Arbeidsnotat

Differentiallikninger og vekstmodeller

Matematikk 2 Funksjonslære

Kyrre Johannesen

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Arbeidsnotat nr 217

Steinkjer 2007

HØGSKOLEN I NORD-TRØNDELAG

Differentiallikninger og vekstmodeller

Matematikk 2 Funksjonslære

Kyrre Johannesen

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Arbeidsnotat nr 217
Avdeling for sykepleier-, ingeniør- og lærerutdanning
ISBN 82-7456-498-7
ISSN 1501-6285
Steinkjer 2007

Innhold

1.1. Innledning

"Teorien om differensiallikninger
er den viktigste disiplinen
i den moderne matematikken."
Sophus Lie (1842-1899)

I arbeidet ditt med integrasjon, dreide en hel del problemer seg om det å bestemme en ukjent funksjon **y = f(x)** når den deriverte **y'(x)** var en kjent funksjon. I mange problemer er imidlertid **y'** ikke gitt som en funksjon av **x** alene, men også som et uttrykk der **y** selv inngår.
Innenfor enkelte områder av anvendt matematikk støter vi ofte på slike likninger som til løsning har en *funksjon* og ikke, som i "vanlige" likninger, tallverdier. I slike likninger inngår den ukjente funksjonen og dens deriverte (av en eller annen grad). Denne typen likninger kaller vi ***differensiallikninger***. Mens en "vanlig" algebraisk likning kan sies å uttrykke en relasjon mellom tallverdier, uttrykker en differensiallikning en sammenheng mellom en funksjon og dens deriverte. Å løse en differensiallikning vil derfor generelt si å finne alle de funksjoner som passer i likningen (hvis de finnes).
Hensikten med dette heftet er todelt: For det første å finne ut i hvilke sammenhenger denne type likninger oppstår og for det andre å finne hensiktsmessige metoder å løse dem på dersom de har løsninger.

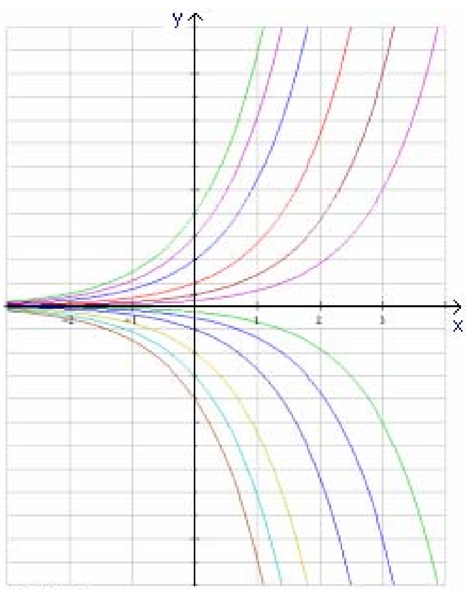


Fig.1.1.2

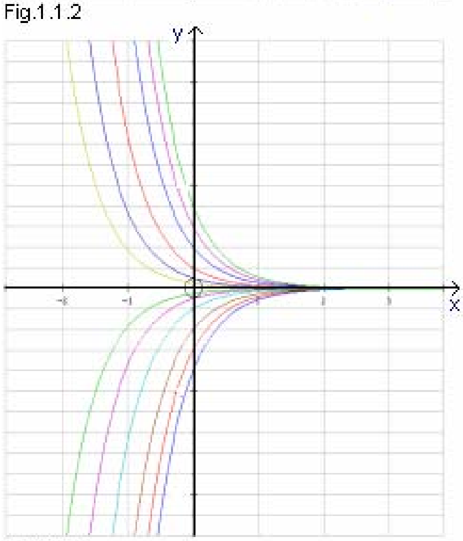


Fig.1.1.3

Eks.1.1.1 Likningen $\mathbf{y' = y}$ er en differensiallikning fordi en ukjent funksjon **y** og dens deriverte **y'** inngår i likningen. Dersom du tolker løsingen av likningen som å finne de funksjoner **y = f(x)** som har den egenskapen at funksjonen er lik sin egen derivert, så kjenner du allerede en løsning av denne likningen siden du vet at $(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x$.
Det viser seg at likningen $\mathbf{y' = y}$ har til løsning alle funksjoner på formen $\mathbf{y = C \cdot e^x}$ der **C** er en vilkårlig reell konstant. Vi merker oss altså at differensiallikningen generelt har ***uendelig mange løsninger***, en for hver verdi av konstanten **C**. En begrunnelse for at disse funksjonene er løsninger av likningen, er at $\mathbf{y = C \cdot e^x \Rightarrow y' = C \cdot e^x = y}$ så den angitte løsningen $\mathbf{y = C \cdot e^x}$ passer i differensiallikningen uansett verdi av konstanten **C**. Merk også at vi her **ikke** har vist at dette er de eneste løsningene av differensiallikningen. Grafene til løsningsfunksjonene for $\mathbf{C \in \{-4, -3, -2, -1, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4\}}$ er vist i fig.1.1.2. til venstre.

Eks.1.1.2 For differensiallikningen $\mathbf{y' = -2y}$ kan du på samme måte tolke løsingen av likningen som å finne de funksjoner **y = f(x)** som har den egenskapen at den deriverte av funksjonen er lik –2 ganget med funksjonen selv.
Det viser seg at likningen har til løsning alle funksjoner på formen $\mathbf{y = C \cdot e^{-2 \cdot x}}$ der **C** er en vilkårlig reell konstant.
Vi ser at $\mathbf{y = C \cdot e^{-2 \cdot x} \Rightarrow y' = -2 \cdot C \cdot e^x = -2 \cdot y}$ så den angitte løsningen $\mathbf{y = C \cdot e^{-2 \cdot x}}$ passer i differensiallikningen uansett verdi av konstanten **C**.
Grafene til løsningsfunksjonene for noen verdier av C mellom – 4 og 4 er vist i fig.1.1.3. til venstre.

Grafen til hver løsningsfunksjon i den generelle løsningen (for en bestemt verdi av C) kaller vi en ***integralkurve*** til differensial-likningen.

Oppg.1.1.4 Finn den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = k \cdot y$ der k er et reelt tall.

Vi skal i dette heftet studere flere praktiske sammenhenger som gir opphav til differensiallikninger som matematiske modeller. Siden den deriverte til en funksjon inngår i differensiallikninger, er det ikke overraskende at et stikkord for slike differensiallikningsmodeller vil være sammenhenger der **vekst**, eller mer presist **momentanvekst** for en størrelse inngår. Mer om dette etter noen innledende bemerkninger.

1.2 Noen viktige underliggende begrep

Vi tar nå opp et par viktige begrep du må forstå og beherske bruken av for å ha forutsetning for å forstå oppstilling og løsning av differensiallikninger. Det kan godt hende at flere begrep som benyttes i dette heftet ikke er familiære for deg. I så fall henviser vi til college algebra delen i første del av undervisningen, der grunnleggende begreper diskuteres og øves.

Proporsjonalitet

Fra behandlingen av elementære funksjoner, husker vi at en størrelse y er **proporsjonal** med x dersom forholdet $\frac{y}{x}$ er konstant for alle x, eller $\frac{y}{x} = k$ for en reell konstant k.
Dette betyr altså at en funksjon ***y = f(x) er en proporsjonalitet dersom*** $y = k \cdot x$ ***for en konstant*** $k \in \mathbb{R}$ ***for alle x.***
Du husker selvfølgelig at dette er en lineær funksjon, der proporsjonalitetskonstanten k er stigningstallet til funksjonen og der grafen går gjennom origo.

Eks.1.2.1 I likningen $y' = k \cdot y$ (se oppg.1.1.4.) sier at **den deriverte til funksjonen y er proporsjonal med funksjonen y selv.**

Differensialet til en funksjon

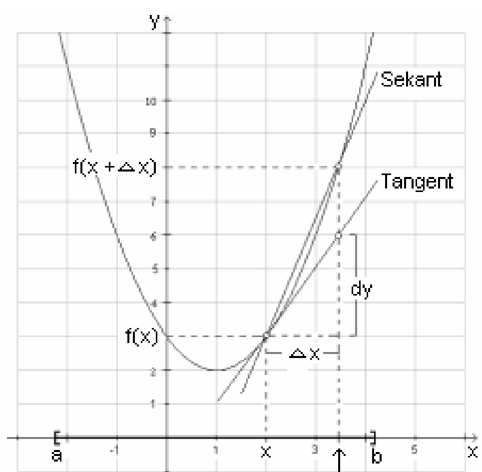


Fig.1.2.2

Før vi går i gang med å studere differensiallikninger, repeterer vi et begrep vi skal få mye bruk for i oppstilling og løsning av differensiallikninger, nemlig ***differensialet*** til en funksjon y = f(x).
Du bør gå grundig gjennom dette avsnittet for å ha et godt grunnlag for arbeidet med differensiallikninger.

Vi studerer en kontinuerlig funksjon **y = f(x),** deriverbar over et intervall $[a, b]$. (I fig. til venstre har vi en 2.gradsfunksjon som eks.) Velger vi en x-verdi i intervallet $[a, b]$ og gir x-verdien et lite tillegg Δx, endrer funksjonsverdien seg fra **f(x)** til $f(x + \Delta x)$.
Stigningstallet for sekanten gjennom punktene $(x, f(x))$ og $(x + \Delta x, f(x + \Delta))$ blir nå $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ og vi har at

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad [1]$$

Husk også at $f'(x)$ er stigningstallet for tangenten til grafen til f i punktet **(x, f(x)).**
Vi kaller nå ***differensialet*** til **y** for **dy** og lar **dy** være endringen i y-verdi for denne tangenten over intervallet Δx.

(Se fig.1.2.2) Da er stigningstallet for tangenten til f i punktet (x, f(x)) gitt ved $\frac{dy}{\Delta x}$. [**2**]

Dette gir oss to uttrykk ([**1**] og [**2**]) or tangentens stigningstall som må være like og vi får derfor $\frac{dy}{\Delta x} = f'(x)$.

(dvs. $f'(x)$ er stigningstallet for tangenten i (x, f(x)). Siden denne likningen gjelder for alle funksjoner **y = f(x)** gjelder den spesielt for funksjonen **y = x**. Innsatt i likningen $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, gir dette oss
$dx = f'(x) \cdot \Delta x = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, altså $dx = \Delta x$.

Setter vi dette inn i likningen $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, får vi: $dy = f'(x) \cdot dx$ **eller** $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Def.1.2.3 ***Differensialet*, dy, til en funksjon y = f(x) er** $\mathbf{dy = f'(x) \cdot dx}$ **eller** $\mathbf{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$

Merk at notasjonen her stemmer med skrivemåten vi tidligere innførte for den deriverte. Når vi heretter stiller opp og løser differensiallikninger skal vi ofte benytte skrivemåten $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ **for** $\mathbf{f'(x)}$. Dermed har vi nå fått en ny skrivemåte for den deriverte som forholdet mellom to differensialer: $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$.

Eks.1.2.4 a. $\mathbf{y = x^4 \text{ gir at } \frac{dy}{dx} = \left(x^4\right)' = 4x^3 \text{ eller } dy = 4x^3\,dx}$

b. $\mathbf{y = \left(x^2 + 3x^4\right)^2 \text{ gir at } \frac{dy}{dx} = \left[\left(x^2 + 3x^4\right)^2\right]' = 2 \cdot \left(x^2 + 3x^4\right) \cdot \left(2x + 12x^3\right)}$

eller $\mathbf{dy = \left(72x^7 + 36x^5 + 4x^3\right) dx}$

c. Da vi behandlet derivasjon, viste vi t hastigheten **v** er den deriverte av veien **s** med hensyn på tiden **t**, eller $\mathbf{\frac{ds}{dt} = v \text{ eller } ds = v\,dt}$.

Eks.1.2.5. Differensiallikningen $\mathbf{y' = y}$ kan nå skrives $\mathbf{\frac{dy}{dx} = y}$,

$\mathbf{y' = -2y}$ kan skrives $\mathbf{\frac{dy}{dx} = -2 \cdot y}$ og $\mathbf{y' = k \cdot y}$ som $\mathbf{\frac{dy}{dx} = k \cdot y}$.

Differensialregningen ble grunnlagt av den engelske fysiker og matematiker Isaac Newton (1642 – 1727) og den tyske matematiker Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716). Differensialet ble innført av Leibniz, mens Newton brukte betegnelsen $\bar{y}$ for den deriverte. Skrivemåten f '(x) stammer fra den franske matematikeren Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813).

1.3. Et eksempel på vekst

Vi skal utover i denne framstillingen komme tilbake til hvordan en kan gå fram for å bestemme løsningen til en gitt differensiallikning, men aller først vil vi prøve å legge meningsinnhold til slike likninger. Dette kan vi best gjøre ved å vise eksempler på hvordan differensiallikninger oppstår med utgangspunkt i praktiske sammenhenger. Stikkordene vil være *størrelse* og *forandring*.

Som et utgangspunkt kan vi si at differensiallikninger framkommer når utgangspunktet er en sammenheng mellom en størrelse og forandringen av denne størrelsen.

Differensiallikninger spiller en meget viktig rolle i naturvitenskapen og er nærmest av fundamental betydning i fysikken, idet de fleste såkalte naturlovene kan uttrykkes ved slike likninger.
Eksempler er:
- lovene for **planetbevegelse**,
- **elektromagnetismens** lover,
- **varmeledningsloven** osv.

Også innen økonomisk teori har differensiallikninger fått økende betydning. Økonomiske vekstmodeller er ofte formulert ved differensiallikninger.

Som et foreløpig eksempel, kan vi nevne at en i en rekke situasjoner i bl.a. fysikk, biologi og samfunnsvitenskapene ofte støter på sammenhenger som kort kan beskrives slik:

- *En størrelse y avhenger av tiden t slik at y antas å være en funksjon av t, y = y(t).*
- *Ved målinger eller på grunnlag av teoretiske betraktninger finner en ut at utviklingen foregår på en slik måte at den tilveksten funksjonen får pr. tidsenhet er proporsjonal med y(t).*
  M.a.o. er veksthastigheten til y med hensyn på tiden proporsjonal med y.
- *I tillegg er størrelsen y oftest kjent ved minst ett tidspunkt.*

Som konkrete eksempler på slike sammenhenger, kan vi tenke på y = y(t) som:

- Utviklingen av **antall individer i en folkegruppe**. [**Malthus' lov**]
- Mengden av en **radioaktivt** isotop i et stoff [Bevist eksperimentelt]
- **Verdien** av en skog som vokser [En rimelig antakelse om utviklingen av y(t)]

Problemet som i hvert enkelt tilfelle reiser seg, er da å finne funksjonen **y = f(t)**. Matematisk formulert blir dette :

Gitt at veksthastigheten til **y** m.h.p. tiden er proporsjonal med **y**, dvs. $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$ [**]
der $k \neq 0$ er en reell konstant og verdien y_0 til y i et tidspunkt $t = t_0$ er kjent, dvs. $y(t_0) = y_0$.
Finn funksjonen **y = y(t).**

Med samme resonnement som i oppg.1.1.4 ser vi enkelt at funksjonene $y(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$ der **C** og **k** er reelle konstanter ($k \neq 0$) passer i differensiallikningen i [**]. Vi kan også vise at det ikke finnes andre løsninger av likningen [**]. Vi sier derfor at $y(t) = C \cdot e^{k \cdot t} \quad , \quad C, k \in R$ er ***den generelle løsningen*** av differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$.

For å oppfylle kravet om at y skal ha verdien y_0 når $t = t_0$, må vi velge en spesiell verdi av konstanten **C**. Denne verdien finner vi ved å sette inn $y = y_0$ og $t = t_0$ i den generelle løsningen $y(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$ slik at vi får:

$$y(t_0) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot e^{k \cdot t_0} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C} = \frac{y_0}{e^{k \cdot t_0}} = y_0 \cdot \frac{1}{e^{k \cdot t_0}} = \underline{y_0 \cdot e^{-k \cdot t}}$$

Innsatt i løsningen $y(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$ gir dette: $\underline{y(t)} = y_0 \cdot e^{-k \cdot t_0} \cdot e^{k \cdot t} = y_0 \cdot e^{k \cdot t - k \cdot t_0} = \underline{y_0 \cdot e^{k \cdot (t - t_0)}}$.

Vi kan kontrollere at løsningen passer i likningen $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$ ved å derivere:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot (t - t_0)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(y_0 \cdot e^{k \cdot (t - t_0)} \right)' = k \cdot y_0 \cdot e^{k \cdot (t - t_0)} = k \cdot y \,.$$

Gitt at veksthastigheten til **y** med hensyn på tiden er proporsjonal med **y**, dvs. $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$ [**]
der $k \neq 0$ er en reell konstant og verdien y_0 til **y** i et tidspunkt $t = t_0$ er kjent, dvs. $y(t_0) = y_0$.
Da er $y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot (t - t_0)}$.

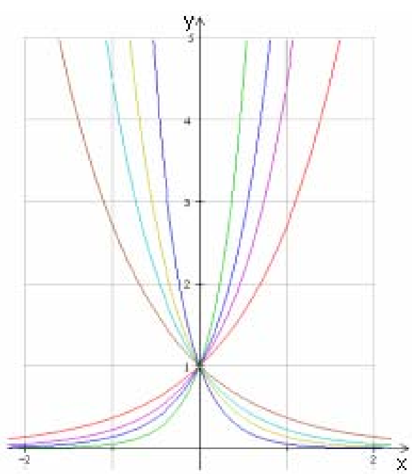


Fig.1.3.1

Denne *spesielle* løsningen $y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot (t - t_0)}$ er da den funksjonen vi er på jakt etter, fordi den passer inn i den oppgitte differensiallikningen og fordi den oppfyller $y(t_0) = y_0$.

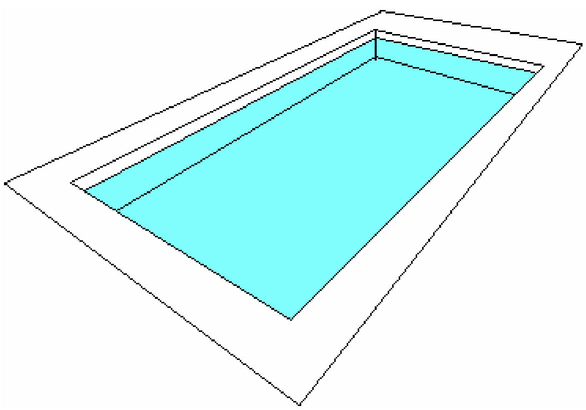
Forøvrig ser vi av denne løsningen at vi har ***eksponentiell vekst*** dersom **k > 0**, og ***eksponentiell nedgang*** dersom **k < 0**.
I figuren til venstre er grafene til løsningsfunksjonene for noen k-verdier (med $y_0 = 1$ **når** $t = 0$) tegnet.
Vi ser at for hvert valg av reell verdi for konstanten k, får vi en bestemt funksjon som løsning av differensiallikningen.
Løsningsmengden av de spesielle løsningene for differensial-likningen som oppfyller initial-betingelsen $y_0 = 1$ **når** $t = 0$, består altså av uendelig mange løsninger, en funksjon for hver verdi av konstanten k.
Vi ser at alle grafene på figuren går gjennom punktet (0,1) nettopp på grunn av at de alle skal oppfylle initial-betingelsen at $y_0 = 1$ **når** $t = 0$.

