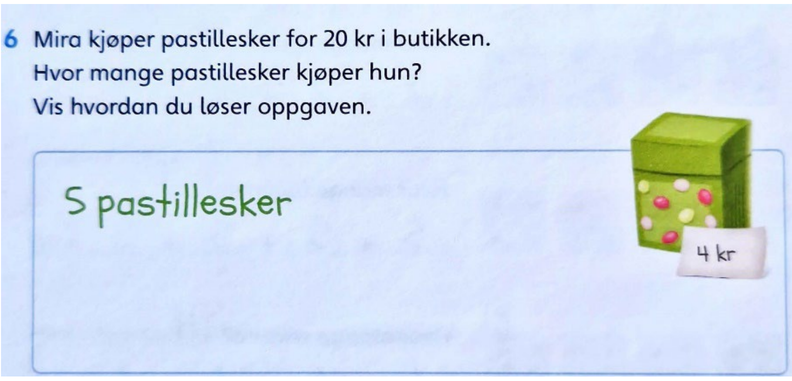
	Eget valg	Uformell	Uformell til formell	Formell
Matematikk 3a Kapittel 4	9 av 34 (≈26,47%)	8 av 34 (≈23,53%)	16 av 34 (≈47,06%)	1 av 34 (≈2,94%)
Matematikk 3b kapittel 6	15 av 68 (≈22,06%)	3 av 68 (≈4,41%)	37 av 68 (≈54,41%)	13 av 68 (≈19,11%)
Matematikk 3b kapittel 9	6 av 49 (≈12,24%)	0 av 49 (0%)	27 av 49 (≈55,10)	16 av 49 (≈32,65%)
Multi 3a kapittel 4	5 av 59 (≈8,47%)	10 av 59 (≈16,95%)	29 av 59 (≈49,15%)	15 av 59 (≈25,42%)
Multi 3b kapittel 6	6 av 65 (≈9,23%)	2 av 65 (≈3,08%)	35 av 65 (≈53,85%)	22 av 65 (≈33,85%)

Matematikk-læreverket fra Cappelen Damm starter med et lavt antall oppgaver som har kun *formell* representasjonsform. En stor andel i første kapittel er *uformelle* representasjoner og representasjoner som er en bro mellom *uformell og formell*. *Eget valg* er en kategori i dette læreverket som har en stor andel i begynnelsen. Vi ser at andelen oppgaver som har en blanding av *uformell og formell* holder seg likt gjennom kapitlene, med en minimal prosentvis økning. Kategorien *uformell* minker til 0% i det siste kapitlet, samtidig som *formell* øker kraftig. *Eget valg* minker litt. Vi ser altså at dette læreverket beveger seg fra det uformelle til det formelle, med en stor vekt på oppgaver som blander representasjonsformer.

Læreverket Multi fra Gyldendal har også en minking på rene uformelle representasjoner fra det første til det siste kapitlet. Det er også en økning på formelle representasjoner. De to andre kategoriene har en marginal økning. Det som er likt med Matematikk-læreverket er kategorien *uformell til formell* som ligger rundt 50% i alle kapitler. Kategorien *uformell* minker også mye. Det som er den store forskjellen er prosentandelen av *formelle* representasjons former i første kapittel, der har Multi en mye større andel. Også dette læreverket har en bevegelse fra *uformelt* til *formelt*, selv om det ikke er like tydelig.

4.2.4 Forventninger til utførelse: Forskjellige typer representasjoner. Kvalitativ analyse.

Her vil jeg ta et kvalitativt dypdykk. Jeg vil se på eksempler fra læreverkene på de fire kategoriene og forklare hvorfor de ble analysert slik. Forventninger til utførelse blir her definert som hva slags representasjon av oppgaven det er forventet av elevene å bruke. Jeg har brukt lærerveiledningen som supplement da jeg analyserte oppgavene. På denne måten vet jeg mer om intensjonene bak oppgavene. Oppgaver kan gå fra det uformelle til det formelle. Elevene skal etter *nivåprinsippet* til RME bevege seg vertikalt i det matematiske temaet. Figur 1 viser hvordan elevene går fra de uformelle representasjonsformene til bruk av symboler.

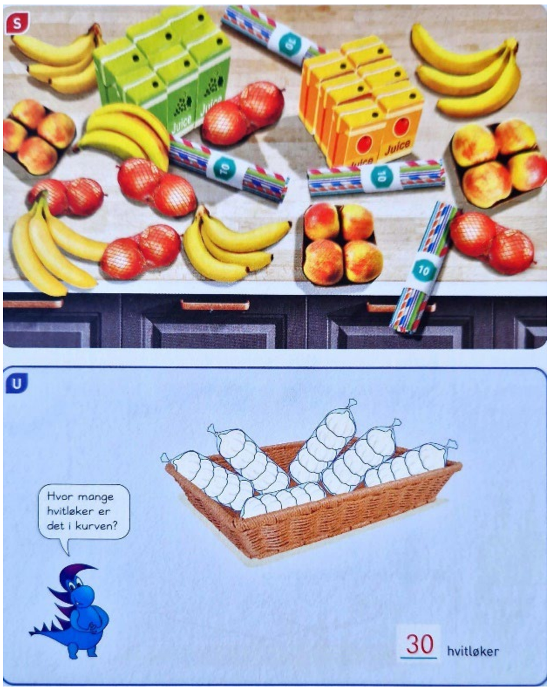


Figur 17. Eksempel på oppgave som elevene har et valg når det gjelder representasjonsform. Hentet fra Matematikk 3a (Hafnor Dahl & Nohr, 2021)