Setn.1.3.2 **Differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = k \cdot y(t)$ der k er en gitt konstant $\neq 0$, har den generelle løsningen $y(t) = Ce^{k \cdot t}$ der C er en vilkårlig reell konstant.**
Den spesielle løsningen som oppfyller kravet $y = y_0$ når $t = t_0$, blir $y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot (t - t_0)}$.

1.4 Eksempler på differensiallikninger som matematiske modeller

La oss se nærmere på ett par eksempler på en praktiske sammenheng der differensiallikninger kan brukes som matematisk modeller. Gå nøye gjennom eksemplet på egen hånd. Prøv selv etterpå å lage deg liknende eksempler og utvikle differensiallikninger fra kontekstene på samme måte.

Eks.1.4.1. Et eksempel på modellering ved hjelp av differensiallikninger: Basseng-temperatur



Tenk deg at du er eier av et luksushotell med et utendørs badeanlegg.. Vannet i bassenget holdes jevnt på $28^{\circ}\mathrm{C}$. Dessverre bryter bassengets varmeanlegg sammen 24 timer før badeforeningen "De glade badere" har bebudet sitt komme for å avholde sin årlige badefestival. Spørsmålet ditt blir nå om du skal avlyse evenementet (og derved tape inntekt), eller vil badetemperaturen fremdeles være akseptabel etter et døgn? Du trekker naturligvis et plastdekke over bassenget for å minske fordampingen, men lufttemperaturen er bare $12^{\circ}\mathrm{C}$, og værmeldingen har lovet at der vil den holde seg.
La oss prøve å finne svar på spørsmålet ditt ved å lage en *matematisk modell* basert på opplysningene dine.

Først noen variabelnavn:
- La **T(t)** stå for vanntemperaturen i bassenget ved tidspunkt **t**.
  Vi velger tidsskalaen slik at **t = 0** idet avkjølingen starter, altså **T(0) = 28**. ($^{\circ}\mathrm{C}$)
- Vi skal altså finne en funksjonsmodell for **T(t)** når $t \geq 0$,
  og spesielt beregne **T(24)** ifølge denne modellen.

Så noen refleksjoner omkring vannets avkjøling:
- Vannets avkjøling er avhengig av flere faktorer, så som:
  - Mengden vann i bassenget
  - Bassengets form
  - Bassengets og plastdekkets isolasjonsevne
  - Temperaturforskjellen mellom vannet og omgivelsene.
    Denne blir **T(t) – 12** ($^{\circ}\mathrm{C}$)
- Vannets avkjøling vil skje raskest i begynnelsen, når temperaturforskjellen er stor, og vil skje saktere etter hvert som vanntemperaturen **T(t)** avtar.
  Isaac Newtons *avkjølingslov* sier at:
  - *Avkjølingshastigheten* er proporsjonal med temperaturforskjellen,
    dvs. at *Avkjølingshastigheten* = $k \cdot (T(t) - 12)$ for en eller annen konstant k.
    Faktorene nevnt ovenfor vil virke inn på størrelsen på konstanten k.
    La oss foreløpig anta at for ditt basseng er $k = \frac{1}{24}$
    slik at *Avkjølingshastigheten* = $\frac{1}{24} \cdot (T(t) - 12)$.
  - Vi vet at *avkjølingshastigheten* = den momentane endringen i vannets temperatur T(t), dvs. *avkjølingshastigheten* = **T '(t)**.
  - Vi må passe på fortegnet til proposjonalitetskonstanten k:
    Vi vet at **T(t)** avtar, så **T '(t)** er negativ. Dette må bety at

$$T'(t) = -\frac{1}{24} \cdot (T(t) - 12).$$

Siden både funksjonen T(t) og dens deriverte T ’(t) inngår i likningen, ser vi nå at vi har fått en *modell* for utviklingen i vanntemperaturen i form av en *differensiallikning*:

$\mathbf{T'(t) = -\frac{1}{24}\cdot\left(T(t)-12\right)}$, der $\mathbf{t \geq 0}$ og **T(0) = 28**. [1]

Når vi har funnet løsningen for denne differensiallikningen, dvs. funnet den funksjonen **T(t)**
som løser likningen under betingelsen **T(0) = 28,**
kan vi beregne **T(24)** og løse ditt problem.
[1] er altså en modell for avkjølingen av badevannet.
Med andre verdier for proporsjonalitetskonstanten k, kan [1] være en modell for andre avkjølingsprosesser som følger Newtons avkjølingslov, for eksempel i støperibedrifter, atomreaktorer, kjøleskap osv.
Modellen [1] kan også brukes som modell for kalde stoff som settes til oppvarming i varmere omgivelser, f.eks. brenning av keramikk eller porselen eller temperering av kjellerkald rødvin.
Prøv å forklare hvorfor dette er tilfellet.

Vi skal studer modellen vår nærmere og besvare ditt spørsmål om badetemperaturen senere, men la oss først se på løsningen av differensiallikningen vår.

Det viser seg at vi får den generelle løsningen $\mathbf{T = 12 + C\cdot e^{-\frac{1}{24}t}}$, $\mathbf{C \in R}$

Siden **T(0) = 28**, har vi at $\mathbf{28 = 12 + C\cdot e^{-\frac{1}{24}\cdot 0}}$ **eller** $\mathbf{28 = 12 + C}$ **dvs.** $\mathbf{C = 16}$.

Da blir funksjonsløsningen vår at $\mathbf{T(t) = 12 + 16\cdot e^{-\frac{1}{24}t}}$ for hvert tidspunkt $\mathbf{t \geq 0}$.

Spesielt får vi at $\mathbf{T(24) = 12 + 16\cdot e^{-\frac{1}{24}\cdot 24} = 12 + 16\frac{1}{e} \approx 17{,}9 \quad ({}^{o}C)}$.

Eks.1.4.2 Radioaktiv stråling

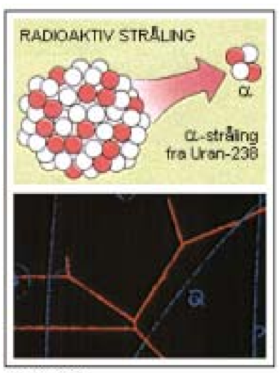


Fig.1.4.3.

Typisk for såkalte radioaktive stoffer er at de i en viss forstand er ustabile ved at atomkjernene i stoffet mister noen av sine partikler. Fenomenet kalles **radioaktiv stråling**. I fig.1.4.2 til venstre illustreres α – stråling fra Uran-238.

Tid	Mengde
0	1000
1	980
2	960,4
3	941,19
4	922,37
5	903,92
osv.	

La oss anta at et gitt radioaktivt stoff mister 2 % av sin masse per sekund og at stoffet
opprinnelig var på 1000 gram. Tabellen viser hvordan massen avtar ettersom strålingen pågår.
La oss beskrive denne prosessen matematisk:
Vi lar $\mathbf{M(t)}$ bety massen av det radioaktive stoffet ved tidspunkt **t**,
og ser på utviklingen innenfor et tidsintervall $\mathbf{[t, t+\Delta t]}$.
Massetapet i løpet av ett sekund er 2 %, slik at massetapet i løpet av $\mathbf{\Delta t}$ sekunder vil være $\mathbf{0{,}02\cdot\Delta t\cdot M(t)}$. Vi har da at:

Etter **t** sekunder er massen av det radioaktive stoffet : $\mathbf{M(t)}$

Etter $\mathbf{t+\Delta t}$ sekunder er massen : $\mathbf{M(t+\Delta t) = M(t) - 0{,}02\cdot\Delta t\cdot M(t)}$

Dette kan vi skrive : $\mathbf{M(t+\Delta t) - M(t) = -\,0{,}02\cdot\Delta t\cdot M(t)}$

Dividerer vi med $\mathbf{\Delta t}$ (så lenge $\mathbf{\Delta t > 0}$), får vi : $\mathbf{\frac{M(t+\Delta t)-M(t)}{\Delta t} = -\,0{,}02\cdot M(t)}$

Lat vi nå $\mathbf{\Delta t \to 0}$, ser vi at venstresiden nettopp

gir oss den **deriverte** av **M(t)** : $\mathbf{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M(t+\Delta t)-M(t)}{\Delta t} = -\,0{,}02\cdot M(t)}$

altså : $\mathbf{\frac{dM}{dt} = -\,0{,}02\cdot M(t)}$

Denne likningen er også en **differensiallikning** fordi funksjonen **M(t)** og dens deriverte **M’(t)** inngår i likningen.

Eks.1.4.4. Populasjonsvekst


Fig.1.4.5.

La N = N(t) stå for antall individer i en dyrepopulasjon t år etter starten av tellingen. Vi kan anta at andelen individer i populasjonen som kan reprodusere seg er konstant og at evnen til å reprodusere (fertiliteten) er konstant. I så fall kan en anta att **fødselsraten proporsjonal med antall individer N(t)** i populasjonen.

Etter t år er antall individer i populasjonen : $\mathbf{N(t)}$

I løpet av tidsintervallet $[\mathbf{t}, \mathbf{t}+\Delta\mathbf{t}]$ er økningen : $\mathbf{N(t+\Delta t) - N(t)}$

Divisjon med $\Delta\mathbf{t}$ og antagelsen ovenfor, gir oss:

$$\frac{\mathbf{N(t+\Delta t) - N(t)}}{\Delta \mathbf{t}} = \mathbf{k \cdot N(t)}$$

Lar vi nå $\Delta\mathbf{t} \to \mathbf{0}$ får vi: $\dfrac{\mathbf{dN}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{k \cdot N(t)}$

Dette er igjen en differensiallikning i **N**, siden både funksjonen **N(t)** og dens deriverte $\dfrac{\mathbf{dN}}{\mathbf{dt}}$ inngår i likningen.

Vi skal i avsnitt 2.2 vise at den generelle løsningen til denne differensiallikningen er $\mathbf{N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}}$.

Vi kan sjekke at løsningen passer i likningen ved å derivere: $\dfrac{\mathbf{dN}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{C \cdot k \cdot e^{k\cdot t}} = \mathbf{k \cdot \left(C \cdot e^{k \cdot t}\right)} = \mathbf{k \cdot N(t)}$.

Eks.1.4.6. Et vannsystem

Betrakt et system bestående av et kar med vann. Karet får kontinuerlig tilførsel av vann utenfra gjennom en kran, og avgir samtidig vann til omgivelsene gjennom et hull i bunnen.
En praktisk sammenheng som passer her kan f.eks. være et basseng på en skole, eller et vannreservoar med pumpetilførsel og utstrømning fra tanken til abonnentene.

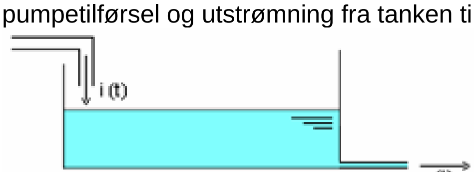


Fig.1.4.7.

① Vi setter først **variabelnavn** på en del størrelser for å bedre oversikten og lette resonnementet:
i(t) = Innstrømmningshastigheten (innstrømmingsraten) dvs. den vannmengde som pr. tidsenhet strømmer inn i karet.

u(t) = Utstrømmingshastigheten dvs. den vannmengde som pr. tidsenhet strømmer ut av karet.
V(t) = vannmengden i karet ved tiden **t**. (F.eks. kan vi la vannmengden måles i liter og tiden i minutter.)

② Så gjør vi noen **antakelser** dvs. vi ønsker å finne **V** under følgende betingelser:
- Vann strømmer inn i karet med en hastighet som hele tiden er konstant lik **r** liter / min, dvs. **i(t) = r**.
- Vann *strømmer ut av karet med en hastighet som til enhver tid er proporsjonal med den vannmengden som er i karet på det tidspunktet*, dvs. $\mathbf{u(t) = k \cdot V(t)}$, der **k** er en positiv konstant. (se avsn.1.2)
- Vannvolumet er kjent ved tiden **t = 0**. Vi setter $\mathbf{V(0)} = \mathbf{V_0}$.

③ De to første betingelsene leder oss til en **differensiallikning** i **V**. La oss se nærmere på det.
For det første, hva kan vi si om endringen $\Delta\mathbf{V}$ av vannmengden i karet over et endelig tidsrom $[\mathbf{t}, \mathbf{t}+\Delta\mathbf{t}]$?
- Siden $\mathbf{V(t)}$ = vannmengden i karet ved tidspunktet **t**, og $\mathbf{V(t+\Delta t)}$ = vannmengden i karet ved tidspunktet $[\mathbf{t}, \mathbf{t}+\Delta\mathbf{t}]$, blir $\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V(t+\Delta t) - V(t)}$.

④ Vi kan så sette opp et **regnskap over tilført vannmengde og avgitt vannmengde** i tidsintervallet $[\mathbf{t}, \mathbf{t}+\Delta\mathbf{t}]$ og finne et uttrykk for $\Delta\mathbf{V}$.
- Tilført vannmengde i tidsintervallet $[\mathbf{t}, \mathbf{t}+\Delta\mathbf{t}]$: $\mathbf{r \cdot \Delta t}$ liter
- Avgitt vannmengde i tidsintervallet $[\mathbf{t}, \mathbf{t}+\Delta\mathbf{t}]$: $\mathbf{k \cdot V(t) \cdot \Delta t}$ liter
- Vi har nå at : $\Delta\mathbf{V}$ = tilført vannmengde - avgitt vannmengde

  Eller : $\Delta\mathbf{V} = \mathbf{r \cdot \Delta t - k \cdot V(t) \cdot \Delta t = \Delta t \cdot \left(r - k \cdot V(t)\right)}$

  Dividerer vi med $\Delta\mathbf{t}$ får vi : $\dfrac{\Delta\mathbf{V}}{\Delta\mathbf{t}} = \mathbf{r - k \cdot V(t)}$

Eller : $\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} = r - k\cdot V(t)$

⑤ Lar vi nå $\Delta t \to 0$ får vi : $\frac{dV}{dt} = r - k\cdot V(t)$ eller $\frac{dV}{dt} + k\cdot V(t) = r$

Dette er en **differensiallikning** i V, siden den inneholder funksjonen **V = V(t)** og dens deriverte $\frac{dV}{dt}$.

I eks.3.1.17 viser vi hvordan vi kan løse denne likningen.

Dersom vi tenker på endringen i eks.1.4.1 som negativ vekst viser alle disse tre eksemplene, at det som et utgangspunkt ofte være nyttig å tenke på den ukjente funksjonen y = f(t) i en differensiallikning som en størrelse som endrer seg med tiden t og y' = f '(t) *veksthastigheten* eller momentanendringen *til* funksjonen y.
Nå kan vi spørre oss:
Hvilke funksjoner har **nullvekst**? (dvs. hva er y = f(x) når y' = 0?)
Hvilke funksjoner har **konstant veksthastighet** lik k (for et reelt tall k)? (dvs. hva er y når y ' = k?)
Hvilke funksjoner har veksthastighet lik x? (dvs. hva er y når y ' = x?)
Hvilke funksjoner har **lineær veksthastighet** lik ax + b? (dvs. hva er y når y ' = x + b?)
Hvilke funksjoner har veksthastighet lik g(x) (der g(x) er en polynom-funksjon)
(dvs. hva er y når y' = $a_n \cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_1\cdot x + a_0$?)

I øvingsoppgavene nedenfor skal du prøve å finne svarene på disse spørsmålene. Det kan være en fordel å repetere og ha ved siden av seg notatene fra arbeidet med **integrasjon** og integrasjonsmetoder når du løser oppgavene. Du bør også i hvert enkelt tilfelle kontrollere løsningen du finner ved å derivere og sjekke om løsningen passer i differensiallikningen.

Oppgaver til avsnitt 1.4.

Oppg.1.4.8 Finn ut hvilke funksjoner som *har **nullvekst***, dvs. løs differensiallikningen **y' = 0**.
Oppg.1.4.9 Finn ut hvilke funksjoner som *har **konstant veksthastighet*** k (for et reelt tall k), dvs. løs differensiallikningen **y' = k**, der $k \neq 0$ er et reelt tall.
Oppg.1.4.10 Finn ut hvilke funksjoner som *har **veksthastighet** lik x*, dvs. løs differensiallikningen **y' = x**.
Oppg.1.4.11 Finn ut hvilke funksjoner som *har **veksthastighet** lik kx*, dvs. løs differensiallikningen **y' = kx** der k er en reell konstant $\neq 0$.
Oppg.1.4.12 Finn ut hvilke funksjoner som *har **veksthastighet** lik g(x)* (der g(x) er en polynom-funksjon), dvs. løs differensiallikningen y' = $a_n \cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_1\cdot x + a_0$
når $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ alle er reelle tall.

Det er en nær forbindelse mellom **integrasjon** og løsninger av differensiallikninger. I neste avsnitt utdyper vi hva denne forbindelsen er og gir noen eksempler.

1.5 Integrasjon og løsing av elementære differensiallikninger

La oss først se på løsningen av differensiallikningen $y' = g(x)$, der g er en funksjon som er kontinuerlig i et intervall $I = [a,b]$. Du vet fra tidligere da du arbeidet med integrasjon at dersom y er en kontinuerlig funksjon i intervallet $I = [a,b]$, holder at: $y' = g(x) \;\Rightarrow\; y = \int g(x)\,dx$ for alle $x \in I$.
Den generelle løsningen av dette problemet er $y = G(x) + C$ når **G(x)** er en antiderivert til **g(x)**. ($G'(x) = g(x)$).
Med differensialnotasjon kan vi skrive likningen som $\frac{dy}{dx} = g(x)$ og siden begge er funksjoner av x kan vi integrere med hensyn på x på begge sider i likningen: (etter hvert skal vi sløyfe noe av mellomregningen her.)

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; \int dy = \int g(x)\,dx$$
$$\Leftrightarrow\; y + C_1 = \int g(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; y = \int g(x)\,dx - C_1$$
$$\Leftrightarrow\; y = \int g(x)\,dx + C \;\Leftrightarrow\; y = G(x) + C \;,\; \text{der } C = -C_1 \in R \text{ og } G'(x) = g(x).$$

Kontroll av løsningen: $y = G(x) + C \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = G'(x) + 0 = G'(x) = g(x)$

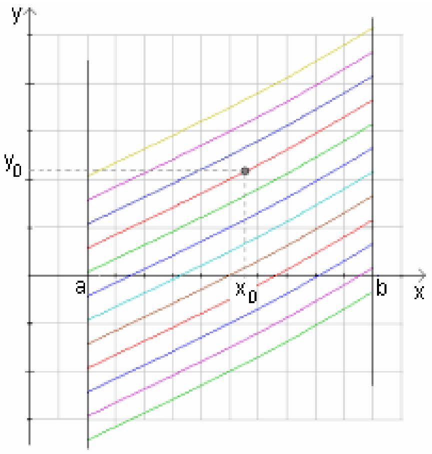


Fig.1.5.1.

Vi legger merke til at vi får uendelig mange løsninger av differensial-likningen, en løsning for hver reelle verdi av konstanten **C**.
Grafene til hver av disse løsningsfunksjonene, **integralkurvene** til differensiallikningen $\mathbf{y' = g(x)}$ kan f.eks. se ut som i fig.1.5.1 til venstre.
La oss se på området **A** i planet som består av alle punkter **(x, y)** der $\mathbf{x \in I = [a,b]}$, dvs. $\mathbf{A = \{(x,y| \; x \in I\}}$
Til ethvert punkt $\mathbf{(x_0, y_0)}$ i området **A** vil $\mathbf{y = G(x) + C}$ gå gjennom punktet $\mathbf{(x_0, y_0)}$ dersom $\mathbf{y_0 = G(x_0) + C}$ dvs. dersom vi velger konstanten **C** lik $\mathbf{y_0 - G(x_0)}$.
Vi får alle de andre integralkurvene ved å parallellforskyve en av dem parallelt med **y**-aksen. (dette svarer til å addere en verdi av **C** til funksjonsverdien, $\mathbf{y = G(x) + C}$.

Setn.1.5.2 **Den generelle løsningen til differensiallikningen** $\mathbf{\frac{dy}{dx} = g(x)}$ **der g er kontinuerlig i** $\mathbf{I = [a,b]}$, **er** $\mathbf{y = G(x) + C}$ **der** $\mathbf{G'(x) = g(x)}$ **og** $\mathbf{C \in R}$**.**

Eks.1.5.3 Anta f.eks. vi vet om en funksjon **y** at $\mathbf{y' = 2x + 3}$. Differensiallikningen er altså i dette tilfellet $\mathbf{\frac{dy}{dx} = 2x + 3}$. Den antideriverte til funksjonen $\mathbf{g(x) = 2x + 3}$ er $\mathbf{G(x) = x^2 + 3x}$

Dermed blir løsningen av differensiallikningen $\mathbf{\frac{dy}{dx} = 2x + 3}$ gitt ved $\mathbf{y = x^2 + 3x + C \; , \; C \in R}$

Eks.1.5.4 Anta $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + x}$ når **x > 0**. Her er $\mathbf{g(x) = \frac{1}{x} + x}$ og den antideriverte til **g**

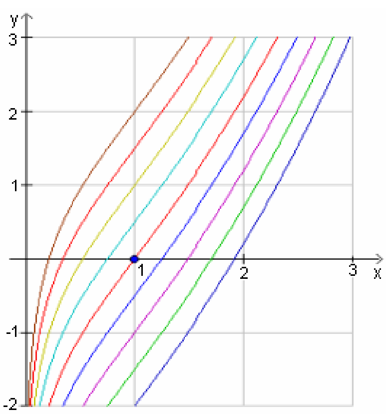


Fig.1.5.5

er $\mathbf{G(x) = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C \; , \; C \in R}$.

Dermed får vi at

$$\mathbf{y' = \frac{1}{x} + x \;\Rightarrow\; y = \int\left(\frac{1}{x} + x\right)dx = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C \; , \; C \in R}$$

Løsningen av differensiallikningen $\mathbf{y' = \frac{1}{x} + x}$ er altså

$$\mathbf{y = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C \; , \; C \in R}$$

Siden vi her har forutsatt at **x > 0**, blir den generelle løsningen:

$$\mathbf{y = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C.}$$

Vi kan også bruke differensial-notasjon og tenke slik:

Likningen $\mathbf{y' = \frac{1}{x} + x}$ kan skrives $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} + x\right)}$ eller alternativt $\mathbf{dy = \left(\frac{1}{x} + x\right)dx}$.

Integrerer vi på begge sider i likningen, får vi:

$$\mathbf{\int dy = \int\left(\frac{1}{x} + x\right)dx \;\Leftrightarrow\; y + C_1 = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C_2 \;\Leftrightarrow\; y = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C \; , \; C = C_2 - C_1 \in R}$$

Siden x > 0 blir altså den generelle løsningen: $\mathbf{y = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C.}$

Skal vi f.eks. finne den integralkurven som går gjennom punktet (1,0), må vi ha at

$$\mathbf{0 = \ln 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + C \text{ dvs. } C = -\frac{1}{2}}.$$

Da blir denne spesielle løsningen

$y=\ln x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ med grafe som vist i fig.1.5.5 på forrige side.

På figuren har vi også tegnet inn integral-kurvene for noen andre verdier av C. (Finn ut hvilke.)
Vi ser at vi får en uendelig skare av kurver, en for hver reelle verdi av C.

Eks.1.5.6 a. Bestem den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = e^{-2\cdot x}$.

b. Bestem den spesielle løsningen som går gjennom punktet **(0,1)** og tegn grafen for løsn.

Løsning: a. $y' = e^{-2\cdot x}$ kan skrives $\frac{dy}{dx} = e^{-2x}$ eller $dy = e^{-2x}\,dx$ som vi kan integrere:

$$dy = e^{-2x}\,dx \;\Rightarrow\; \int dy = \int e^{-2x}dx \;\Rightarrow\; \underline{y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C \;,\; C \in R}$$ som er den gen. løsn.

b. At **(0,1)** ligger på grafen til y betyr at $1 = -\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0} + C$ som gir $C = \frac{3}{2}$ og da blir

den spesielle løsningen $\underline{y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}}$

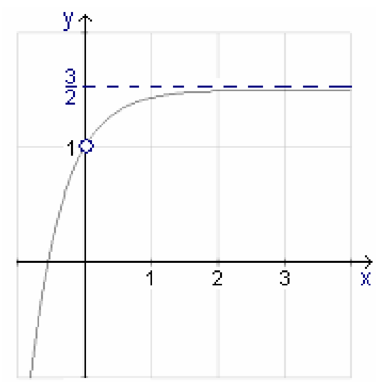


Fig.1.5.7

c. Grafen til løsningsfunksjonen blir som vist i fig.1.5.7.
Vi ser at:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^{2x}} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

slik at y = 1,5 er en horisontal asymptote for y. (se fig.1.5.7)

Oppgaver til avsnitt 1.5

Oppg.1.5.8 Bestem den generelle løsningen til differensiallikningen **y' = g(x)** når **g(x)** er:

a. $g(x) = \frac{1}{x} \;,\; D_g = R$ b. $g(x) = \frac{1}{x^n} \;(n \in N) \;,\; D_g = R.$

Oppg.1.5.9 Bestem den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = \frac{4x}{x^2+1}$ i hele R.

Bestem også den spesielle løsningen som går gjennom punktet **(0,1)** og tegn grafen til denne løsningen.

Oppg.1.5.10 Bestem den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = \frac{x-1}{x+2}$ i hele R.

Oppg.1.5.11 Bestem den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = \sin x + \cos x$ i $[0, 2\pi\rangle$.

Bestem også den spesielle løsningen som går gjennom punktet $(\pi, 1)$ og tegn grafen til denne løsningen.

Oppg.1.5.12 Bestem den generelle løsningen til flg. differensiallikninger:

a. $y' = \frac{1}{2x+1}$ b. $y' = e^{-x}$

c. $y' = x \cdot e^{-x^2}$ d. $y' = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$

e. $y' = x\sqrt{1-x}$ f. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

g. $y' = x^2 \cdot e^{-x}$

Oppg.1.5.13 Bestem den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = \ln x$ i området **x > 0**.

Oppg.1.5.14 a. Eks. **06.06.97.** nr. **5.a.1.**
b. Eks. **15.12.98**. nr. **4.a.**

1.6. Løsing av differensiallikningen y ’ = ky

Hittil har vi kun sett på differensiallikninger der kun **y’** og en funksjon av **x** inngår. Vi kan også tenke oss differensiallikninger der det i tillegg til y’ inngår uttrykk der y inngår. Vi kan benevne slike differensiallikninger som **y’ = f(y)**. I dette avsnittet ser vi på differensiallikninger på denne formen der **f(y)** er enkle funksjoner av **y**.
Et eksempel er differensial-likningen $y' - 2y = 0$ som vi kan skrive $y' = 2y$. Her er **f(y) = 2y**.
Et annet eksempel er $y' = k \cdot y \;,\; k \in R$. Denne differensiallikningen behandles grundig i neste avsnitt.

Eks.1.6.1. La oss se nærmere på differensiallikningen **y’ = 2y** fra avsnitt 1.1.
Med differensial-notasjon, får vi $\dfrac{dy}{dx} = 2 \cdot y$ eller $dy = 2 \cdot y \; dx$
Så lenge $y \neq 0$ kan vi dividere likningen med **y** for å samle alle ledd tilhørende funksjonen **y** på venstre side av likningen og resten på høyre side av likningen og får $\dfrac{1}{2 \cdot y}\dfrac{dy}{dx} = 1$ **når** $y \neq 0$.
Merk at vi ved innsetting ser at y = 0 også er en løsning av differensiallikningen **y’ = 2y**.
Integrerer vi begge sidene i likningen, får vi $\int \dfrac{1}{2y}\dfrac{dy}{dx}\,dx = \int 1\,dx$ eller $\int \dfrac{dy}{2y} = \int 1\,dx$
Ved elementære integrasjonsteknikker, får vi
$\int \dfrac{dy}{2 \cdot y} = \dfrac{1}{2}\int y\,dy = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\ln|y| + C_1\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\ln|y| + C_2 \;,\; \text{der } C_2 = \dfrac{1}{2}\cdot C_1 \in R$ og
$\int 1\,dx = x + C_3 \;,\; \text{der } C_3 \in R$.
Vi har da løsningen av differensiallikningen $\dfrac{dy}{dx} = 2 \cdot y$ gitt ved:

$$\frac{1}{2}\cdot\ln|y| + C_2 = x + C_3 \;,\; \text{der } C_2, C_3 \in R.$$

I denne likningen ser vi at den ukjente funksjonen **y** er gitt ***implisitt*** (dvs. at **y** inngår i funksjonen $\ln|y|$), og vi må løse den logaritmiske likningen med hensyn på y for å finne funksjonen:

$$\frac{1}{2}\cdot\ln|y| + C_2 = x + C_3 \Leftrightarrow \ln|y| = 2\cdot x + C_4 \;,\; \text{der } C_4 = 2\cdot(C_3 - C_2) \in R$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{2\cdot x + C_4} = e^{C_4}\cdot e^{2x} = C_5 \cdot e^{2x} \;,\; \text{der } C_5 = e^{C_4} \in R.$$
$$\Leftrightarrow |y| = C_5 \cdot e^{2x} \;,\; C_5 \in R$$

Siden $|y| = \begin{cases} y & \text{når } y \geq 0 \\ -y & \text{når } y < 0 \end{cases}$ får vi egentlig å løse <u>to</u> likninger, nemlig $y = \pm C_5 \cdot e^{2x}$, men siden $\pm C_5$ begge er nye reelle konstanter **C**, kan hele løsningen (løsningsmengden) sammenfattes som $y = C \cdot e^{2\cdot x} \;,\; C \in R$
Løsningsmetoden her er selvsagt ikke avhengig av at vi har konstanten 2 på høyresiden i differensiallikningen. Det er nokså opplagt at differensiallikningen $y' = k \cdot y \;,\; k \in R$ kan løses på samme måte.
I avsnitt 3.1 finner vi en modell for populasjonsvekst der en slik sammenheng gjelder.

Eks.1.6.2 Om en størrelse **y = f(t)** vet vi at veksthastigheten til **y** vokser proporsjonal med **y**.
a. Forklar at $y' = k \cdot y$ (der **k** er et positivt tall) nettopp beskriver at endringen i y er proporsjonal med y selv.

b. 1) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen.
2) Anta at når **t = 0** er **y(t) = 100**, dvs. at **y = y(0) = 100**.
Vis at dette gir den spesielle løsningen $\mathbf{y = 100 \cdot e^{k\cdot t}}$.

c. Finn et funksjonsuttrykk for y dersom du vet at **y = 200** når **t = 5**.

Løsning: a. At størrelsen y' (dvs. veksthastigheten i y) er proporsjonal med y selv, må bety at $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$ for en eller annen **positiv** reell konstant **k**. (se avsnitt 1.2)

b.1. Vi finner først den generelle løsningen av denne differensiallikningen ved først å skrive den på differensialformen $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$ eller $dy = k \cdot y\ dt$.
Deretter samler vi alle **y**-ledd på venstre side og resten til høyre og får $\frac{dy}{y} = k\ dt$. Deretter integrerer vi begge sidene i likningen $\int \frac{dy}{y} = \int k\ dt$.

Fra arbeidet med integrasjon, vet vi at $\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_1$ for en reell konstant $C_1 \in \mathbf{R}$ og $\int k\ dt = k \cdot t + C_2$ for en reell konstant $C_2 \in \mathbf{R}$.
Dermed finner vi at løsningen av differensiallikningen er gitt ved
$\ln|y| + C_1 = k \cdot t + C_2 \quad , C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ eller $\ln|y| = k \cdot t + C_3 \quad , C_3 \in \mathbf{R}$

Igjen ser vi altså at funksjonen **y** finnes **implisitt** i likninga $\ln|y| = k \cdot t + C$ som vi må løse for å finne **y**. Vi har at

$$\ln|y| = k \cdot t + C_3 \iff e^{\ln|y|} = e^{k\cdot t + C_3} \iff |y| = e^{C_3} \cdot e^{k\cdot t} = C_4 \cdot e^{k \cdot t}, C_4 \in \mathbf{R}$$
$$\iff y = \pm C_4 \cdot e^{k\cdot t}, C_4 \in \mathbf{R} \iff y = C \cdot e^{k\cdot t} \quad , \quad C \in \mathbf{R}.$$

Den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = k \cdot y$ er derfor $y = C \cdot e^{k\cdot t}, C \in \mathbf{R}$.

b.2. Vi har at $y(0) = 100 \iff C \cdot e^{k\cdot 0} = 100 \iff C \cdot e^{0} = 100 \iff C = 100$
Innsatt i den generelle løsningen, får vi $y = 100 \cdot e^{k\cdot t}$.

c. At $y(5) = 200$ betyr at $100 \cdot e^{k\cdot 5} = 200$ dvs. at $e^{5k} = 2$
Her er konstanten k gitt implisitt i likningen og vi må løse k av den.

$$e^{5k} = 2 \iff \ln\left(e^{5k}\right) = \ln 2 \iff 5k = \ln 2 \iff k = \frac{1}{5} \cdot \ln 2 = \ln\left(2^{\frac{1}{5}}\right)$$

Setter vi denne k-verdien inn i den spesielle løsningen ovenfor, får vi:

$$y = 100 \cdot e^{k\cdot t} = 100 \cdot e^{\ln\left(2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot t} = 100 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{5}} = 100 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$$

Løsningen til differensiallikningen $y' = k \cdot y$ med betingelsene **y(0) = 100** og **y(5) = 200**, er altså $y = 100 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$.

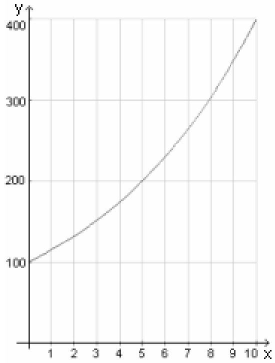


Fig.1.6.3

Grafen til løsningsfunksjonen er vist i fig.1.6.3.
Vi ser av grafen til denne løsningsfunksjonen, at modellen har sine klare begrensninger dersom den skal være en modell for en populasjonsutvikling ved at den vokser og blir uendelig stor med tiden.
Dette gjør at funksjonen bare kan være en modell som passer innenfor en begrenset periode for en populasjonsutvikling. Mer om dette i avsnitt 3.1.
Den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = k \cdot y$ er altså på formen $y = C \cdot e^{k\cdot t}, C \in \mathbf{R}$.
Når vi krever at løsningsfunksjonen skal oppfylle spesielle betingelser, kan vi finne en spesiell løsning for differensiallikningen.

I vårt eksempel var disse betingelsene at **y(0) = 100** og **y(5) = 200**, og den spesielle løsningen ble $y = 100 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$.

Setn.1.6.4 Differensiallikningen $y' = k \cdot y$, $k \in R$ har den generelle løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot x}$, $C \in R$

I oppgavene nedenfor er tankegangen at du skal derivere kjente funksjoner og deretter bruke dette til å finne differensiallikninger som disse kjente funksjonene passer som løsning av.

Oppgaver til avsnitt 1.6

Oppg.1.6.5 Bestem den generelle løsningen til differensiallikningene nedenfor:

a. $y' = \frac{1}{2} \cdot y$ b. $y' = 4 \cdot y$ c. $y' = -2 \cdot y$

d. $y' = \sqrt{y}$

Oppg.1.6.6
a. La $y = e^x$. Bestem **y'**.
b. Forklar at differensiallikningen **y' = y** kan brukes for å uttrykke at veksthastigheten til funksjonen **y** er nøyaktig lik **y** selv?
c. Vis at $y = e^x$ passer som løsning til differensiallikningen **y' = y**.

Til slutt i dette avsnittet noen spesielle øvingsoppgaver blant annet med differensiallikninger av grad 2.

Oppg.1.6.7 La $y = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ der C_1 og C_2 er konstanter. Finn y'' og vis at funksjonen **y** passer i likningen $y'' + y = 0$ for alle **t**.
Likningen $y'' + y = 0$ er en differensiallikning av **grad 2** siden den dobbeltderiverte av **y** forkommer i likningen.

Oppg.1.6.8 La $y = C_1 \cdot \sin \lambda t + C_2 \cdot \cos \lambda t$ der C_1 og C_2 er reelle konstanter og λ er en gitt konstant. Finn y'' og finn så en differensiallikning slik at funksjonen **y** passer i denne likningen for alle **t**.

Oppg.1.6.9 La $y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}$ der C_1 og C_2 er konstanter og λ er en gitt konstant. Bestem y'' og finn en differensiallikning slik at funksjonen **y** passer i denne likningen for alle **t**.

Oppg.1.6.10 Hvilke funksjoner **y = y(x)** definert for alle **x**, er slik at $y'' = 0$?

Oppg.1.6.11 Gitt kurveskaren **y = ax +1**. (En funksjonsgrafe for hver verdi av **a**.) Lag en differensiallikning der samtlige av disse funksjonene passer i differensiallikningen for alle **x**.

Oppg.1.6.12 Gitt kurveskaren $y = C \cdot x^2$ der **x > 0**. Skisser kurven for forskjellige verdier av parameteren **C**.
Vis at den løsningskurven som går gjennom punktet $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ har likning $y = 4x^2$.
Lag en differensiallikning der $y = 4 \cdot x^2$ er en løsning.

2.1. Separable differensiallikninger

Vi har sett at løsningsteknikken I eks.1.6.1 og eks. 1.6.2 har det til felles at vi I begge tilfeller samlet alle ledd med y' og alle ledd med y til venstre i likningen og resten til høyre, og deretter brukte elementære integrasjonsteknikker for å løse differensiallikningen. Denne metoden kan naturligvis alltid benyttes dersom differensiallikningen kan skrives på formen $\mathbf{h(y)\cdot y' = g(x)}$ dvs. at venstresiden kun er avhengig av $\mathbf{y}$ **og** $\mathbf{y'}$ mens høyresiden kun er en funksjon av **x**. Dersom differensiallikningen kan omformes slik, kaller vi likningen for en **separabel differensiallikning**.

Eks.2.1.1 Differensiallikningen $\mathbf{y' = x\cdot 2y}$ er separabel, og det er også likningen $\mathbf{y' + x^2\cdot y = 0}$.