I Figur 17 ser vi et eksempel på en oppgave med *eget valg* over representasjonen. Elevene får en tekstoppgave med kontekst og de får i oppgave å vise hvordan de løser oppgaven. Her kan de bruke uformelle eller formelle representasjoner. Det at elevene selv tar et valg gjør at de er mer aktive i prosessen. Elevene kan både vise det med uformelle representasjoner eller tall.

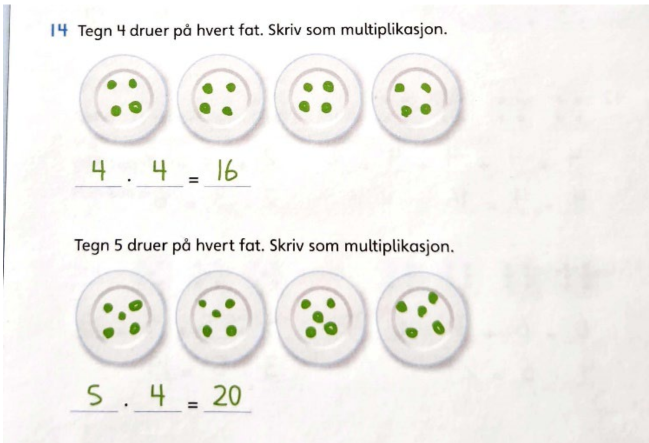
De kan bruke gjentatt addisjon eller tegne oppgaven. Dette fører til at elevene må være aktive og kreative i forhold til valget de tar.

I RME er ulike uformelle representasjoner viktige for at elevene skal få et grunnlag til å forstå det matematiske temaet og matematisere virkeligheten. Oppgaver som krever at elevene bruker *uformelle* presentasjonsformer er derfor en viktig del av RME. I bøkene jeg analyserte var det flere oppgaver som brukte *uformelle* representasjoner. En stor del brukte en *uformell* for å skape kontekst, samtidig som de krevde at en formell representasjon var med. Et eksempel på en oppgaver som kun forholdt seg til det uformelle er Figur 7 (side 34) og Figur 18. Begge oppgavene er de første oppgavene i det første kapitlet om multiplikasjon i de to læreverkene jeg analyserer. Som vi ser, er det fravær av matematiske symboler, og til og med tall. Her forholder elevene seg kun til mengder. I Figur 7 er representasjonen veldig tydelig gruppert, og viser elevene enkle måter å representere multiplikasjon på. Figur 18 har tegninger som er mer kompliserte å kopiere for elevene. I forhold til egnethet for å reprodusere måten å presentere på er nok Figur 7 bedre for elevene. Det at den viser at man kan tegne opp grupper av noe rimelig raskt gir elevene bedre grunnlag til å gjøre det samme når de trenger å løse en multiplikasjonsoppgave.



Figur 18. Et eksempel på en oppgave som krever en uformell representasjonsform. Hentet fra Multi 3a (Alseth et al., 2021a).

Figur 10, 12 og 13 er gode eksempler på oppgaver som kobler sammen *uformelle* og *formelle* representasjoner. Her får elevene konteksten gjennom et bilde som hjelper de å løse oppgaven. Selve svaret er knyttet opp til matematiske symboler og tall. Dette er oppgaver som har *uformelle* representasjoner og som vil at elevene skal skrive det *formelt*. Figur 19 viser en oppgave der elevene skal gjøre en *uformell* representasjon selv, for så å skrive det *formelt*. Over halvparten av alle oppgavene i læreverkene består av oppgaver der *uformelle* og *formelle* representasjoner blandes sammen. Man kan altså si at dette er hovedfokuset oppgavene har. Det er viktig å koble sammen uformelle representasjoner til symboler og tall. Slik får elevene beveget seg vertikalt i temaet.



Figur 19. En oppgave der elevene skal representere både uformelt og formelt. Hentet fra Matematikk 3a (Hafnor Dahl & Nohr, 2021).

Når vi kommer til rene formelle presentasjoner, har vi 2 typer oppgaver. Figur 14, 15 og 16 er oppgaver der elevene fyller inn tall. Selve representasjonen er allerede laget. Disse oppgavene var ofte brukt for at elevene skulle se en sammenheng mellom faktorer og produkt. Noen av oppgavene var det også oppfordret til at læreren tok i bruk konkreter for de som trengte det. Så selv om oppgaven var formell kunne man knytte den til uformelle representasjoner likevel. Jeg kategoriserte de likevel i ren formell kategori fordi det er selve læreverket jeg ser på, ikke aktiviteten i klasserommet. Den andre typen oppgaver vi hadde var oppgaver som gav kontekst gjennom fortellinger. Elevenes oppgave var deretter å finne matematikken i fortellingen og skrive en formell representasjon av dette, slik som Figur 9.

4.2.5 Tilrettelegging for læring. Didaktisk støtte. Kvantitativ analyse.

Oppgavene under kodene er unike i kategoriene *kontekst, tallinjer* og *visuelle hjelpemidler.* Det er overlapping med *egenproduserte oppgaver,* hvis en oppgave kun er i den kategorien merker jeg at den er unik til den. En oppgave kan ha en av de andre kategoriene samtidig som det er en egenprodusert oppgave. Resten av kategoriene utelukker hverandre. Jeg har også tatt med en kategori der oppgaver som mangler didaktiske hjelpemidler. Når jeg analyserer oppgavene etter didaktiske virkemidler, så ser jeg på det som er i selve grunnboka til elevene, ikke hva eventuelt en lærer kan bidra med. Oppgaver som ikke har noen didaktiske hjelpemidler kan suppleres med konkreter og annen kontekst fra læreren, men det er ikke mulig for meg å si noe om aktiviteten i klasserommet.

Tabell 9. Didaktisk støtte i Matematikk 3a og 3b fra Cappelen Damm.

	Kontekst	Tallinjer	Visuelle hjelpemidler	Egenproduserte oppgaver	Uten hjelpemidler
Kapittel 4	9 av 34 (≈26,47%)	2 av 34 (≈5,88%)	22 av 34 (≈64,71%)	3 (ikke unike)	1 av 34 (≈2,94%)
Kapittel 6	13 av 68 (≈19,12%)	5 av 68 (≈7,35%)	37 av 68 (≈54,41%)	3 (unike) av 68 (≈4,41%)	10 av 68 (≈14,71%)
Kapittel 9	10 av 49 (≈20,41%)	1 av 49 (≈2,04%)	25 av 49 (≈51,02%)	4 (unike) av 49 (≈8,16%)	9 av 49 (≈18,37%)

Kategorien *visuelle hjelpemidler* er også en måte å skape kontekst på. Oppgavene i denne kategorien kan også ha en form for kontekst i form av historie også. Dette er den kategorien med størst prosentandel. Det viser at det fokuseres på visuelle hjelpemidler for å gi en uformell representasjon av oppgavene i Matematikklæreverket. Oppgaver som gir en kontekst uten å bruke visuelle hjelpemidler har også en stor prosentandel av oppgavene. Det er over to tredeler av hvert kapittel som har en oppgave med en eller annen kontekst. I tillegg har vi tallinjeoppgavene som også er et visuelt hjelpemiddel. En veldig liten andel mangler didaktiske støtte i det hele tatt.

Tabell 10. Fordeling av typer didaktisk støtte i oppgavene i Multi 3a og 3b.

	Kontekst	Tallinjer	Visuelle hjelpemidler	Egenproduserte oppgaver	Uten hjelpemidler
Kapittel 4	9 av 59 (≈15,25%)	7 av 59 (≈11,86%)	28 av 59 (≈47,46%)	5 av 59 (≈8,47%)	10 av 59 (≈16,95%)
Kapittel 6	13 av 65 (20%)	2 av 65 (≈3,08%)	33 av 65 (≈50,77%)	3 av 65 (≈4,62%)	14 av 65 (≈21,54%)

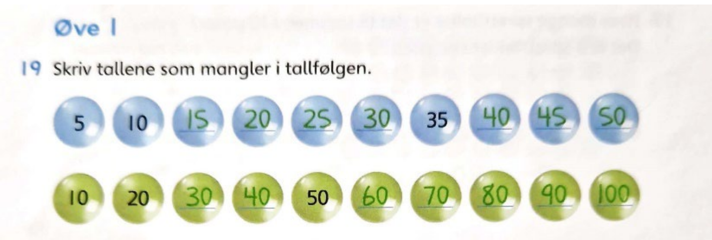
Som i Matematikk- læreverket er kategorien *visuelle hjelpemidler* den med størst prosentandel. Fordelingen av de andre kategoriene er også ganske like. Forskjellen ser vi på første kapittel der det er en større andel av oppgaver uten didaktisk støtte og at det er en mer utstrakt bruk av tallinjer. Det er likevel en strukturforskjell mellom de to læreverkene som gjør at forskjellene kan komme av det også. Som Matematikk-læreverket har også Multi-læreverket en stor andel som enten har *visuelle hjelpemidler* eller *kontekst* som didaktiske hjelpemidler. En noe større andel mangler didaktiske hjelpemidler, men Multi- læreverket har også mindre antall oppgaver.