Vi ser at $\mathbf{y' = x\cdot 2y} \Leftrightarrow \dfrac{\mathbf{y'}}{\mathbf{2y}} = \mathbf{x}$ og $\mathbf{y' + x^2\cdot y = 0} \Leftrightarrow \mathbf{y' = -x^2\cdot y} \Leftrightarrow \dfrac{\mathbf{y'}}{\mathbf{y}} = -\mathbf{x^2}$.

Oppg.2.1.2 Undersøk om differensiallikningene $\mathbf{y' = \sin y}$ og $\mathbf{y'} = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$ er separable.

Eks.2.1.3 For å se at likningen $\mathbf{y' + x^2\cdot y = 0}$ er separabel, kan vi omforme likningen:

$\mathbf{y' + x^2\cdot y = 0} \Leftrightarrow \mathbf{y' = -x^2\cdot y} \Leftrightarrow \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{y'} = -\mathbf{x^2}$ når $\mathbf{y \neq 0}$.

Da er differensiallikningen på formen $\mathbf{h(y)\cdot y' = g(x)}$, her med $\mathbf{h(y)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}$ **og** $\mathbf{g(x) = -x^2}$.

Oppg.2.1.4 Differensiallikningene $\mathbf{y' = \sin(x+y)}$, $\mathbf{xy' = \sin(xy)}$ og $\mathbf{y' = x\cdot y + y^2}$ er ikke separable, mens f.eks. $\mathbf{y' = x\cdot y + y}$ er det. Vis dette.

La oss nå se nærmere på tankegangen bakom en generell metode for å løse separable differensiallikninger.

Vi har $\mathbf{h(y)\cdot y' = g(x)} \Leftrightarrow \mathbf{h(y)}\cdot\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{g(x)} \Leftrightarrow \mathbf{h(y)\,dy = g(x)\,dx}$, og integrerer får vi $\int\mathbf{h(y)\ dy} = \int\mathbf{g(x)\ dx}$.

Hvis nå **H(y)** er en funksjon slik at $\mathbf{H'(y) = h(y)}$ og **G(x)** er en funksjon slik at $\mathbf{G'(x) = g(x)}$, har vi at:

$\int\mathbf{h(y)\,dy} = \int\mathbf{g(x)\ dx} \Rightarrow \mathbf{H(y) + C_1 = G(x) + C_2} \Rightarrow \mathbf{H(y) = G(x) + C_2 - C_1 = G(x) + C}$, og fra likningen $\mathbf{H(y) = G(x) + C}$ kan vi bestemme funksjonen y.

Setn.2.1.5 **Hvis den separable differensiallikningen $\mathbf{h(y)\cdot y' = g(x)}$ har løsninger y = y(x), er y gitt ved $\mathbf{H(y) = G(x) + C}$ der H(y) er antiderivert til h(y) og G(x) er antiderivert til g(x) og C er en vilkårlig reell konstant.**

Merk at vi ikke har sagt noe om denne typen differensiallikninger alltid har løsninger, bare at hvis løsninger finnes, så kan vi finne dem ved hjelp av metoden ovenfor.

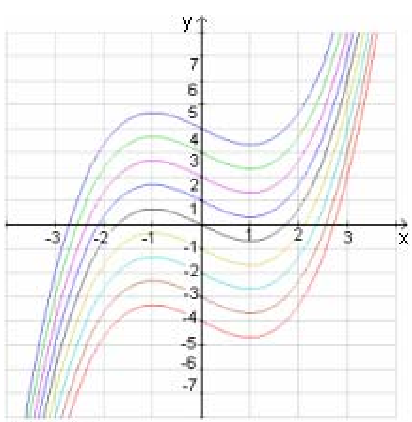


Fig.2.1.7

Eks.2.1.6 Betrakt differensiallikningen $\mathbf{y' = x^2 - 1}$.

Her er **h(y) = 1** og $\mathbf{g(x) = x^2 - 1}$.

Den antideriverte til **h(y)** er $\mathbf{H(y) = y + C_1}$ og den antideriverte til **g(x)** er $\mathbf{G(x)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^3 - x + C_2}$ der $\mathbf{C_1, C_2 \in R}$.

Løsningene til differensiallikningen $\mathbf{y' = x^2 - 1}$ blir derfor gitt ved

$\mathbf{y + C_1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^3 - x + C_2}$ eller

$\underline{\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^3 - x + C}}$ der $\mathbf{C = C_2 - C_1 \in R}$.

Grafene til disse funksjonene for noen verdier av C, er vist I fig.2.1.7.

Eks.2.1.8. Betrakt differensiallikningen $\mathbf{y' + x^2 \cdot y = 0}$. Denne differensiallikningen er separabel, fordi vi kan omforme den til $\mathbf{\frac{1}{y} \cdot y' = -x^2}$ under forutsetningen at $\mathbf{y \neq 0}$. (Gjør omformingen.)

Ved å sette inn i likningen $\mathbf{y' + x^2 \cdot y = 0}$ ser vi at **y = 0** er en **spesiell løsning** av likningen.

Her er $\mathbf{h(y) = \frac{1}{y}}$ og $\mathbf{g(x) = -x^2}$.

Vi finner at $\mathbf{H(y) = \ln|y| + C_1}$ og $\mathbf{G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + C_2}$ er antideriverte til henholdsvis h(y) og g(x). (Kontroller ved derivasjon.)

Dermed har vi at løsningene **y** er gitt ved likningen: $\mathbf{\ln|y| + C_1 = -\frac{1}{3}x^3 + C_2 \ ,\ C_1, C_2 \in R}$.

Denne likningen kan vi løse med hensyn på y med kjente regnemetoder:

$$\begin{aligned} \ln|y| + C_1 = -\frac{1}{3}x^3 + C_2 \ &\Leftrightarrow\ \ln|y| = -\frac{1}{3}x^3 + C_3 \ ,\ C_3 \in R \\ &\Leftrightarrow\ e^{\ln|y|} = e^{-\frac{1}{3}x^3 + C_3} = e^{C_3} \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3} = C_4 \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3} \ ,\ C_4 = e^{C_3} \in R \\ &\Leftrightarrow\ |y| = C_4 \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3} \ ,\ C_4 \in R \\ &\Leftrightarrow\ y = \underline{C \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3}} \ ,\ C = \pm C_4 \in R \end{aligned}$$

Kontroller at dette virkelig er den generelle løsningen til differensiallikningen $\mathbf{y' + x^2 \cdot y = 0}$ ved å derivere og sette inn.

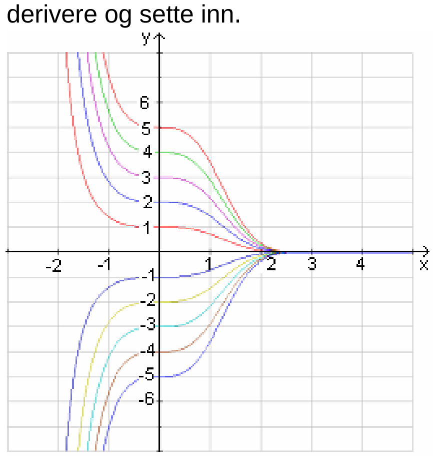


Fig.2.1.9

Tegner vi grafene til løsningsfunksjonene for noen ulike verdier av **C**, får vi figuren til venstre.

Merk at for **C = 0** får vi den trivielle løsningen **y = 0** som ikke er tegnet på figuren.

Oppgaver til avsnitt 2.1

Oppgg.2.1.10 Finn den generelle løsningen til den separable differensiallikningen $\mathbf{y \cdot y' = x}$.

Oppgg.2.1.11 Vis at **y = 0** er en spesiell løsning til differensiallikningen $\mathbf{y' = -y^2}$ og bestem deretter den generelle løsningen.

Oppgg.2.1.12 Bestem den generelle løsningen til differensiallikningen $\mathbf{y' = -\frac{1}{x} \cdot y}$ **der** $\mathbf{x \neq 0}$.

Oppgg.2.1.13 Vis at **y = -1** er en spesiell løsning til differensiallikningen $\mathbf{y' = y + 1}$ og bestem så den generelle løsningen til differensiallikningen.

Oppgg.2.1.14 a. Test de generelle løsningene i hver av oppg.2.10 – 2.13 ved å derivere.
b. Tegn grafer til løsningen i hver av oppg.2.10 – 2.13 for ulike reelle verdier av konstantene **C**.

Oppgg.2.1.15 Eks. **06.06.97.** nr. **5.a.2.**

3.1 Differensiallikningsmodeller for populasjonsvekst

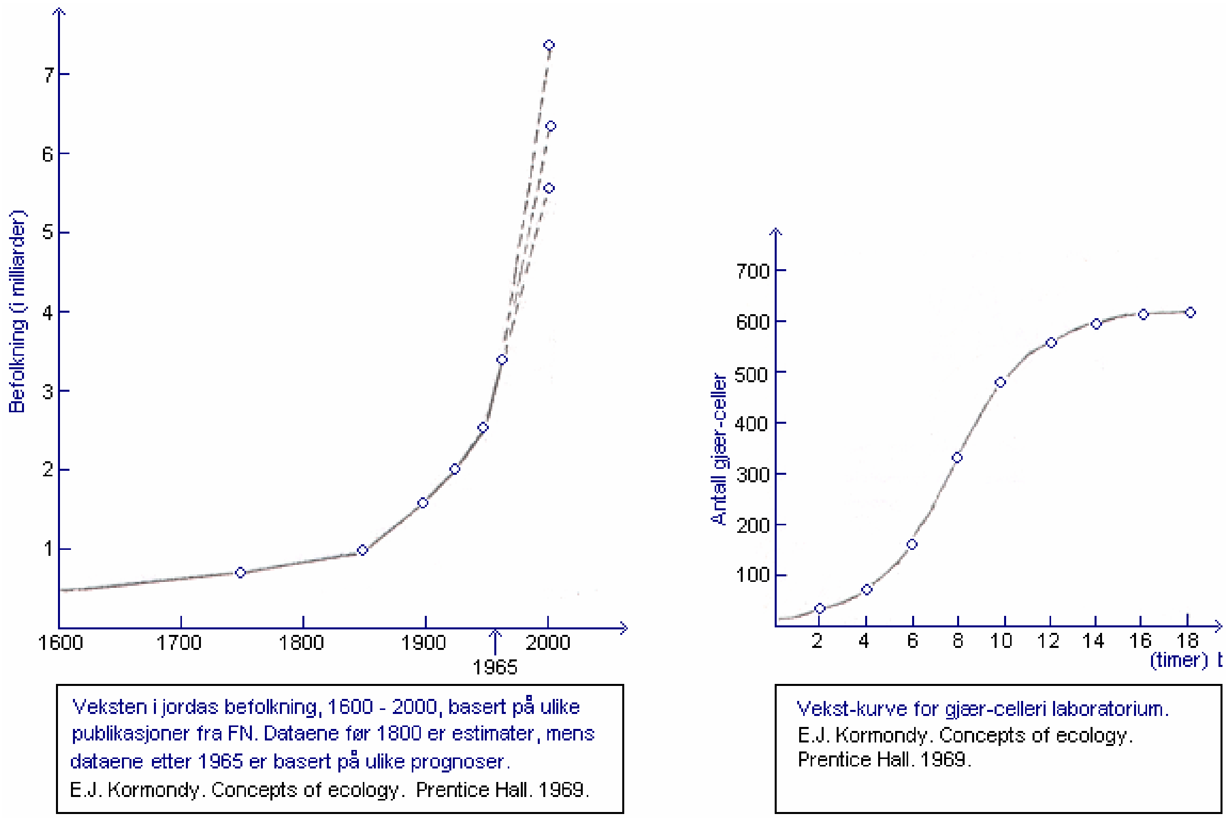


Fig.3.1.1

I de følgende avsnittene skal vi se nærmere på noen enkle modeller for populasjonsvekst og på hvordan vi når vi skal formulere vekstbetingelsene matematisk ledes til en differensiallikning. Vi skal altså lage ***differensiallikningsmodeller*** for veksten i populasjoner. I avsnitt 3.1.B nedenfor utvikler vi først en vekstmodell for ubegrenset vekst, men aller først skal vi se mer generelt på populasjonsvekst.

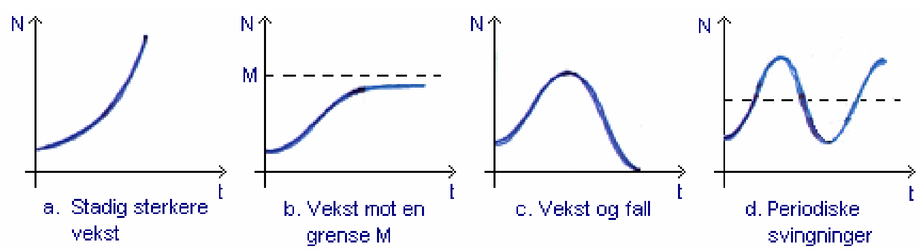


Fig.3.1.2

La oss tenke oss en populasjon som består av en dyre- eller en planteart som vokser innenfor et begrenset område. Et lokalt eksempel kan være rådyrbestanden på Ytterøya. Populasjonens størrelse kan angis på flere ulike måter, f.eks. kan vi angi biomassen målt i kg, innholdet av energi målt i Joule, eller ett og slett antall individer i populasjonen. Hvilket mål vi bruker på populasjonsstørrelsen spiller mindre rolle for de spørsmålene vi skal diskutere i dette kapitlet. La oss derfor heretter holde oss til antall individer som mål på populasjonsstørrelsen.

De vekstforløp man opplever i naturen er som regel svært kompliserte siden veksten påvirkes av mange variable faktorer. Under kontrollerte forhold i laboratoriet har en imidlertid observert noen oversiktige og typiske vekstforløp som kan beskrives ved hjelp av forholdsvis enkle matematiske modeller. Skissene i fig.2.6.1 viser noen enkle slike vekstforløp. **N = N(t**) står for antall individer. For de fleste tilfeller kan vi anta at **N(t)** er en deriverbar funksjon.
Vi skal se eksempler på konstruksjon av noen enkle vekstmodeller. La oss tenke oss en deriverbar funksjon **N = N(t)** som (tilnærmet) viser hvordan antall individer i populasjonen varierer med tiden.

Som tidligere sagt lar vi $\frac{dN}{dt}$ bety vekstraten i populasjonen, dvs. populasjonens *vekstrate*. Dividerer vi med populasjonsstørrelsen, får vi et mål på hvor mange etterkommere hvert enkelt individ produserer pr. tidsenhet.

Denne størrelsen, $\frac{\frac{dN}{dt}}{N} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, kalles den *relative vekstraten* for populasjonen. Den relative vekstraten kan også tolkes som et mål på artens evne til å formere seg under gitt ytre betingelser. Denne formeringsevnen vil normalt avhenge av tilgangen på næring og plass, rovdyr, parasitter, jakt, klima, forurensning m.m.

A. ET TYPISK VEKSTFORLØP I EN POPULASJON

Den enkleste vekstmodellen får vi dersom vi forutsetter at alle de faktorene som bestemmer den relative vekstraten, ikke endrer seg. Da vil den relative vekstraten selv være konstant, la oss si k (der **k > 0**). Vi får da $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k$ eller $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$. I avsnitt 2.2 viser vi at løsningen er alle funksjoner N(t) på formen $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$ der **k > 0** og N_0 er konstanter. Så lenge Så lenge modellens forutsetninger holder, vokser altså populasjonen eksponentielt som vist i fig.3.1.2.a. Vi kan spørre oss om i hvilken grad denne modellen beskriver observerbare fenomener. Et eksempel skulle kunne gi oss en antydning.

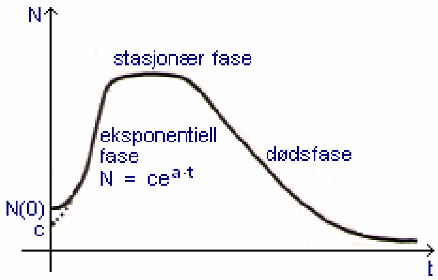


Fig.3.1.3

Når vi legger noen bakterier av samme art i en steril, flytende næringsløsning, gir den eksponentiell vekstmodellen en god beskrivelse av hvordan antall bakterier utvikler seg på et tidlig stadium av forsøket. Etter en viss tilvenningsfase går bakteriekulturen inn i en fase med eksponentiell vekst. Denne fasen varer imidlertid bare inntil det oppstår mangel på næring og opphopning av giftstoffer som nedsetter den relative vekstraten. Dermed er modellens forutsetning om konstant relativ vekstrate ikke lenger gyldig. Snart stopper veksten helt opp, og populasjonen går inn i en stasjonær fase. Til slutt inntrer dødsfasen der populasjonen avtar eksponentielt på essensielt samme måte som vi har beskrevet i avsnitt 3.1.C. (Se fig.3.1.3.)

B. VEKSTMODELL 1: UBEGRENSET VEKST

Vår viktigste hensikt med å se nærmere på differensiallikninger, er å kunne sette opp vekstmodeller for en rekke forskjellige sammenhenger i form av differensiallikninger og deretter finne den eller de funksjoner som beskriver veksten ved å løse differensiallikningen.

Vi starter med å se nærmere på en vekstmodell for en populasjon, som kan uttrykkes ved en separabel differensiallikning. (Se også eks. 1.6.2) Denne modellen kalles ***Malthus' lov***, og sier at dersom levende vesener kan formere seg fritt og har rikelig tilgang på næring, så vil **økningen pr. tidsenhet i antall individer i populasjonen være proporsjonal med antall individer til enhver tid**.

Egentlig bygger denne modellen på to ulike modeller kalt "rene fødselsprosesser" og "rene dødsprosesser".

For den første av disse prosessene tenker vi oss en populasjon av organismer av en artstype som reproduserer seg med en rate som er den samme for hvert individ og som ikke varierer med tiden. Hvis vi antar at individene i populasjonen lever evig (!) og at det finnes tilstrekkelig plass og næring til alle individene i populasjonens område, kan vi anta at veksthastigheten i populasjonen er proporsjonal med antall individer i populasjonen, og proporsjonalitetskonstanten kalles ***fødselsraten*** for populasjonen. Lar vi **N = N(t)** bety antall individer i populasjonen ved tiden **t**, sier altså Malthus' lov at: $N'(t) = f \cdot N(t)$, der f altså er en **positiv** (proporsjonalitets-)konstant.

Denne type modeller har blitt brukt for å studere gjærceller som formerer seg ved celledeling, hvordan nye ideer sprer seg i en befolkning og økningen i antall psykologer i et samfunn over en viss tid.

Tilsvarende kan vi tenke oss en populasjon der det ikke foregår noen form for reproduksjon, og der hvert individ har samme sannsynlighet, **d**, for å dø til enhver tid. Den matematiske modellen for en slik prosess blir $N'(t) = d \cdot N(t)$ der **d** er en **positiv** konstant kalt ***dødsraten*** for populasjonen.

Skal vi så beskrive en populasjon der både fødsler og død forekommer, og der fødselsraten og dødsraten i populasjonen er positive konstanter uavhengig av tiden, av størrelsen på populasjonen og av individenes alder, får vi modellen $N'(t) = (f - d) \cdot N(t)$.

Setter vi **k = f – d**, får vi $N'(t) = k \cdot N(t)$ eller $\frac{dN}{dt} = k \cdot N(t)$.

Dette kalles **Malthus' lov** og beskriver, med de gitte forutsetningene en modell for såkalt ***naturlig vekst***.