4.2.6 Tilrettelegging for læring. Didaktisk støtte. Kvalitativ analyse.

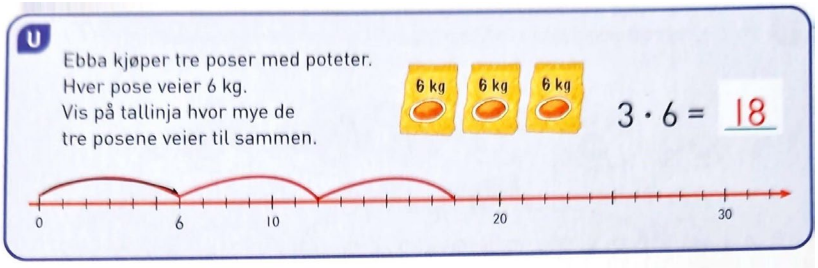
Oppgaver som bruker kontekst som didaktisk støtte skal hjelpe elevene med å forestille seg matematikken. I analysen har jeg valgt oppgaver som gir kontekst uten noen form for visuell representasjon som hjelpemiddel. Dette fordi det er en egen kategori. Konteksten oppgavene brukte var å knytte matematikken til noe fra verden rundt elevene. Kontekst i sammenheng med RME er å gi elevene en mulighet til å se for seg matematikken, altså *virkelighetsprinsippet.*

Figur 9 (side 35) viser en oppgave som bruker kontekst som didaktisk støtte, oppgaven består av ren tekst som knytter matematikken til noe fra virkeligheten. Figur 17 bruker også ren tekst for å gi matematikken en kontekst, her får elevene en mer åpen oppgave også. De må bruke konteksten til å finne oppgaven selv. Denne oppgaven kan for øvrig løses på flere måter, og bruke både multiplikasjon og divisjon. Figur 8 er også en oppgave jeg valgte å kategorisere som kontekstbasert. Selv om det er en visuell presentasjon så er det konteksten penger som er mer abstrakt som brukes. Alle tre oppgavene jeg viser til bruker penger som kontekst, dette var ofte det som var konteksten når det var snakk om tekstoppgaver.

Tallinjer er et visuelt hjelpemiddel, men siden det er en spesiell type representasjon, som kan brukes til flere matematiske temaer, velger jeg å plassere det i en egen kategori. *Tallinjer* er egnet til å visualisere gjentatt addisjon på en måte som hjelper elevene til å se det for seg. Det er ikke en like uformell representasjon som noen av de visuelle hjelpemidlene, siden det forholder seg til tall. Det var ulike typer tallinjer, noen var tallfølger, som elevene skulle fylle ut. Figur 20 viser en slik oppgave. Andre oppgaver brukte tallinjer som var en representasjon av alle heltall i rekkefølge, slik som Figur 21, ikke bare en tallfølge.



Figur 20. En oppgave som bruker tallinjer som didaktisk hjelpemiddel. Hentet fra Matematikk 3b (Hafnor Dahl & Nohr, 2022).



Figur 21. Oppgave med en tallinje der hvert påfølgende heltall er representert. Hentet fra Multi 3a (Alseth et al., 2021a).

Da jeg kategoriserte *visuelle hjelpemidler* var kriteriene at de skulle være knyttet til representasjonen av multiplikasjon. Et bilde er ikke nødvendigvis et *visuelt hjelpemiddel.* Ser vi på Figur 5 og 6 i Kapittel 3 vil man se forskjellen mellom et *visuelt hjelpemiddel* og bare et bilde.

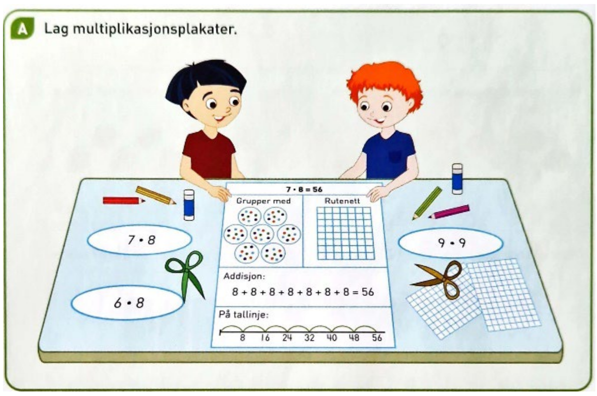
Mange av oppgavene i de analyserte læreverkene hadde oppgaver som inneholdt visuelle hjelpemidler. Disse var sterkt knyttet til *uformelle* og *uformelt til formelt* kategoriene innenfor representasjon. Både Figur 7, 10, 12, 13 og 18 har *visuelle hjelpemidler* for å løse oppgavene. Ser vi på Figur 7 for eksempel vil måten man tegner appelsinene være en gunstig måte å tegne opp en multiplikasjonsoppgave senere. Når elevene senere i boken møter oppgaver som for eksempel Figur 19 kan de huske hvordan det kunne gjøres.

Figur 18 har en mindre gunstig fremstilling av matematikken, fordi det vil være tidkrevende for elevene å representere multiplikasjon slik. Det vil si at representasjonen ikke kan overføres helt likt. Denne oppgaven er likevel kategorisert under *visuelle hjelpemidler* fordi den viser idéen bak multiplikasjon på en forståelig måte.

Det var ikke mange eksempler på visuelle representasjoner i læreverkene som ikke var til hjelp for å forstå matematikken. Noen spill hadde tegninger som ikke hadde noe med multiplikasjon å gjøre, slik som Figur 22 viser. Selve oppgaven bruker terninger, der øynene kan sees på som et visuelt hjelpemiddel, men representasjonen i boka er ikke til hjelp for å forstå idéen bak multiplikasjon.

Figur 22. Dette er et eksempel på en visuell representasjon som ikke er et hjelpemiddel til å løse oppgaven. Hentet fra Multi 3a (Alseth et al., 2021a).

Aktivitetsprinsippet til RME sier at elevene skal være aktive deltakere i læringsprosessen. *Egenproduserte oppgaver* er ment for at elevene skal være mer aktive når det kommer til å løse oppgavene. Noen egenproduserte oppgaver krever at de finner fremgangsmåte selv, og andre krever at de lager hele oppgaven selv. Det var oppgaver som skulle sette de fysisk i aktivitet, slik som Figur 23. Kreativiteten til elevene og forståelsen av multiplikasjon blir utfordret når de skal lage representasjoner over de forskjellige tankemodellene og representasjonene de har lært for multiplikasjon. Her er også elevene en aktiv deltaker i undervisningen, som følger *aktivitetsprinsippet* i RME.



Figur 23. Dette er en oppgave der elevene lager alt selv, både oppgave og representasjon. Hentet fra Multi 3b (Alseth et al., 2021b).

Det var også oppgaver der elevene fikk en representasjon og skulle lage regnefortellinger som passet til representasjonene eller bildene. Det var ofte introduksjonsbilder til starten av et kapittel eller delkapittel. Det kunne også være på slutten av kapittelet, slik som Figur 24. Her er elevene i aktivitet på en annen måte. De må aktivt tenke over multiplikasjon og hvordan de kan ordlegge seg slik at andre forstår at det er multiplikasjon det dreier seg om. Det krever både kreativitet, forståelse av multiplikasjon og mestring av språket. I denne spesifikke oppgaven er det også forsøkt å koble sammen multiplikasjon og divisjon.

Figur 24. Dett er en oppgave der elevene skal lage regnefortellinger. Hentet fra Matematikk 3a (Hafnor Dahl & Nohr, 2021).

Oppgaver uten noen form for didaktisk støtte gir verken elevene en kontekst i form av språk eller visuelle elementer, de mangler eventuelle uformelle representasjoner av oppgaven og de gir ikke elevene rom for å komme med egne løsninger. Figur 14 og 15 viser slike oppgaver. Ofte var dette oppgaver som skulle hjelpe elevene å se en sammenheng mellom forskjellige faktorer i multiplikasjonen. For eksempel hva som skjer med produktet hvis man dobler den ene faktoren, slik som på Figur 14 og 15. Slike oppgaver har en funksjon etter at elevene har forstått multiplikasjon og kan arbeide i den symbolske matematiske verden.

5.0 Drøfting og Konklusjon

I dette kapitlet vil jeg drøfte de tre forskningsspørsmålene og problemstillingen i lys av analysene jeg har gjort. De tre forskningsspørsmålene inneholder hovedkategoriene fra den kvalitative analysen, altså *innhold, forventninger til utførelse* og *tilrettelegging for læring.* De inneholder også noen av prinsippene til RME, først og fremst *virkelighetsprinsippet* og *nivåprinsippet.* Jeg vil også forsøke å si noe om *det sammenflettede prinsippet, interaksjonsprinsippet* og *aktivitetsprinsippet.*

5.1 Forskningsspørsmål

De tre forskningsspørsmålene jeg nå skal svare på er:

1. På hvilken måte hjelper oppgavene elevene å forstå meningen bak multiplikasjon?
2. Hvordan beveger læreverkene seg fra uformelle representasjoner til formelle representasjoner?
3. På hvilken måte legger oppgavene i læreverkene opp til aktivitet og interaksjon?

5.1.1 På hvilken måte hjelper oppgavene elevene til å forstå meningen bak multiplikasjon?

I *virkelighetsprinsippet* til RME (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020) legges det vekt på at elevene skal forstå, eller se for seg matematikken. Også i læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020) er det lagt vekt på en dyp og varig forståelse av matematikken. Under dette spørsmålet ser jeg på forskjellige faktorer som skal hjelpe elevene til å dette. Oppgavenes intensjoner, tankemodellene som oppgavene inneholder, konteksten i oppgavene og de visuelle hjelpemidlene som er brukt er alle virkemidler for å oppnå forståelse.

I forordet, som er gjennomgått i kapittel *4.1.2,* uttaler læreverkene at intensjonen med oppgavene er å utvikle en dyp og varig forståelse for matematikken. De har en oppgavestruktur der kapitlene og delkapitlene blir introdusert med oppgaver som er ment for refleksjon og samtaler rundt det aktuelle temaet. Henholdsvis «Vi tenker» og «Vi lærer» oppgaver i *Matematikk-læreverkene (Hafnor Dahl & Nohr, 2021)* og «Utforsknings-forklaringsoppgavene» i Multi (Alseth et al., 2021a). Disse oppgavene er supplert med visuelle hjelpemidler. De hjelper elevene med å se den matematiske idéen, i dette tilfellet multiplikasjon.