Differensiallikningen som beskriver denne modellen, er opplagt separabel, og vi kan løse den på samme måte som i eks.1.6.2. Der viste vi at den generelle løsningen til differensiallikningen $y' = k \cdot y$ er $y = C \cdot e^{k \cdot t}, C \in R$.

Her får vi at den generelle løsningen til differensiallikningen $\dfrac{dN}{dt} = k \cdot N(t)$ blir $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$, $C \in R$

Kjenner vi nå i tillegg antall individer i populasjonen ved tiden **t = 0**, f.eks. N_0 , får vi ved innsetting i løsningen:
$N_0 = Ce^{k \cdot 0}$ **eller** $C = N_0$ så løsningen blir $\underline{N(t) = N_0 e^{k \cdot t}}$, som ofte kalles formelen for **naturlig vekst.**

Vi merker oss også at:

- dersom fødselsraten er større enn dødsraten, blir **k > 0**, og vi får **eksponentiell økning**
- dersom fødselsraten er lik dødsraten, blir **k = 0**, og $N(t) = N_0 \cdot e^{0 \cdot t} = N_0$ for alle **t**, dvs. **ingen vekst**, og
- dersom dødsraten er større en fødselsraten, blir **k < 0**, og vi får en **eksponentiell nedgang**.

Fig.3.1.4 viser kvalitativt hvordan grafene til løsningsfunksjonene vil være avhengig av fortegnet til k.
Sammenlikn med det du fant i avsnitt 1.3.

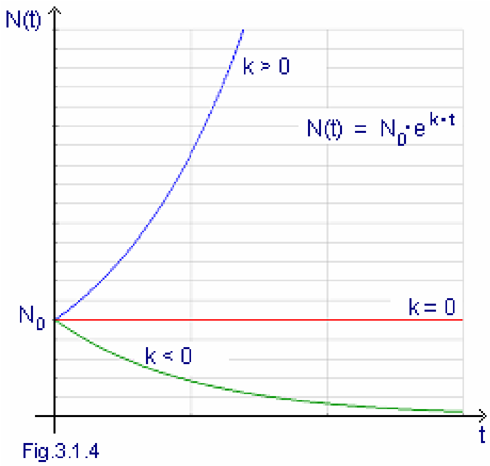


Fig.3.1.4

Setn.3.1.5 Ubegrenset vekst kan beskrives ved differensiallikningen $N' = k \cdot N$, $k \in R$

eller $\dfrac{dN}{dt} = k \cdot N$

som har den generelle løsningen
$\underline{N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}}$

når N_0 **er ant. individer ved tiden t = 0.**
(k er en positiv konstant.)

Kjenner vi ytterligere opplysninger om veksten, f.eks. at ant. individer er fordoblet etter **40 år**, kan vi bestemme konstanten **k** i funksjonen: $N(40) = 2 \cdot N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{k \cdot 40} = 2 \cdot N_0 \Leftrightarrow e^{k \cdot 40} = 2 \Leftrightarrow 40 \cdot k = \ln 2 \Leftrightarrow k = \dfrac{\ln 2}{40} \approx 0{,}0173$.

I dette tilfellet blir altså løsningsfunksjonen gitt ved $N(t) = N_0 \cdot e^{0{,}0173 \cdot t}$

Modellen med naturlig vekst, har sine klare begrensninger, allerede vist i de forutsetninger som ligger til grunn for modellen. Løsningsfunksjonen blir en eksponentiell vekst-funksjon, og antall individer i populasjonen vil iflg. denne modellen vokse ubegrenset. Modellen vil derfor i alle praktiske sammenhenger kun være gyldig i et begrenset tidsintervall.
Vi viser et eksempel som kan illustrere nettopp det at en slik modell kan stemme godt med tilgjengelig data for et begrenset tidsrom.

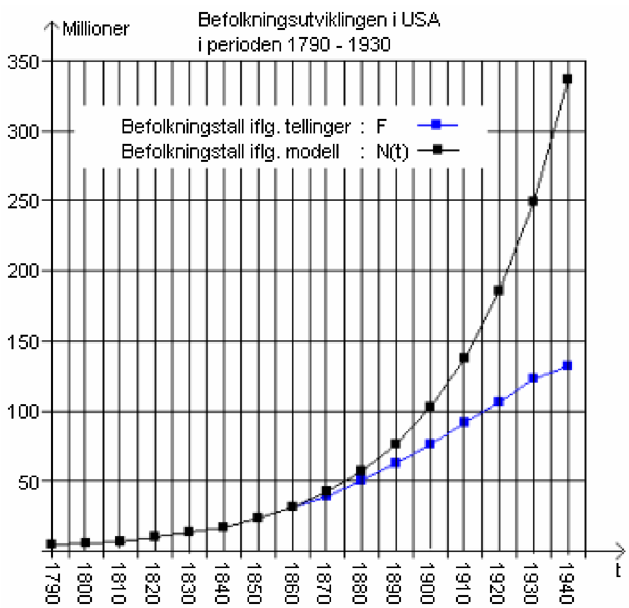


Fig.3.1.7

Eks.3.1.6 Befolkningstallet i USA i perioden fra **1790** til **1860** vokste med en slik eksponentiell hastighet.
Befolkningstallet i **1790** (**t = 0**) var **3,929 millioner** etter tellingen i **1790**.
Det aktuelle folketallet i **1830** var på **12,866 millioner**.
Vi kan bestemme konstanten k ved:

$$N(40) = 12{,}866 = 3{,}929 \cdot e^{k \cdot 40} \Leftrightarrow$$
$$\ln(12{,}866) = \ln\left(3{,}929 \cdot e^{k \cdot 40}\right) \Leftrightarrow$$
$$\ln(12{,}866) = 40k \cdot \ln\left(3{,}929\right) \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{1}{40} \cdot \frac{\ln(12{,}866)}{\ln(3{,}929)} \approx 0{,}029655$$

Vi får da $N(t) = 3{,}929 \cdot e^{0{,}029655 \cdot t}$
som en modell for befolkningsutviklingen.
I fig.3.1.6 til venstre er grafen til N(t) tegnet i tillegg til befolkningstallene fra tellinger.
Vi ser at modellen stemmer bra overens med telleresultatene fram t.o.m. 1860.

Deretter stiger modellen altfor raskt i forhold til de aktuelle befolkningstallene.

Vi har sett at den generelle løsningen til differensiallikningen $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$ er $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$ der $k \in R$.

Dersom proporsjonalitetskonstanten **k** er positiv, får vi en eksponentiell økning og dersom **k = 0** får vi konstant-funksjonen $N(t) = N_0$ for alle **t**. Den tredje muligheten er at **k < 0**. Da er $k = -p$ for et positivt reelt tall **p**, slik at

$N(t) = N_0 \cdot e^{-p \cdot t}$. Dette er en funksjon som starter på N_0 og avtar mot **0**: $\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} N_0 \cdot e^{-p \cdot t} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_0}{e^{p \cdot t}} = 0$.

I neste avsnitt ser vi nærmere på et par eksempler der vi har eksponentiell nedgang.

C. VEKSTMODELL 1: EKSPONENTIELL NEDGANG

Eks.3.1.8 La A være et radioaktivt stoff som ved radioaktiv nedbrytning går over i et annet stoff B.
La **y = y(t)** være mengden av stoff A ved tiden **t**.

Siden **y** avtar med tiden, blir $\frac{dy}{dt}$ negativ. Vi kan tolke $-\frac{dy}{dt}$ som **nedbrytningshastigheten**.

Siden atomene i stoff A nedbrytes enkeltvis, uavhengig av hverandre (og uavhengig av ytre faktorer) så er det rimelig å anta at **nedbrytningshastigheten er proporsjonal med stoffmengden til enhver tid**.

Det må da finnes et **positivt**, reelt tall **k** slik at $-\frac{dy}{dt} = k \cdot y$ eller $\frac{dy}{dt} = -k \cdot y$. Dersom $y \neq 0$

kan vi omforme likningen til $\frac{dy}{y} = -k\ dt$ og integrere:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -k\ dt \Leftrightarrow \ln|y| + C_1 = -k \cdot t + C_2 \Leftrightarrow \ln|y| = -k \cdot t + C_3 \quad , C_3 = C_2 - C_1 \in R$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow e^{\ln|y|} &&= e^{-k \cdot t + C_3} = e^{C_3} \cdot e^{-k \cdot t} = C_4 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad C_4 = e^{C_3} \in R \\
&\Leftrightarrow |y| &&= C_4 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad C_4 \in R \\
&\Leftrightarrow y &&= \pm C_4 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad C_4 \in R \\
&\Leftrightarrow y &&= \underline{C \cdot e^{-k \cdot t}}, \quad C = \pm C_4 \in R
\end{aligned}$$

Differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = -k \cdot y$ med **k > 0** har altså løsningen $y = C \cdot e^{-k \cdot t} \quad , C \in R$.

Vi ser også at $y = 0$ passer i differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = -k \cdot y$. Vi kaller $y = 0$ for en **spesiell løsning** av differensiallikningen. I den generelle løsningen framkommer den spesielle løsningen $y = 0$ ved å velge **C = 0**. Vi ser lett ved derivasjon at den generelle løsningen $y = C \cdot e^{-k \cdot t} \quad , C \in R$ passer i differensiallikningen. Er mengden radioaktivt stoff (A) ved tiden **t = 0** lik y_0, får vi $y(0) = y_0 \Leftrightarrow C \cdot e^{-k \cdot 0} = y_0$ slik at vi kan tenke på y_0 som massen av det radioaktive stoffet ved starten av observasjonen (t = 0). Dette gir oss løsningsfunksjonen $y = y_0 \cdot e^{-k \cdot t}$, der **k > 0**. Konstanten **k** kalles ***desintegrasjonskonstanten***.

Mengden radioaktivt stoff vil altså ***avta*** eksponentielt med tiden. Dette stemmer godt med eksperimentelle data.

For et radioaktivt stoff snakker vi ofte om ***halveringstiden***, $T_{1/2}$, dvs. den tid det tar før halvparten av det radioaktive stoffet er omdannet til et annet stoff . Vi kan finne halveringstiden slik:

$$y(T_{1/2}) = \frac{y_0}{2} \Leftrightarrow y_0 \cdot e^{-k \cdot T_{1/2}} = \frac{y_0}{2} \Leftrightarrow e^{-k \cdot T_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(e^{-k \cdot T_{1/2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow -k \cdot T_{1/2} = -\ln 2 \Leftrightarrow T_{1/2} = \underline{\frac{\ln 2}{k}}$$

Dersom vi kjenner halveringstiden for et radioaktivt stoff, kan vi finne desintegrasjonskonstanten k:

$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$. Som et eksempel kan vi nevne at vi vet eksperimentelt at

halveringstiden for ^{14}C er **5730 år**. Innsatt i halveringstidsformelen, får vi desintegrasjonskonstanten for $^{14}\mathbf{C}$:

$\mathbf{k} = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} = \dfrac{\ln 2}{5730} \approx 0{,}000121$. Merk at enheten for denne konstanten er år^{-1} .

For det radioaktive stoffet $^{14}\mathbf{C}$ som brukes til dateringer, er altså desintegrasjonskonstanten $\mathbf{k = 0{,}000121\ år^{-1}}$. Andre eksempler der vi har eksponentiell nedgang, er verdiforringelse på datamaskiner eller biler.

D. VEKSTMODELL 2: BEGRENSET VEKST

Vi har altså sett at naturlig vekst, som hadde den egenskap at veksten var eksponentiell og dermed ubegrenset med tiden er en urealistisk modell for vekst. I en dyrepopulasjon vil som vi har sett antall individer i populasjonen og tilgjengelig næring alltid være begrensende faktorer. Det vil dermed ofte være en øvre grense for veksten. For å få til en slik begrenset vekstmodell kan en f.eks. anta at det finnes en ***øvre grense, M, for antall individer i populasjonen*** og at ***veksten er proporsjonal med differansen mellom antall individer til enhver tid og den øvre grensen***. Dvs. jo nærmere populasjonen nærmer seg denne øvre grensen i antall individer, jo mindre er veksten i populasjonen.
Lar vi **N = N(t)** være antall individer i populasjonen ved **tiden t** og **M** være den øvre grensen for ant. individer i populasjonen, betyr dette at $\mathbf{N'(t) = k\cdot(M-N)}$ eller $\dfrac{\mathbf{dN}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{k\cdot(M-N)}$ der altså **M** er en positiv konstant.

Eks.3.1.9 La oss anta at den øvre grensen (på grunn av plass og tilgang på næring) for jordas folketall er **20 milliarder** mennesker.
Vi kan anta at **populasjonsveksten er proporsjonal ved ethvert tidspunkt t med vekstpotensialet (differansen mellom 20 milliarder og folketallet på jorda ved tidspunkt t)**.
Lar vi **N = N(t)** være folketallet på jorda (målt i milliarder) ved tidspunkt t, får vi da at
$\mathbf{N' = k\cdot(20-N)}$. Dette er altså en modell for begrenset vekst.

Differensiallikningen $\mathbf{N'(t)=k\cdot(M-N)}$ er separabel: $\mathbf{N' = k\cdot(M-N)} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{M-N}}\cdot\mathbf{N' = k}$.

Her er $\mathbf{h(N)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{M-N}}$ med antiderivert $\mathbf{H(N) = -\ln|M-N| + C_1 = -\ln(M-N) + C_1\ ,C_1 \in R\ \text{siden}\ M-N>0}$.
og **g(t) = k** med antiderivert $\mathbf{G(t) = kt + C_2}$.
Da er løsningen **N = N(t)** av differensiallikningen $\mathbf{N'(t) = k\cdot(M-N)}$ gitt ved:

$$\mathbf{-\ln(M-N) + C_1 = kt + C_2 \Leftrightarrow \ln(M-N) = -kt + C_3 \Leftrightarrow e^{\ln(M-N)} = C\cdot e^{-kt}}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow M-N = C\cdot e^{-k\cdot t} \Leftrightarrow \underline{N = M - C\cdot e^{-k\cdot t}}}$$

Antar vi nå f.eks. at **N(0) = 0**, får vi: $\mathbf{0 = M - C\ \ eller\ \ C = M}$. Innsatt i løsningen, $\mathbf{N = M - Ce^{-k\cdot t}}$ gir dette oss at

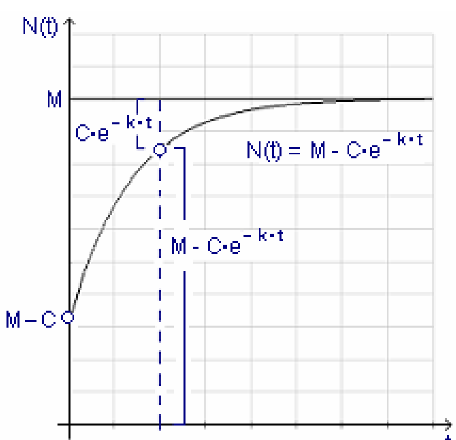


Fig.3.1.10

$\mathbf{N(t) = M - M\cdot e^{-k\cdot t} = M\cdot(1-e^{-k\cdot t})}$.

Antar vi nå f.eks. at $\mathbf{N(0) = N_0}$, får vi:
$\mathbf{N_0 = M - C\ \ eller\ \ C = M - N_0}$. Innsatt i løsningen, $\mathbf{N = M - Ce^{-k\cdot t}}$ gir dette oss at $\mathbf{N(t) = M - (M-N_0)\cdot e^{-k\cdot t}}$.
Vi ser at $\mathbf{\lim_{t\to\infty} N(t) = M}$ så at veksten er begrenset kommer til uttrykk i at løsningsfunksjonene har en horisontal asymptote **y = M**.
Fig.3.1.10 til venstre viser kvalitativt grafen til **N(t)**.
Vi ser at grafen "flater ut" jo mer funksjonsverdien nærmer seg grenseverdien M med tiden.

$$\mathbf{\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty}\left(M - Ce^{-k\cdot t}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(M - \frac{C}{e^{k\cdot t}}\right) = M}$$

Antall individer vokser altså mot denne begrensede verdien M.

Setn.3.1.11 ***Begrenset vekst* uttrykt ved differensiallikningen $N'(t) = k \cdot (M - N)$ har den generelle løsningen $\underline{N(t) = M - Ce^{-k \cdot t}}$, der C er en vilkårlig konstant.**
Hvis vi krever at $N(0) = N_0$, får vi løsningen $N(t) = M - (M - N_0) \cdot e^{-k \cdot t}$.

Andre anvendelser av modellen for begrenset vekst kan f.eks. være læring, vekst i produksjon eller salg i en bedrift.

Oppgaver til avsnitt 3.1

Oppg.3.1.12 Om en størrelse **y = y(t)** vet vi at veksthastigheten avtar proporsjonalt med **y**. Forklar at vi da kan beskrive utviklingen av **y(t)** ved likningen $\frac{dy}{dt} = -k \cdot y$ der k er en positiv konstant.
Ved tiden **t = 0** har y verdien **1000**, og når **t = 10** er **y = 500**. Bestem funksjonen **y**.

Oppg.3.1.13 La $y = k \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ der **k** og λ er konstanter. Bestem y' og vis at funksjonen passer i differensial-likningen $y' + \lambda \cdot y = 0$ for alle **t**.

Oppg.3.1.14

a.	Eks. **21.12.94**. nr. **4**.	b.	Eks. **22.02.95.** nr. **5**.
c.	Eks. **15.12.95**. nr. **5**.	d.	Eks. **29.02.96**. nr. **5.**
e.	Eks. **20.12.96**. nr. **5**.	f.	Eks. **15.12.98.** nr. **4.b.**
g.	Eks. **14.05.99.** nr. **4.**	h.	Eks. Ny prøve. **14.12.99**. nr.**5.a**.
i.	Eks. **12.05.00**. nr. **4.b**.	j.	Eks. **05.12.02.** nr. **4.**
k.	Eks. **19.05.04.** nr**. 4.**	l.	Eks. **31.08.04.** nr. **3.**

E. SEPARABLE DIFFERENSIALLIKNINGER AV TYPEN $y' = ay + b$

I anvendelser støter man ofte på differensiallikninger av typen $y' = ay + b$, $a \neq 0$.

Eks.3.1.15 Et firma er avhengig av at tilfredse kjøpere forteller om firmaets produkt til andre.
Dermed kan firmaet regne med at når salget øker, så øker også reklamen for produktet på denne måten.
Endringen i salget, **y**, er gitt ved $y' = 0{,}1 \cdot y + 0{,}2$ hvor **y = y(t)** er antallet (målt i **1000** enheter) solgt av produktet **t** er antall måneder etter at produktsalget startet

Differensiallikningen $y' = ay + b$ er ei separabel differensiallikning:
Dersom $y \neq -\frac{b}{a}$ blir: $y' = ay + b \iff \frac{dy}{dx} = ay + b$ og $\frac{dy}{dx} = ay + b \iff \frac{1}{ay+b} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$. Her er altså
$h(y) = \frac{1}{ay+b}$ med antiderivert $H(y) = \frac{1}{a}\ln|ay+b| + C_1$ og **g(x) = 1** med antiderivert $G(x) = x + C_2$.