Da jeg analyserte innholdet i bøkene så jeg først på hvilke tankemodeller som var brukt for å forstå multiplikasjon. Siden tankemodellene er en måte å se for seg multiplikasjonen på, er de en viktig vei til å forstå hva multiplikasjon er. Det er viktig at elevene arbeider med flere av tankemodellene for å utvikle et godt multiplikasjonsbegrep (Hinna et al., 2012, s. 106). I læreverkene, slik Tabell 6 og 7 (side 32 og 33) viser, var det størst fokus på tankemodellen *like grupper (Bjørnestad et al., 2016, s. 58)*. Denne tankemodellen er sterkt knyttet til addisjon (siden det er gjentatt addisjon), en regneart elevene er kjent med fra før. Det å knytte multiplikasjon til noe som er kjent skaper en bro for elevene til å tilegne seg forståelse. Dette viser også at multiplikasjon er sammenflettet med andre matematiske temaer.

Rektangulært argument (Bjørnestad et al., 2016, s. 58) blir også brukt en del. Det er en visuell måte å se for seg multiplikasjon på, som er sterkt knyttet til geometrien. Det brukes kjente kontekster fra virkeligheten for elevene og etter hvert brukes det geometriske figurer som representasjon for multiplikasjon, slik som Figur 11 (side 36).

Oppgaver som Figur 7 (side 34) gir elevene en strukturert måte å representere like grupper på. Det relateres til noe elevene er kjent med. Man kan også anta at elevene har delt inn i like grupper i hverdagslivet. Som vi ser fra Tabell 9 og 10 (side 44) bruker læreverkene ofte visuelle hjelpemidler for å representere matematikken.

Kontekst er et virkemiddel som ofte brukes i RME-læreverk (van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2017). Oppgaver som setter multiplikasjon i en kontekst, enten ved hjelp av visuelle hjelpemidler, tekst eller begge deler er til stede i de to læreverkene jeg analyserer. Som vi ser av Tabell 9 og 10 (side 44) bruker et stort flertall av oppgavene denne typen didaktiske virkemidler.

Visuelle hjelpemidler, *kontekster* til hverdagslige situasjoner og *tankemodeller* er virkemidlene bøkene bruker for å hjelpe elevene til å forstå multiplikasjon. van Zanten og van den Heuvel-Panhuizen(2017) fant at det nesten ikke var *visuelle hjelpemidler* i bøker laget før RME kom på banen i Nederland, og i boken som var utgitt etter RME kom på banen ble *visuelle hjelpemidler* brukt ofte. Setadi (2020) legger også vekt på visuelle hjelpemidler og kontekst da han utviklet multiplikasjonsoppgaver for RME. Majoriteten av oppgavene i Matematikk-læreverket og Multi er lagt opp etter disse prinsippene. Dette kan relateres til *virkelighetsprinsippet* i RME (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020). Læreverkene bruker disse virkemidlene slik at elevene kan matematisere virkeligheten og forstå multiplikasjonens idé.

5.1.2 Hvordan beveger læreverkene seg fra uformelle representasjoner til formelle representasjoner?

Dette spørsmålet handler først og fremst om *nivåprinsippet (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020)*. Elevene skal bevege seg vertikalt og horisontalt i det matematiske temaet, fra uformelle modeller til formelle modeller med matematiske symboler. Det Thi & Phu (2021) kaller en *modell for* til en *modell av* i Figur 2. Elevene blir utsatt for uformelle situasjoner og modeller knyttet opp til et matematisk problem (MMU, 2022), dette er horisontal matematisering. De skal gjennom dette formalisere og generalisere matematikken, vertikal matematisering (Barmby et al., 2011, s. 48). I hovedkategorien *forventninger til utførelse* i analysen viser den at hovedvekten av oppgaver har en blanding av uformelle og formelle representasjoner hvis vi ser på Tabell 8 (side 40).

Begge læreverkene starter med en oppgave med kun uformell representasjon, Figur 7 (side 34) og 18 (side 42). Konseptet a · b introduseres for eksempel først med en representasjon av x grupper med y antall appelsiner. Gradvis utvides begrepet til gjentatt addisjon (a + a + a…), for så å introdusere multiplikasjonssymbolet, slik som på Figur 10 (side 36), Figur 12 (side 37) og Figur 13 (side 38). Dette gjør også Setadi (2020, s. 46 - 50) da han introduserer multiplikasjon etter prinsippene til RME. Det skal altså skje en vertikal matematisering gjennom arbeidet med oppgavene.

I Tabell 8 (side 40) ser vi at det er en minking på prosentandelen av uformelle representasjoner, og en økning på prosentandelen av formelle representasjoner, sammenlignet med første kapittel om multiplikasjon og siste kapittel. Dette gjelder for begge læreverkene. De beveger seg altså fra *modeller av* til *modeller for* (Thi & Phu, 2021, s. 3). Dette ligger opp mot kjerneelementene abstraksjon og generalisering i læreplanen for matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020) der det står at det går fra det konkret til formelt symbolspråk. Selv om jeg ikke kan si at de er påvirket av RME, kan man se at læreverkene og læreplanen i matematikk har samme intensjon som *nivåprinsippet* i RME (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020).

5.1.3 På hvilken måte legger oppgavene i læreverkene opp til aktivitet og interaksjon?

Den første delen av dette spørsmålet, aktivitet, handler om *aktivitetsprinsippet* til RME (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020). Elevene skal være aktive deltakere i sin læringsprosess. Aktiviteten kan komme i flere former, både kognitivt og fysisk.

I kategorien *didaktisk støtte* er det en underkategori som heter *egenproduserte oppgaver.* I RME brukes slike oppgaver for at elevene skal få rom til å utforske løsningsmetoder og å lage egne matematiske problemløsningsoppgaver (van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2017, s. 134). Slike oppgaver krever at elevene bruker sin egen kreativitet og forståelse for å løse den. De må altså være kognitivt aktive. Selv om det ikke er en stor andel slike oppgaver, er det fremdeles en del av læreverkene. De er også oppgaver som er av større omfang enn andre typer oppgaver. Både Multi- og Matematikk-læreverket har slike oppgaver. Spesielt «aktivitetsoppgavene» og «min stjernelogg», der elevene står fritt til å lage egne oppgaver. Figur 24 (side 48) er et godt eksempel på slike oppgaver.

I *forventninger til utførelse* er en av underkategoriene *eget valg.* Dette er oppgaver der elevene velger representasjonsform selv, slik som Figur 17 (side 41). Slike oppgaver krever aktive valg av elevene og er derfor en måte å legge til rette for aktive elever. Her var det ikke nødvendigvis slik at de laget hele oppgaven selv. Som van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen (2017) skriver, er slike oppgaver laget for at elevene får utforske forskjellige metoder å løse oppgavene på. Slik er de aktive deltakere i sin egen læring.

Det legges opp til aktivitet i andre oppgaver også. Problemløsningsoppgaver, som krever en aktiv deltakelse, er også et fokus for læreverkene. Et slikt fokus kommer også frem når RME blir brukt aktivt i undervisningen ifølge Dickinson & Hough (2012). Begge læreverkene, under gjennomgang av hvilke oppgaver de inneholder i Kapittel 4.1.2, sier det er fokus på slike oppgaver.

Den andre delen av spørsmålet, interaksjon, handler om kommunikasjon og samarbeid i undervisningen. Her har jeg brukt teksten i lærerveiledningene til Multi (Alseth et al., 2021a) og Matematikk (Hafnor Dahl & Nohr, 2021) for å få en forståelse for hva intensjonen er. Ser vi på strukturanalysen (Kapittel 4.1.2) er det oppgaver som spesifikt oppfordrer til samarbeid og kommunikasjon hos begge læreverkene, slik som for eksempel Figur 7 (side 34) og Figur 10 (side 36). Det er flere typer oppgaver som legger til rette for en matematisk samtale og samarbeid mellom elever.

Dette er også det RME vil med interaksjonsprinsippet (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020). Jeg kan derfor si at det er et mulig samsvar, om enn utilsiktet, mellom læreverkenes fokus på interaksjon og RME-prinsippet. I læreplanen for matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020) under kjerneelementene er det også uttalt at argumentasjon og kommunikasjon er viktig i matematikken. Siden læreverkene er utgitt etter denne, vil det være sannsynlig at dette er et fokus for de.

5.2 Hvor nært ligger multiplikasjonsoppgaver i norske lærebøker, laget etter LK20, opp mot prinsippene til Realistic Mathematics Education?

Gjennom å svare på forskningsspørsmålene har jeg funnet egenskaper ved oppgavene i læreverket som samsvarer med *aktivitetsprinsippet, virkelighetsprinsippet, nivåprinsippet* og *interaksjonsprinsippet.* Da gjenstår det to prinsipper, *det sammenflettede prinsippet* og *veiledningsprinsippet (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020).*

Hvis vi ser på strukturanalysen i Kapittel 4.1.2, er det kapitler og underkapitler i læreverkene som omhandler både multiplikasjon og divisjon. Sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon utforskes i disse kapitlene. Det er oppgaver som for eksempel Figur 17 (side 41) som kan løses med både multiplikasjon og divisjon. Addisjon knyttes også til multiplikasjon, gjennom gjentatt addisjon, slik som for eksempel i Figur 7 (side 34). Sammenhengen mellom geometri og multiplikasjon utforskes også når tankemodellen *rektangulært arrangement (Bjørnestad et al., 2016, s. 58)* brukes, slik som for eksempel Figur 11 (side 36). Her ser vi altså at det *sammenflettede prinsippet (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020)* er til stede i læreverkene.

Det gjenværende *veiledningsprinsippet* (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020) er vanskeligere å finne i læreverkene, siden dette handler mer om klasseromspraksisen til læreren. Hvordan man utfører samtaler med elevene og legger opp planer. Dette er vanskelig å si noe om ut fra et læreverks oppgaver.

5.2.1 Konklusjon

Etter analysene av læreverkene ser jeg altså egenskaper i de som delvis samsvarer med prinsippene til RME. Multiplikasjonsoppgavene i disse læreverkene har for det meste en kontekst, de har en gradvis nivåøking hvis vi ser på *forventninger til utførelse* og de oppfordrer til interaksjon og aktiv læring. Multiplikasjonsoppgavene har altså egenskaper som delvis ligner på prinsippene til RME (Drivjers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020). Jeg kan altså si at multiplikasjonsoppgavene i de to læreverkene jeg analyserer ligger nært opp mot prinsippene til RME.