Vi har dermed at løsningene **y = y(x)** må være gitt ved likningen $\frac{1}{a}\ln|ay+b| + C_1 = x + C_2$. Vi får:

$$\frac{1}{a}\ln|ay+b| + C_1 = x + C_2 \iff \ln|ay+b| = ax + C_3 \Rightarrow e^{\ln|a \cdot y + b|} = e^{ax + C_3} = e^{C_3} \cdot e^{ax} = C_4 e^{ax}$$

$$\Rightarrow \quad |ay+b| = C_4 e^{ax} \quad \Rightarrow \quad ay + b = C_5 e^{a \cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{C_5}{a}e^{ax} - \frac{b}{a} = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{(siden } a \neq 0\text{)}$$

Dersom $ay + b = 0$ blir $y = -\frac{b}{a}$ og denne konstante funksjonen er en løsning av likningen. (Sjekk ved å derivere og sette inn.) Vi ser også at hvis **C = 0** får vi denne løsningen fra den generelle løsningen $y = Ce^{a \cdot x} - \frac{b}{a}$.

Setn.3.1.16 **Differensiallikningen** $y' = ay + b$ **har løsningen** $\underline{y = Ce^{a\cdot x} - \frac{b}{a}}$ **dersom** $a \neq 0$.

Eks.3.1.17 Vi kan nå løse differensiallikningen fra eks.1.4.5., $\frac{dV}{dt} + k \cdot V = r$. Den kan omformes til:

$\frac{dV}{dt} = -k \cdot V + r$ Denne likningen er nettopp på formen $y' = ay + b$ og løsningen blir

derfor $V(t) = Ce^{-k\cdot t} + \frac{r}{k}$. Med kravet $V(0) = V_0$ får vi:

$V_0 = C + \frac{r}{k}$ eller $C = V_0 - \frac{r}{k}$ som innsatt i løsningen gir $V(t) = \left(V_0 - \frac{r}{k}\right)e^{-k\cdot t} + \frac{r}{k}$.

Dermed blir den løsningen til differensiallikningen $\frac{dV}{dt} + k \cdot V = r$ med initialbetingelse

$V(0) = V_0$ gitt ved: $\underline{V(t) = \left(V_0 - \frac{r}{k}\right)e^{-k\cdot t} + \frac{r}{k}}$.

Hvordan kan vi tolke denne løsningen i forhold til konteksten i eks.1.4.5?

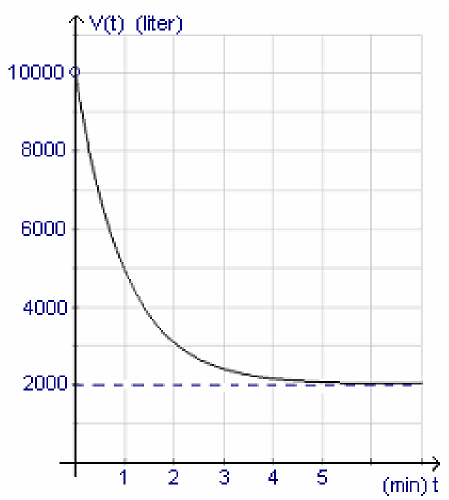


Fig.3.1.18

Hvordan utvikler egentlig vannmengden i karet seg med tiden?
Grafen til løsningsfunksjonen

$V(t) = \left(V_0 - \frac{r}{k}\right)e^{-k\cdot t} + \frac{r}{k}$ ser ut som i fig.3.1.17

(med $V_0 = 10000$ liter), innstrømmingshastigheten **r = 2000** liter pr. min., og k = 1). Siden

$$V(t) = \left(V_0 - \frac{r}{k}\right)e^{-k\cdot t} + \frac{r}{k}$$

$$= \frac{\left(V_0 - \frac{r}{k}\right)}{e^{k\cdot t}} + \frac{r}{k}$$

vil $\lim_{t\to\infty} V(t) = \frac{r}{k}$ slik at vannmengden i karet

etter hvert vil stabilisere seg på verdien $\frac{r}{k}$.

I eks. til venstre er $\frac{r}{k} = \frac{2000l}{1} = 2000$ liter.

I avsnitt 3.1 løste vi differensiallikningen $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$ og fant at i tilfelle **k > 0** fikk vi en eksponentiell vekst, mens tilfellet **k < 0** gav eksponentiell nedgang. Så lenge vi tolker **N(t)** som antall individer i en populasjon, er **N(t)** positiv for alle **t**, og grafene vil ligge over 1.-aksen.

La oss nå se på likningen $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$ som et spesialtilfelle av differensiallikningen $\frac{dy}{dx} = ay + b$, $a \neq 0$, nemlig det tilfelle der **a = k**, **b = 0** og **y = N(t)** alltid er positiv.

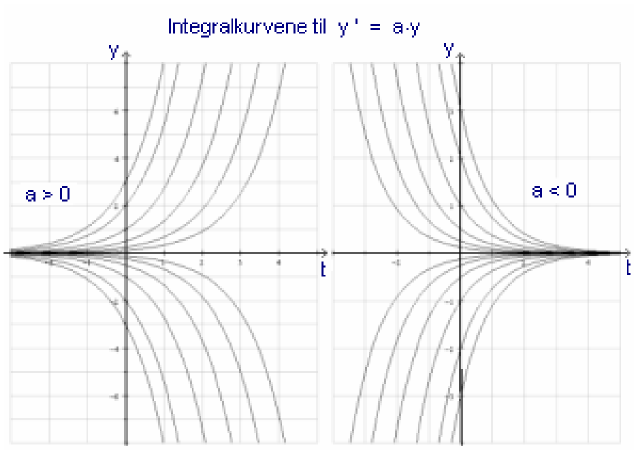


Fig.3.1.19

Dersom vi skal løse $\frac{dy}{dt} = ay$ under forutsetning av at **y** også kan være negativ, kan vi benytte samme løsningsmetode som i avsnitt 1.6 og 2.2., men når vi finner at $|y| = C_5 \cdot e^{a \cdot t}$, $C_5 \in R$ så må vi ta hensyn til at nå kan y også være negativ. Løsningen bli derfor gitt ved $y = C_5 \cdot e^{a \cdot t}$ for alle x eller $-y = C_5 \cdot e^{a \cdot t}$ for alle x som gir oss løsningene $y = C_5 \cdot e^{a \cdot t}$ eller $y = -C_5 \cdot e^{a \cdot tx}$, **k > 0**. Disse to løsningene kan vi samle i fellesløsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t}$ der $C = \pm C_5$ er en vilkårlig reell konstant. Dette stemmer godt overens med setn.3.1.5 med **b = 0**.

Integralkurvene til differentiallikningen $\frac{dy}{dt} = ay$ blir dermed som i fig.3.1.19.

Oppg.3.1.20 Lag kontekst til hver av differensiallikningene, løs dem og gi en tolkning av løsningene.

a. $y' = y$ b. $y' = 2y + 1$

c. $y' = -3y + 1$ d. $y' = \frac{y}{2} - 4$

e. Eks. **19.05.04** nr. **4**.

F. DIFFERENSIALLIKNINGER AV TYPEN $y' = ay^2 + by + c$, $a,b,c \in R$, $a \neq 0$

Vi skal nå løse differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = ay^2 + by + c$, $a,b,c \in R$, $a \neq 0$. Tilfellet **c = 0** har vi behandlet ovenfor. Vi bestemmer først eventuelle konstante løsninger. For en konstant løsning må vi ha at $\frac{dy}{dt} \equiv 0$. Vi får derfor $ay^2 + by + c \equiv 0$. Denne 2.-gradslikningen kan mangle reelle løsninger, den kan ha én løsning (2 sammenfallende) eller den kan ha 2 ulike reelle løsninger avhengig av om $b^2 - 4ac$ er negativ, lik **0** eller positiv.
Vi vil først behandle tilfellet der likningen har to reelle løsninger **A** og **B**. Vi får da 2 konstante løsninger $y \equiv A$ og $y \equiv B$. De rette linjene **y = A** og **y = B** er altså integralkurver. Siden integralkurver aldri skjærer hverandre, vil enhver annen integralkurve befinne seg enten mellom disse linjene, helt "på oversiden" av dem eller helt "på undersiden" av dem. For enhver ikke-konstant løsning **y = y(t)** vil derfor uttrykkene **y(t) – A** og **y(t) – B** være forskjellig fra **0** og ha fast fortegn i hele definisjonsmengden til **y(t)**. Vi vet også at $ay^2 + by + c \equiv a(y-A)(y-B)$ for alle y slik at differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = ay^2 + by + c$ kan skrives $\frac{dy}{dt} = a(y-A)(y-B)$ eller $\frac{1}{(y-A)(y-B)}\frac{dy}{dt} = a$. Før vi løser denne likningen, skal vi omforme brøken $\frac{1}{(y-A)(y-B)}$ ved hjelp av delbrøksoppspalting slik som vist i avsnitt 2.5 nedenfor ved hjelp av et annet eksempel.

G. DELBRØKSOPPSPALTING

Eks.3.1.21 Vi skal løse differensiallikningen $y' = \frac{2}{x^2-1} \cdot y$, der $x \neq \pm 1$.

Vi ser at **y = 0** opplagt er en spesiell løsning av differensiallikningen. Når $y \neq 0$ ser vi lett at differensiallikningen er separabel fordi $y' = \frac{2}{x^2-1} \cdot y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{x^2-1}$.

Her er $\mathbf{h(y) = \frac{1}{y}}$ med antiderivert $\mathbf{H(y) \ = \ ln|y| \ + \ C_1}$ og $\mathbf{g(x) \ = \ \frac{2}{x^2 - 1}}$.

For å finne den antideriverte til **g(x)**, benytter vi en ***metode som går ut på å skrive brøken som en sum av to brøker med 1.gradsuttrykk i nevneren***. Dette kan vi gjøre ved å faktorisere nevneren og løse ei enkel likning.

Siden $\mathbf{\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}}$, har vi:

$$\mathbf{\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} \Leftrightarrow \frac{2}{(x^2-1)} = \frac{A(x-1)}{(x^2-1)} + \frac{B(x+1)}{(x^2-1)}}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \frac{2}{(x^2-1)} = \frac{Ax - A + Bx + B}{(x^2-1)}}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \frac{2}{(x^2-1)} = \frac{(A+B)\cdot x - (A-B)}{(x^2-1)}}$$

Siden denne identiteten skal gjelde for alle x, kan vi finne A og B ved å sammenlikne høyresiden med venstresiden. Dette gir oss at $\mathbf{(A+B)\cdot x = 0}$ og at $\mathbf{-(A-B) = 2}$ for alle x.

Den første likningen er kun oppfylt for alle x dersom **A + B = 0** mens den andre likningen er oppfylt dersom **A – B = – 2**. Dette betyr at **A = – 1** og **B = 1**.   (Sjekk selv.)

Dermed har vi delbrøksoppspaltet og fått at $\mathbf{\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)}}$.

(Sjekk at dette er riktig ved å samle brøkene på høyresiden til en brøk.)

Dermed kan vi skrive $\mathbf{g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}$ som har antiderivert

$$\mathbf{G(x) \ = \ ln|x-1| - ln|x+1| + C_2 \ = \ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_2 \ , \ C_2 \in R}$$

Dermed blir løsningene y av differensiallikningen gitt ved $\mathbf{ln|y| \ + \ C_1 \ = \ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_2 \ , \ C_2 \in R}$

eller $\mathbf{ln|y| \ = \ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_3 \ , \ C_3 = C_2 - C_1 \in R}$. Vi løser likningen m.h.p. y på vanlig måte:

$$\mathbf{ln|y| \ = \ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_3 \Leftrightarrow e^{ln|y|} \ = \ e^{ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_3} \ = \ e^{C_3}\cdot e^{ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} \ = C\cdot e^{ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \ y \ = \ \underline{C\cdot\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} \ , \ C = e^{C_3} \in R}$$

Den generelle løsningen til differensiallikningen $\mathbf{y' = \frac{2}{x^2-1}\cdot y}$ er altså $\mathbf{y \ = \ \underline{C\cdot\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} \ , \ C \in R}$

når $\mathbf{x \neq \pm 1}$.

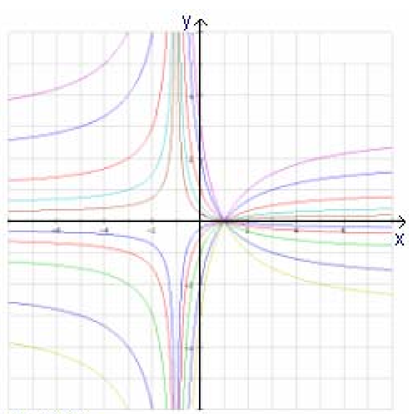


Fig.3.1.22

Vi ser også at den spesielle løsningen **y = 0** finnes av den generelle løsningen ved å sette **C = 0**.

Fig3.1.22 viser integralkurvene for noen heltallsverdier av konstanten **C**.

Oppgaver til avsnitt 3.1

Oppg.3.1.23 Løs differensiallikningene

a. $y' = \dfrac{2}{x^2-4}\cdot y$ b. $y' = \dfrac{2}{x^2-4x+4}\cdot y$

Oppg.3.1.24 a. **Eks.** M4**.** 12.05.00**. nr.** 4 b. **Eks.** M4**.** 14.05.99**. nr.** 4**.**

Oppg.3.1.25 I løsingen av differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ får du bruk for å delbrøksoppspalte brøken $\dfrac{1}{(y-A)(y-B)}$ **. V**is at $\dfrac{1}{(y-A)(y-B)} = \dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{y-B}-\dfrac{1}{y-A}\right)$.

Med omformingen fra oppgave 3.1.25 har vi at

$$\frac{1}{(y-A)(y-B)}\frac{dy}{dt} = a \Leftrightarrow \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{y-B}-\frac{1}{y-A}\right)\frac{dy}{dt} = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{B-A}\cdot\int\left(\frac{1}{y-B}-\frac{1}{y-A}\right)dy = \int a\,dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{B-A}\left(\ln|y-B|-\ln|y-A|\right)+C_1 = at + C_2 \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{B-A}\ln\left|\frac{y-B}{y-A}\right| = at + C_3 \quad , \quad C_3 = C_2 - C_1 \in R$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-B}{y-A}\right| = (B-A)\cdot at + C_4 \quad , \quad C_4 = C_3\cdot(B-A) \in R$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y-B}{y-A}\right| = e^{(B-A)\cdot at + C_4} = e^{(B-A)\cdot at}\cdot e^{C_4} = C\cdot e^{(B-A)\cdot at}, \; C = e^{C_4} \in R$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y-B}{y-A}\right| = C\cdot e^{(B-A)\cdot at}, \; C \in R$$

Siden y – B og y – A begge har fast fortegn i definisjonsmengden til y(t), så må det samme gjelde for kvotienten $\dfrac{y-B}{y-A}$. Vi får da to tilfeller:

① $\dfrac{y-B}{y-A} > 0$: I dette tilfellet kan vi sløyfe absoluttverditegnet og vi får $\dfrac{y-B}{y-A} = C\cdot e^{(B-A)\cdot at}, \; C \in R$.

② $\dfrac{y-B}{y-A} < 0$: I dette tilfellet får vi $\dfrac{y-B}{y-A} = -C\cdot e^{(B-A)\cdot at}, \; C \in R$.

Disse to formlene kan sammenfattes i ett uttrykk, nemlig $\dfrac{y-B}{y-A} = -k\cdot e^{(B-A)\cdot at}, \; -k \in R$. At vi skriver – k i stedet for k er av løsningstekniske grunner. Løser vi likningen $\dfrac{y-B}{y-A} = -k\cdot e^{(B-A)\cdot at}$ med hensyn på y, får vi:

$$\frac{y-B}{y-A} = -k\cdot e^{(B-A)\cdot at} \iff y-B = -k\cdot y\cdot e^{(B-A)\cdot at} + A\cdot k\cdot e^{(B-A)\cdot at}$$

$$\iff y + k\cdot y\cdot e^{(B-A)\cdot at} = B + A\cdot k\cdot e^{(B-A)\cdot at}$$

$$\iff y\cdot\left(1+k\cdot e^{(B-A)\cdot at}\right) = B + A\cdot k\cdot e^{(B-A)\cdot at}$$

$$\iff y = \frac{B + A\cdot k\cdot e^{(B-A)\cdot at}}{\left(1+k\cdot e^{(B-A)\cdot at}\right)} = \frac{A + A\cdot k\cdot e^{(B-A)\cdot at}}{\left(1+k\cdot e^{(B-A)\cdot at}\right)} + \frac{B-A}{\left(1+k\cdot e^{(B-A)\cdot at}\right)}$$

$$\iff y = A + \frac{B-A}{\left(1+k\cdot e^{(B-A)\cdot at}\right)} \text{ , der } A \neq B \text{ og } a \neq 0 \text{ , } k \in \mathbb{R}.$$

Vi ser at **k = 0** gir oss den konstante løsningen $y \equiv B$, mens løsningen $y \equiv A$ ikke fås for noe valg av **k**.

Setn.3.1.26 **Differensiallikningen** $\frac{dy}{dt} = a\cdot(y-A)\cdot(y-B)$ **,** $A \neq B$ **og** $a \neq 0$ **har den generelle løsningen** $y = A + \frac{B-A}{\left(1+k\cdot e^{(B-A)\cdot at}\right)}$ **,** $k \in \mathbb{R}$.

I tillegg kommer den konstante løsningen $y \equiv A$.

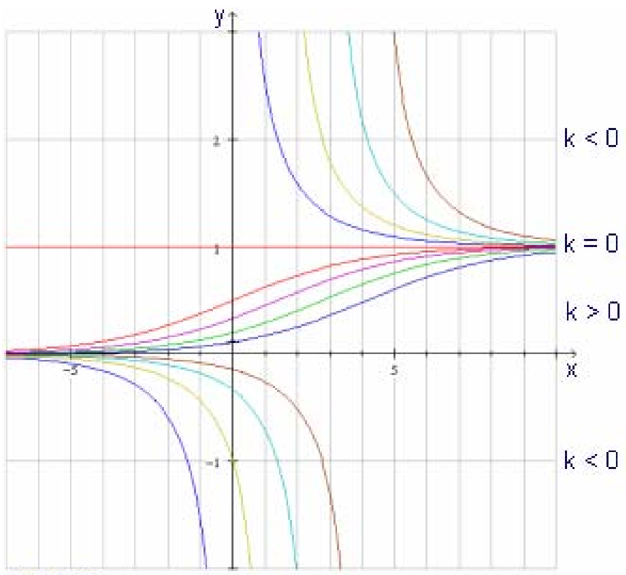


Fig.3.1.27

I fig.3.1.27 er vist integralkurvene til differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = a\cdot(y-A)\cdot(y-B) \text{ , } A \neq B \text{ og } a \neq 0$$

for ulike verdier av konstanten k.

Merk at integralkurvene til differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = a\cdot(y-A)\cdot(y-B) \text{ , } A \neq B \text{ og } a \neq 0$$

her har to horisontale asymptoter, nemlig **y = 0** og **y = A**.

Oppgaver til avsnitt 3.1

Oppg.3.1.28 Den årlige inntekten, **R**, ved salget av et produkt, er avhengig av utgiftene, x, til markedsføringen av produktet. Sammenhengen mellom **R** og **x** kan vi tenke oss gitt ved differensiallikningen $\frac{dR}{dx} = k\cdot(B-R)$ der **k** og **B** er positive, reelle konstanter.

Vi setter $R(0) = R_0$.

a. Finn **R** uttrykt ved R_0, **k**, **B** og **x** og gi en tolkning av løsningen.

b. Skisser grafen til **R(x)**. Velg selv R_0, **k** og **B**.

Oppg.3.1.29 a. Løs differensiallikningen i eks.2.6.1.

b. Tenk deg at denne modellen gjøres gjeldende fra **1930** (**t = 0**) og framover i tid.
Folketallet på jorda i **1930** var omkring **2 milliarder**. (dvs. **F(0) = 2**)
Folketallet på jorda i **1990** var omkring **4 milliarder**. (dvs. **F(60) = 4**).

Finn et funksjonsuttrykk **F(t)**.
c. Hva blir det forventede folketallet i **2003** etter denne modellen?

Oppg.3.1.30 Eksperimenter som går ut på å lære vilkårlige sekvenser av bokstaver eller tall, viser at (innen visse grenser) er læringsraten proporsjonal med mengden materiale av denne typen som ennå ikke er lært .
Vi lar **L(t)** være prosenten av hele materialet som er lært **t** minutter etter starten.
Dersom materialet består av **100** ulike sekvenser, er **100 – L(t)** det materialet som ennå ikke er lært.

a. Vis at da gjelder differensiallikningen $\mathbf{L' = k \cdot (100 - L)}$ for en reell konstant **k**.
b. Anta **L(0) = 0** og at **10 %** av materialet er lært etter **5 minutter**.
Finn et funksjonsuttrykk for **L(t)**.
c. Bestem hvor lang tid det vil ta før **80 %** av materialet er lært.

Oppg.3.1.31
a. Eks. Ny prøve. **05.12.02** nr. **4**.
b. Eks. Ny prøve. **04.12.99** nr. **5.a**.
c. Eks. Ny prøve. **15.12.98** nr. **4**.
d. Eks. **20.12.96** nr. **5**.
e. Eks. **29.02.96** nr. **5.c**.
f. Eks. **15.12.95** nr. **5**.
g. Eks. **22.02.95** nr. **5**.

3.2 Den logistiske vekstmodellen

H. VEKSTMODELL 3: LOGISTISK VEKST

Vi har sett at ingen populasjon kan vokse ubegrenset. Vi kan ta hensyn til dette på en annen måte enn vi gjorde i modellen for begrenset vekst ved også ved å kreve at den ***relative vekstraten*** (dvs. vekstraten i forhold til populasjonsstørrelsen) skal avta mot null når antall individer nærmer seg et visst nivå **M**.
M kalles vanligvis miljøets **bærekapasitet** og kan tolkes som et mål på hvor mange individer det er plass til. Differansen **M - N** kaller vi den **ledige kapasiteten** i populasjonen. En enkel modell som oppfyller kravet ovenfor, får vi om vi forutsetter at ***den relative vekstraten er proporsjonal med den ledige kapasiteten***
$\mathbf{\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k \cdot (M - N)}$ dersom $\mathbf{N \neq 0}$.
Denne modellen kalles en ***logistisk*** vekstmodell.

Oppg.3.2.1 Tenk gjennom og forklar for deg selv at dersom en størrelse **A** er proporsjonal med både størrelsen **B** og samtidig med størrelsen **C**, dvs. at dersom $\mathbf{A = k_1 \cdot B}$ og $\mathbf{A = k_2 \cdot C}$ der $\mathbf{k_1}$ og k_1 og k_2 er reelle konstanter, så er også A proporsjonal med produktet av **B** og **C**, dvs. $\mathbf{A = k \cdot (B \cdot C)}$ for en eller annen reell konstant **k**.

Eks.3.2.2 Tenk deg et tre som vokser, og som vi vet maksimalt kan få en høyde M ved "voksen" alder. Vi lar **H(t)** bety høyden av treet ved tiden t år etter at observasjonen startet,
Et ungt tre må etablere et rotsystem og bladsystem før en raskere vekst kan foregå, slik at veksten i starten vil være mindre enn når rotsystem og bladsystem er etablert.
Dette kan vi uttrykke matematisk gjennom differensiallikningen $\mathbf{\frac{dH}{dt} = k \cdot H}$.
Og, når treet har nådd "voksen" alder blir veksthastigheten igjen mindre etter som treet nærmer seg maksimalhøyden. Dette kan vi uttrykke gjennom $\mathbf{\frac{dH}{dt} = k \cdot (M - H)}$
differensiallikningen. Siden begge sammenhenger skal gjelde i modellen vi lager, må vi ha at
$\mathbf{\frac{dH}{dt} = k \cdot H \cdot (M - H)}$ eller $\mathbf{\frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = k \cdot (M - H)}$, altså en logistisk vekstmodell.

Eks.3.2.3 Den logistiske vekstmodellen kan f.eks. også brukes til å beskrive spredningen av en infeksjonssykdom i en befolkning. La **y = y(t)** bety antall mennesker som har sykdommen ved tidspunkt t (f.eks. målt i uker) og la **M** stå for antall mennesker i befolkningen.
I begynnelsen av sykdomsepidemien er **y(t)** liten, kanskje starter spredningen fra bare en

person. Spredningen av sykdommen er liten i starten fordi få mennesker har kontakt med sykdomsbærerne. Dette kan uttrykkes matematisk ved differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$.
På samme måte er resonnementet at dersom de fleste i befolkningen har sykdommen er det få som kan smittes og spredningen blir igjen mindre og mindre.
Dette kan uttrykkes gjennom differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = k \cdot (M - y)$. Siden begge sammenhengene skal gjelde samtidig for at modellen skal beskrive sykdomsspredningen, må vi ha at $\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot (M - y)$ eller siden likningen opplagt er separabel på grunn av at $y \neq M$ at $\frac{1}{y \cdot (M - y)} \frac{dy}{dt} = k$.
Sykdomsspredningen kan altså beskrives kontinuerlig gjennom en slik logistisk vekstmodell.
Vi ser at siden brøken $\frac{1}{y \cdot (M - y)}$ har en 2.gradsfaktor i nevneren, vil det være lurt å delbrøksoppspalte den for å kunne integrere to brøker med 1. gradsuttrykk i nevner. I neste avsnitt løser vi denne differensiallikningen ved hjelp av setn.3.1.26 og ser nærmere på noen anvendelser av den logistiske vekstmodellen.

Oppg.3.2.4 Vis at $\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{M - y} = -\frac{1}{M} \cdot \left[\frac{1}{y - M} - \frac{1}{y} \right]$ ved å benytte delbrøksoppspalting.

Differensiallikningen $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k \cdot (M - N)$ er ekvivalent med $\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot (M - N)$. Vi skal finne alle løsningene til denne differensiallikningen. I fig.3.2.5 har vi skissert grafen til en slik løsning.

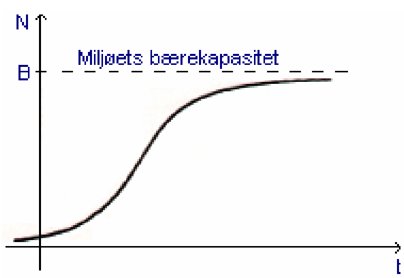


Fig.3.2.5

Så lenge **populasjonen er liten i forhold til bærekapasiteten**, er veksten tilnærmet eksponentiell. Dette kommer av at når **N << M** er $M - N \approx M$ og derfor kan vi tilnærmet skrive likningen $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k \cdot (M - N)$ som $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k \cdot M$. Siden k og M begge er konstanter er $c = k \cdot M$ en konstant og differensiallikningen kan skrives $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = c$ eller $\frac{dN}{dt} = c \cdot N$.
Tidligere har vi vist at løsningen av denne differensiallikningen er alle funksjoner på formen $N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t} = N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot M \cdot t}$, **k > 0**.
Etter hvert som N(t) nærmer seg bærekapasiteten M, dvs. **M – N** avtar, vil høyresiden $k \cdot N \cdot (M - N)$ avta, slik at $\frac{dN}{dt}$ avtar og grafen til N(t) flater ut mot bærekapasiteten M.
Går vi tilbake til fig.3.1.2 kan vi si at modeller for begrenset vekst og for logistisk vekst er mer realistiske modeller for populasjoner. Dersom en art ikke elever alene, men i økologisk balanse med andre arter, vil et vekstforløp kunne arte seg som vist i fig.3.1.2.d.

Vi går så tilbake til vår generelle beskrivelse av logistisk vekst $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k \cdot (M - N)$. Denne differensiallikningen er altså ekvivalent med likningen $\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot (M - N)$ eller $\frac{dN}{dt} = -k \cdot (N - 0) \cdot (N - M)$.

Ser vi nærmere på denne likningen, ser vi at den er på formen $\frac{dy}{dt} = a \cdot (y - A) \cdot (y - B)$, her med a = -k, y = N, A = 0 og med B = M. Vi vet da at den generelle løsningen av denne differensiallikningen er gitt ved

$$y = 0 + \frac{M - 0}{\left(1 + c \cdot e^{(M-0)\cdot(-kt)}\right)} = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot M \cdot t}} \quad , c \in R.$$

Vi ser at $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{M}{1+c\cdot e^{-k\cdot M\cdot t}} = M$ slik at veksten iflg. denne modellen altså er begrenset av miljøets bærekapasitet **M**.

Setn.3.2.6 **Differensiallikningen** $\dfrac{dN}{dt} = k\cdot N\cdot(M-N)$ **som beskriver den** ***logistiske vekstmodellen***

har den generelle løsningen $y = \dfrac{M}{1+c\cdot e^{-k\cdot M\cdot t}}$ $, c\in R$.

I tillegg kommer løsningen $N \equiv 0$.

Oppg.3.2.7 a. **Velg verdier for** M **og** c **og velg** k = 1**. Tegn grafen til** N(t) **i dette tilfellet.**
b. Behold samme **M**-verdi og **c**-verdi og velg **k = 0** og tegn grafen til **N(t)** nå.
Gjenta, men nå med **k = -1**.

La oss så se litt nærmere på hvordan veksten i denne modellen egentlig utvikler seg med tiden. La oss tenke oss en populasjon som følger den logistiske vekstmodellen, og la N_0 være antall individer i populasjonen når t = 0. Hvordan populasjonen utvikler seg, avhenger av hvilken integralkurve populasjonen følger. Dette igjen avhenger av initialverdien N_0.

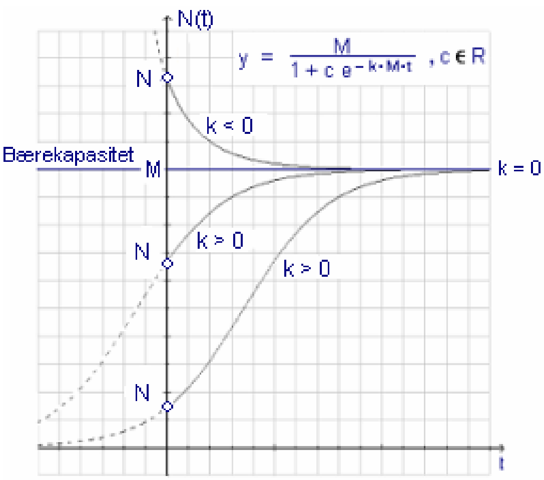


Fig.3.2.8

I fig. 3.2.8 er vist noen typiske forløp. La oss tenke oss at vi starter med et antall individer N_0 i populasjonen som er lavere enn bærekapasiteten **M.** Funksjonen følger da en s-formet kurve som vist nederst i fig., mens øverste forløp fås fram ved å velge N_0 større enn bærekapasiteten M.

Vi kan finne eventuelle vendepunkter for grafen ved å studere den dobbeltderiverte av **N(t)**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dN}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\big(k\cdot N(M-N)\big)$$
$$= \frac{d}{dt}\big(k\cdot M\cdot N - k\cdot N^2\big)$$
$$= k\cdot M - k\cdot 2\cdot N \quad = \quad k\cdot(M-2N)$$

Dette gir oss at

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dN}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow k\cdot(M-2N) = 0 \Leftrightarrow M - 2N = 0 \Leftrightarrow \quad \underline{N = \frac{M}{2}} \quad \text{(fig.3.2.9)}$$

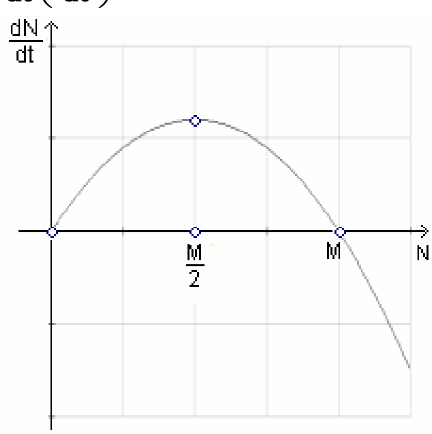


Fig.3.2.9

N(t) vokser altså raskest når ant. individer har nådd **halvparten** av populasjonens bærekapasitet. Vi kan finne ut når dette skjer ved å løse likningen $N(t) = \dfrac{M}{2}$:

$$N(t) = \frac{M}{2} \Leftrightarrow \frac{M}{1+C\cdot e^{-k\cdot M\cdot t}} = \frac{M}{2} \Leftrightarrow 1 + C\cdot e^{-k\cdot M\cdot t} = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad C\cdot e^{-k\cdot M\cdot t} = 1 \Leftrightarrow e^{-k\cdot M\cdot t} = \frac{1}{C}$$
$$\Leftrightarrow -k\cdot M\cdot t = -\ln C \Leftrightarrow t = \underline{\frac{\ln C}{k\cdot M}}$$

Setn.3.2.10 **Logistisk vekst uttrykt ved differensiallikningen** $\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot (M - N)$
der M er miljøets bærekapasitet (og (M - N) er ledig kapasitet),
har den generelle løsningen $N(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-k \cdot M \cdot t}}$.
N(t) vokser raskest når $N(t) = \frac{M}{2}$ **, noe som inntrer når** $t = \frac{\ln C}{k \cdot M}$.

En naturlig generalisering av denne modellen får vi ved å anta at det i tillegg til en bærekapasitet **M**, også finnes en nedre grense **H** (**H < M**) for at bestanden kan opprettholdes. Vi kan kalle **H** ***den minimale levedyktige bestanden***. Da kan en vise at differensiallikningen som beskriver denne bestandens vekst blir

$\frac{dN}{dt} = -k \cdot (N - H)(N - M)$. Denne differensiallikningen er selvsagt nettopp på formen $\frac{dy}{dt} = a(y - A)(y - B)$

med **a = -k**, **y = N**, **A = H** og **B = M**. I avsnitt 3.1 viste vi at løsningen av denne differensiallikningen blir

$$y = A + \frac{B - A}{\left(1 + c \cdot e^{(B-A) \cdot at}\right)},\ c \in R.$$

I vårt tilfelle, med en nedre og en øvre grense for populasjonen blir altså differensiallikningsmodellen $\frac{dN}{dt} = -k \cdot (N - H)(N - M)$ og løsningen blir dermed $y = H + \frac{M - H}{\left(1 + c \cdot e^{(M-H) \cdot (-k) \cdot t}\right)},\ c \in R.$

I avsnitt 3.1 har vi vist kvalitativt hvordan integralkurvene til denne differensiallikningen blir. I vårt tilfelle får vi integralkurver som vist i fig.3.2.11.

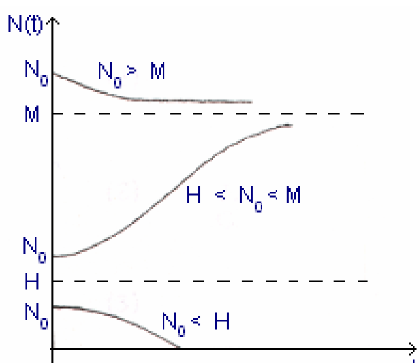


Fig.3.2.11

Igjen ser vi av fig.3.2.11 at initialtilstanden i populasjonen har betydning for bestandsutviklingen:

① Dersom initialbestanden N_0 er mindre enn den minimale levedyktige bestandens-størrelsen **H**, så vil populasjonen ***dø ut*** etter hvert.

② Dersom initialbestanden N_0 er mellom **H** og bærekapasiteten **M**, så vil bestanden vokse mot **M** som grense, og veksten vil avta med tiden ettersom bestanden nærmer seg den øvre grensen **M**.

③ Dersom initialbestanden N_0 er større enn den øvre grensen **M**, vil populasjonen avta mot den øvre grensen **M**.

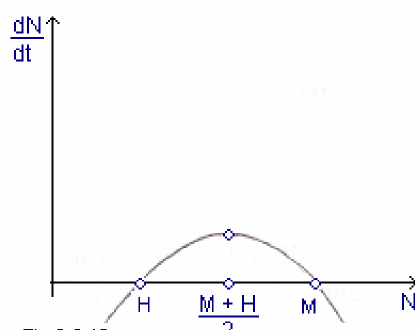


Fig.3.2.12

Vi vet også at populasjonen vil vokse raskest når den dobbeltderiverte er lik 0.

Siden $\frac{dN}{dt} = -k \cdot (N - H)(N - M)$ vil

$$\frac{d}{dt}\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-k \cdot (N - H)(N - M)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[-k\left(N^2 - MN - HN + HM\right)\right]$$

$$= -k \cdot \frac{d}{dt}(2N - M - H)$$

og $\frac{d}{dt}\frac{dN}{dt} = 0 \Leftrightarrow -k \cdot (2N - M - H) = 0 \Leftrightarrow N = \frac{M + H}{2}$ slik at populasjonen vokser raskest når antall individer er midt mellom nedre og øvre grense for bestanden.

Oppgaver til avsnitt 3.2.

Oppg.3.2.13 Bestem ved derivasjon når den gitt løsningsfunksjonen til de logistiske vekstmodellene gitt nedenfor er i ferd med å vokse raskest. Tegn grafen og finn fellestrekk.

a. $\mathbf{y(t) = \dfrac{100}{1+5e^{-0,2\cdot t}}}$ b. $\mathbf{y(t) = \dfrac{1}{1+250e^{-0,2\cdot t}}}$

c. $\mathbf{y(t) = \dfrac{1000}{1+9e^{-0,4\cdot t}}}$ d. $\mathbf{y(t) = \dfrac{50}{1+6e^{-0,1\cdot t}}}$

Oppg.3.2.14 a. Løs differensiallikningen i eks.3.2.2.
b. La oss anta at Søylegrana kan bli **15 m** høy, anta at søylegranas høyde ved observasjonsstart er **0,1 m**. og at den er vokst til **2m** etter **5 år**.
Finn en funksjonsmodell **H(t)**, for Søylegranas vekst og tegn grafen til **H(t)**.

Oppg.3.2.15 På et cruiseskip er det **800** mennesker om bord. En passasjer har en infeksjons-sykdom som har spredt seg til **3** mennesker etter **12 timer**. Siden symptomene for sykdommen ikke viser seg tidlig, kan ikke smittede passasjerer settes i karantene.
En vaksine må flys inn med helikopter og kan ikke ankomme før etter **72 timer**.
Anta at spredningsraten for sykdommen er proporsjonal både med antall mennesker på skipet som er smittet og med de som ennå ikke er smittet.
a. La **S(t)** bety antall smittede t timer etter starten og sett opp en differensiallikningsmodell for utviklingen i antall smittede på skipet.
b. Hva er **S(0)** og hva er **S(3)**?
Bruk disse opplysningene til å beregne hvor mange passasjerer som er smittet når vaksinen ankommer.