Denne likheten kan ha å gjøre med læreplanens kjerneelementer (Utdanningsdirektoratet, 2020) og hvor nært de ligger prinsippene til RME. Jeg kan ikke si noe om hvorfor, eller om læreplanen for matematikk er inspirert av RME. Det finner jeg ikke informasjon om. Det er andre retninger innenfor matematikkundervisning som også har fokus på dyp og varig forståelse som også kan være en inspirasjonskilde.

Det er heller ikke mulig å konkludere med at norske læreverk generelt er slik, siden jeg analyserte et begrenset utvalg. Jeg analyserte kun kapitler som omhandlet multiplikasjon, men det er nærliggende å tro at oppgaver i andre kapitler i boken har samme type egenskaper. Det hadde vært interessant og kunne analysert læreverkene fra og med 1. trinn til og med 7. trinn for å se om de følger prinsippene hele veien.

5.2.2 Veien videre

Det er begrenset hva vi vet om norske læreverk i matematikk skrevet etter innføringen av ny læreplan. En bedre oversikt over egenskapene til hvert enkelt læreverk hadde vært til hjelp for både skoler og lærere til å ta et informert valg over hvilke læreverk man skal ta i bruk. Dette ville krevd en omfattende forskning på læreverkene. Ved å basere seg på Charalambous et al. (2010) og Valverde et al. (2002) sine rammeverk kan man analysere egenskapene til flere norske læreverk i lys av prinsippene til læreplanen og se om de samsvarer. Det er viktig å forstå læreverk for å forstå læringsmulighetene elevene får i utdanningen sin (Valverde et al., 2002, s. 2).

Litteraturliste

Alseth, B., Arnås, A.-C. & Røsseland, M. (2021a). *Multi 3a Lærerveiledning*. Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.-C. & Røsseland, M. (2021b). *Multi 3b lærerveiledning*. Gyldendal.

Barmby, P., Dickinson, P., Hough, S. & Searle, J. (2011). Evaluating the impact of a Realistic Mathematics Education project in secondary schools. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *31*(3), 47-52.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2016). *Alfa: Matematikk for grunnskoleutdanningen 1-7 og 5-10* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Bratberg, Ø. (2021). *Tekstanalyse for samfunnsvitere* (3. utg.). Cappelen Damm Akademisk.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 117-151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Christoffersen, L. & Johannesen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt Forlag.

Creswell, J. & Plano Clark, V. (2018). *Designing and conducting mixed methods research*. Sage Publication Inc.

Dickinson, P. & Hough, S. (2012). *Using Realistic Mathematics Education in UK classrooms*. Center For Mathematics Education, Manchester Metropolitan University. https://www.mei.org.uk/app/uploads/2021/08/RME_Impact_booklet.pdf

Drivjers, P. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). Realistic Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2. utg., s. 713–717). Springer Cham.

Grevholm, B. (2017). *Mathematics Textbooks, their content, use and influences* (B. Grevholm, Red.). Cappelen Damm Akademisk.

Hafnor Dahl, H. & Nohr, M.-E. (2021). *Matematikk 3a Lærerveiledning*. Cappelen Damm.

Hafnor Dahl, H. & Nohr, M.-E. (2022). *Matematikk 3b Lærerveiledning*. Cappelen Damm.

Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A. & Gustavsen, T. S. (2012). *QED 1-7. Matematikk for grunnskolelærerutdanningen*. Cappelen Damm.

Imsen, G. (2018). *Elevenes Verden* (5. utg.). Universitetsforlaget.

Lampert, M. (2001). *Teaching Problems and the Problems of Teaching*. Yale University Press.

Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2017). Using textbooks in the mathematics classroom - the teachers' view. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences*. Cappelen Damm Akademisk.

MMU. (2022). *Realistic Mathematics Education*. Manchester Metropolitan University. Hentet 22.september fra https://rme.org.uk/

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Cappelen Damm Akademisk.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Setadi, N. (2020). The implementation of Realistic Mathematics Education (RME) to support Indonesian 5.grade students to learn multiplication and division. *Southeast Asia Mathematics Education Journal*, *10*(1). https://doi.org/10.46517/seamej.v10i1.98

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Thi, N. & Phu, N. (2021). Developing Primary Students' Understanding of Mathematics through Mathematization: A Case of Teaching the Multiplication of Two Natural Numbers. *European Journal of Educational Research*, *11*(1), 1-16.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Matematikk 1-10 (MAT01-5)*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nno

Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W. & Houang, R. (2002). *According to the Book* (1. utg.). Springer Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0844-0

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). *Realistic Mathematics Education as a work in progress*. Common Sense in Mathematics Education, Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taiwan.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). Seen Through Other Eyes: Opening Up New Vistas in Realistic Mathematics Education Through Visions and Experiences from Other Countries. I M. van den Heuvel-Panhuizen (Red.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (1. utg.) (ICME-13 Monographs). Springer Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1

van Zanten, M. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2017). Past and current approaches to decimal numbers in Dutch primary school mathematics textbooks. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: Research in Nordic and Baltic countries* (s. 129-155). Cappelen Damm.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society:The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.