Oppg.3.2.16 I en studie av interaksjon mellom Præriehøns slapp en gruppe psykologer ut **100** fugler i et beskyttet og begrenset område. To år senere hadde populasjonen øket til **150**.
Økologer hadde på forhånd beregnet at områdets bærekapasitet var på **1000** fugler.
Anta at en logistisk vekstmodell med god tilnærming beskriver utviklingen i Præriehøns-populasjonen.
a. La **N(t)** bety antall præriehøns i området og lag en logistisk vekstmodell for populasjonen.
b. Hvor mange Præriehøns måtte psykologene forvente å finne i området etter **5** år i følge denne modellen?

Oppg.3.2.17 Gitt funksjonsuttrykket $\mathbf{y(t) = \dfrac{100}{1+5\cdot e^{-0,2\cdot t}}}$. Anta denne modellen beskriver utviklingen av antall individer i en populasjon i et område som funksjon av tiden.
a. Bestem miljøets bærekapasitet.
b. Bestem konstantene **C** og **k** og finn ut hvor mange individer det var i populasjonen i starten av studiet av populasjonen (dvs. ved tiden **t = 0**).
c. Tegn grafen til vekstmodellen.
d. Beregn når antall individer i populasjonen er fordoblet.

Oppg.3.2.18 En ny energisparende oppvarmingsenhet ble introdusert på det norske markedet i **2001**.
Veksten i aksepteringen av den nye oppvarmingsenheten antas å følge den logistiske vekstmodellen.
Anta at enheten i starten i **2001** ble introdusert til **0,01 %** av den norske befolkningen og at det i år (**2003**) er **0,05 %** av befolkningen som bruker den.
a. Lag en logistisk vekstmodell for veksten i bruken av oppvarmingsenheten.
b. Bestem den generelle løsningen av differensiallikningen.
c. Bruk de gitte opplysningene til å beregne hvor stor **%**-andel av befolkningen som vil bruke den energisparende oppvarmingsenheten i **2010**.

Oppg.3.2.19 Eksamen **M4**. Ny prøve. **06.06.97**. nr. **5.b**.
Eksamen **M4**. **11.05.01**. nr. **4**.
Eksamen **M2**. **11.06.02**. nr. **4**.

4.1 Allometrisk vekst

Når en organisme vokser, er det sjelden at alle deler eller organer vokser med samme veksthastighet. Normalt vil derfor organismens form endre seg med tiden. Dett kalles allometrisk vekst (i motsetning til isometrisk vekst der formen bevares.)
La **y = y(t)** være størrelsen av et gitt organ ved tiden t, og la **x = x(t)** være størrelsen av organismen som helhet ved tiden t. I mange forsøk har det vist seg at **y** og **x** (tilnærmet) er knyttet sammen ved følgende formel.

Allometriloven: $\mathbf{y = c \cdot x^r}$, der **c** og **r** er reelle konstanter.

(**c** avhenger av hvilke enheter en bruker for **x** og **y**.)

Allometriloven kan ha høyst ubehagelige konsekvenser. Hvis kroppsstørrelsen til et dyr øker ut over det som er "normalt", og dette skjer uten at dyrets "allometrikonstanter" endres, så kan enkelte kroppsdeler bli så underdimensjonert eller overdimensjonert et det er livstruende. Det kan være noe slikt som er skjedd med den irske kjempehjorten, Megaloceros, vist i fig.3.3.1, der geviret er overveldende stort.

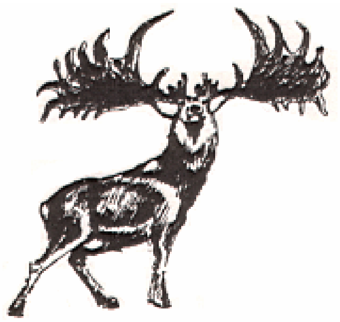


Fig.3.3.1

Vi kan nå tolke $\frac{dx}{dt}$ som kroppens vekstrate, mens $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$ er kroppens relative vekstrate. Vi gjør nå den enkle antagelsen at kroppsdelens relative vekstrate $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ er proporsjonal med kroppens relative vekstrate $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$, dvs. at det finnes en positiv konstant r slik at likningen $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r \cdot \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$ holder ved ethvert tidspunkt t. Begge sider i likningen er funksjoner av t, og vi kan integrere med hensyn på t :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r \cdot \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int r \cdot \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int r \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| + C_1 = r \cdot \ln|x| + C_2 \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x|^r + C_3 \quad , \quad C_3 \in \mathbf{R}$$

Siden y og x er positive størrelser, kan vi sløyfe absoluttverditegnene slik at vi får

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r \cdot \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \ln y = \ln x^r + C_3 \Leftrightarrow e^{\ln y} = c \cdot e^{\ln x^r} \Leftrightarrow \underline{y = c \cdot x^r} \quad , \quad c = e^{C_3} \in \mathbf{R}$$

Setn.4.1.1 **Allometrisk vekst kan uttrykkes ved differensiallikningen $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r \cdot \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$ der y = y(t) er størrelsen av et gitt organ til en bestemt organsime ved tiden t, og x = x(t) er størrelsen av organismen som helhet ved tiden t.**
Da er $y = c \cdot x^r$, der r er en konst. som er avhengig av enhetene en bruker for x og y.

Oppgaver til avsnitt 4.1

Oppg.4.1.2 Hos hankrabber av arten Uca Pugnax har man sammenliknet vekten y av den store kloa med vekten x av resten av kroppen. Noen målinger ga følgende gjennomsnittlige verdier i forskjellige vektklasser:

x (mg)	57,6	156,1	270,0	420,1	617,9
y (mg)	5,3	25,1	59,0	135,0	243,0

a. Bruk dataene i tabellen og $\mathbf{y = c \cdot x^r}$ til å lage en empirisk formel som gir vekten av kloa som funksjon av vekten av resten av kroppen.
b. Still opp en differensiallikning som kan beskrive dette vekstforløpet og løs den.

Oppg.4.1.3 a. Eks. **05.12.02** nr. **5.**
b. Eks. **31.08.04** nr. **5**.

5.1 Differensiallikningssystemer – et eksempel

Med unntak av modellen for allometrisk vekst, var det i modellene vi hittil har diskutert snakk om en størrelse y som varierte med tiden, på en slik måte at vekstraten $\frac{dy}{dt}$ var gitt som en funksjon av y. I mange modeller for eksempel i økologi, medisin og kjemi inngår det ikke bare en, men ofte to eller flere størrelser, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ som varierer med tiden. Vanligvis vil disse størrelsene virke inn på hverandre på en slik måte at vekstraten $\frac{dy_i}{dt}$ til en gitt størrelse y_i ikke bare avhenger av y_i men også av de andre størrelsene. La oss nå se på et eksempel fra økologien. Det er den berømte modellen til Alfred Lotka og Vittora Volterra som ble lansert omkring 1925. Modellen beskriver relasjonen mellom to arter som benytter samme næringskilde.

Lotka-Volterras modell

Vi tenker oss to dyrearter hvorav den ene (predator) lever av å jakte på den andre (bytte). Vi lar **x(t**) være populasjonstørrelsen til byttedyrbestanden og **y(t)** være populasjonsstørrelsen til predatorbestanden.
Vi gjør følgende antakelser om bestandene av byttedyr og predatorer:

- Vi tenker oss at det er nok næring, plass osv. for byttet slik at den relative vekstraten for byttedyret $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$ vil være konstant lik **b** hvis det ikke hadde vært predatorer til stede.
- Vi antar at tilstedeværelsen av predatorer reduserer byttets relative vekstrate med en faktor **p**

  som er proporsjonal med predatorbestandens størrelse. (Jo flere predatorer, jo flere byttedyr spises.)

Dette gir oss differensiallikningen

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = b - p \cdot y$$

, der **b > 0** og **p > 0** er reelle konstanter.

På den annen side tenker vi oss at

- Predator-bestanden ville avta eksponentielt hvis det ikke var byttedyr til stede. Den relative vekstraten $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ for predatorene ville da være negativ og konstant lik **– k** for et bestemt reelt tall **k**.
- Med byttedyr til stede tenker vi oss at predatorbestanden øker med en faktor som er porporsjonal med byttebestandens størrelse **x**.

Dette gir oss differensiallikningen $\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = -k + m \cdot x$, der **k > 0** og **m > 0** er reelle konstanter.
Multiplikasjon med henholdsvis x og y i disse to likningene gir differensiallikningssystemet

Lotka - Volterras modell for et predator – byttedyr system der x(t) er populasjonstørrelsen til byttedyr-bestanden og y(t) er populasjonsstørrelsen til predatorbestanden :

$$\frac{dx}{dt} = b \cdot x - p \cdot x \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = m \cdot x \cdot y - k \cdot y$$

Det viser seg at det ikke er mulig å uttrykke alle løsningene til dette systemet med noen av de løsningsfunksjonene vi har funnet tidligere. Vi er derfor ikke i stand til å finne noen formel for x og y. Likevel kan vi si noe om systemet. Det er for eksempel enkelt å bestemme **likevektstilstandene**, dvs. tilstandene vi får når $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$ begge er lik **0**.

Dette inntreffer når $\begin{matrix} \mathbf{b \cdot x} & - & \mathbf{p \cdot x \cdot y} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{m \cdot x \cdot y} & - & \mathbf{k \cdot y} & = & \mathbf{0} \end{matrix}$

En triviell løsning er selvfølgelig **x = 0** og **y = 0**, men det finnes en mer interessant løsning:

$\mathbf{b \cdot x - p \cdot x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{b}{p}}$. Setter vi dette inn i den siste likningen, får vi $\mathbf{x = \frac{k}{m}}$.

Løsningene $\mathbf{x = \frac{k}{m}}$ og $\mathbf{y = \frac{b}{p}}$ tolker vi slik:

Hvis bytte- og predatorbestanden er på dette nivået ved et bestemt tidspunkt, så vil bestandene ifølge modellen fortsette å holde seg der i alle fremtid. (siden $\mathbf{\frac{dx}{dt}}$ og $\mathbf{\frac{dy}{dt}}$ begge er lik **0**.) Løsningen $\mathbf{x = \frac{k}{m}}$ og $\mathbf{y = \frac{b}{p}}$ er altså en ***likevektstilstand*** for systemet. Andre likevektstilstander finnes ikke.

La oss nå gjøre et tankeeksperiment:

Sett at vi finner byttedyrene uønsket fordi de spiser opp våre nytteplanter. Vi går til anskaffelse av en gift som fjerner byttedyr med en viss prosentandel $\mathbf{k_1}$ pr. tidsenhet. Den nye differensiallikningen for byttedyrene blir da

$\mathbf{\frac{dx}{dt} = b \cdot x - p \cdot x \cdot y - k_1 \cdot x}$ der $\mathbf{k_1}$ er en positiv konstant.

Uheldigvis fjerner giften kanskje også en viss prosent $\mathbf{k_2}$ pr. tidsenhet av predatorene slik at den nye differensiallikningen for predatorene blir

$\mathbf{\frac{dy}{dt} = m \cdot x \cdot y - k \cdot y - k_2 \cdot y}$ der $\mathbf{k_2}$ er en positiv konstant.

Ser vi på likevektstilstanden for dette systemet, får vi å løse likningene

$$\begin{aligned} \mathbf{b \cdot x - p \cdot x \cdot y - k_1 \cdot x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{m \cdot x \cdot y - k \cdot y - k_2 \cdot y} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Oppg.5.1.1

Vis at en ikke-triviell løsning av likningssystemet ovenfor er $\mathbf{x = \frac{k + k_2}{m}}$, $\mathbf{y = \frac{b - k_1}{p}}$.

Vi ser av disse løsningene at ***likevektsverdien for byttedyrbestanden ikke har blitt lavere som følge av giftbruken, men høyere***!

Modellen sier selvfølgelig ikke at det alltid vil gå slik i virkeligheten, men den peker på en *mulighet* som må tas alvorlig. Biologer har allerede i lang tid vært klar over dette fenomenet, og det finnes mange eksempler der kjemisk bekjempelse (for eksempel med DDT) har ført til stikk motsatt resultat av det man var ute etter.
Det kan bevises at hvis x(t) og y(t) er en løsning av likningssystemet

$$\begin{aligned} \mathbf{\frac{dx}{dt}} &= \mathbf{b \cdot x - p \cdot x \cdot y} \\ \mathbf{\frac{dy}{dt}} &= \mathbf{m \cdot x \cdot y - k \cdot y} \end{aligned} \qquad (*)$$

så må x(t) og y(t) være ***periodiske funksjoner*** med ***samme periode***. (Jfr. fig.3.1.1.d.) Dette svarer til at vi må ha periodiske svingninger i dyrebestandene som inngår i modellen.

Vi skal avslutte med en mer grafisk beskrivelse av løsningsfunksjonene av Lotka-Volterra-likningsystemet, nemlig såkalte ***fasekurver*** for systemet. Selv om vi ikke alltid kan finne eksplisitte uttrykk for løsningene til denne type likningssystemer, så er det likevel ofte mulig å få en viss forståelse av hvordan systemets fasekurver går.

Fasekurver for løsningsfunksjonene til Lotka-Volterra likningsystemet

Vi tenker oss at **x = x(t)** og **y = y(t)** er en løsning av likningsystemet i (*). For hvert gitt tidspunkt **t** vil da **(x(t), y(t))** være et punkt i **xy**-planet, slik at når **t** varierer så vil **(x(t), y(t))** beskrive en kurve i **xy**-planet. Denne kurven kalles vanligvis for en ***fasekurve*** for systemet.

Eks5.1.2 Vi ser nærmere på det spesialtilfellet av Lotka-Volterras modell som vi får ved å sette **b = p = m = k = 1**.
Vi får da:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - x \cdot y \\ \frac{dy}{dt} &= x \cdot y - y \end{aligned} \qquad (*)$$

Vi kan anta at **x > 0** og **y > 0**. For å få en oversikt over fasekurvenes retning i de ulike punktene i xy-planet, kan vi drøfte fortegnet til de deriverte $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$. Fra (*) får vi:

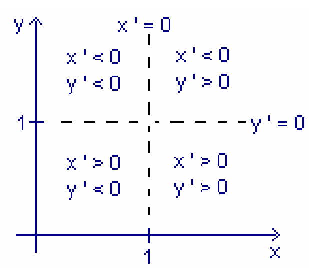


Fig.5.1.3

$$\frac{dx}{dt} > 0 \quad \text{for} \quad y < 1 \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dt} > 0 \quad \text{for} \quad x > 1 \quad \text{og}$$
$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad y = 1 \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad x = 1 \quad \text{og}$$
$$\frac{dx}{dt} < 0 \quad \text{for} \quad y > 1 \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dt} < 0 \quad \text{for} \quad x < 1 \quad \text{og}$$

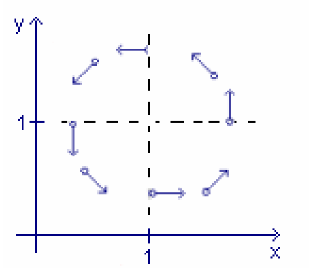


Fig.5.1.4

Disse resultatene er angitt i fig.5.1.3. Vi vet her for eksempel at når **x'** og **y'** begge er positive, så øker både **x** og **y** med voksende **t**, slik at punktet der beveger seg "oppover mot høyre" i **xy**-planet.

Vi kan resonnere på samme måten for hvert av de fire delområdene av 1. kvadrant i planet, og tegne de omtrentlige bevegelsesretningene for punkter som følger fasekurvene. Se fig.5.1.4.
Vi får en fornemmelse av at fasekurvene dreier rundt **likevektspunktet (1,1)**, men vi kan ikke uten videre tenke oss hvordan fasekurvene går. En kan likevel tenke seg tre kvalitativt forskjellige muligheter, som antydet i fig.3.4.5 nedenfor.
Vi har allerede nevnt i avsnitt (se også fig.3.1.d) at løsningene av Lotka-Volterras system er periodiske funksjoner. Det må derfor være **alternativ b.** av kurvene i fig.5.1.5 som gir det kvalitativt riktige bildet av fasekurvene.

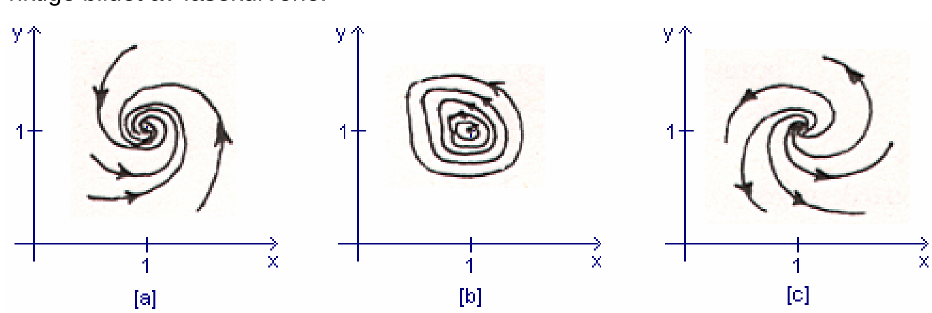


Fig.5.1.5

Det er enkelt å bestemme den nøyaktige retningen til fasekurven gjennom et bestemt punkt (x, y). Tangentretningen er nemlig gitt ved vektoren $[x', y']$.

Oppgaver til avsnitt 5.1

Oppg.5.1.6 Vi ser på en modell der det inngår to arter, hvorav den ene "predatoren" lever av å jakte på den andre, "byttet".

La $\mathbf{P} = \mathbf{P(t)}$ og $\mathbf{B} = \mathbf{B(t)}$ være antall individer av de to artene ved tiden **t** (målt i **år**).

Det er ***harmoniske svingninger*** i **P** og **B** med periode **T = 3år**. Antall byttedyr pendler mellom **6000** og **14000** og har maksimum ved tiden **t = 0**.

Antall predatorer pendler mellom **200** og **400**, og har maksimum $\frac{3}{4}$ år senere, altså når $\mathbf{t} = \frac{3}{4}$.

a. Tegn figurer som viser variasjonene i de to bestandene.
b. Sett opp funksjonslikninger for antall individer **P(t)** og **B(t)** av de to artene.

Betrakt differensiallikningssystemet

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{B}_*) \qquad \frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{P}_*)$$

der $\mathbf{B}_*$ **og** $\mathbf{P}_*$ er positive konstanter.

c. Undersøk om funksjonene du fant i a. er en løsning av dette systemet for passende verdier av konstantene, og finn i så fall disse verdiene.
(HiNT: Sett inn uttrykkene for **P(t)** og **B(t)** i likningssystemet.)

Oppg.5.1.7 Tenk deg to dyrearter som konkurrerer om de samme ressursene. La **x = x(t)** og **y = y(t)** være antall individer av hver av artene ved tidspunkt t.
Tenk deg at følgende enkle modell er oppfylt

$$\frac{dx}{dt} = a\cdot x - b\cdot x\cdot y \qquad \frac{dB}{dt} = -r\cdot x\cdot y + s\cdot y$$

der a, b, r og s er positive konstanter.

a. Kan du tenke deg en biologisk tolkning av disse likningene?
b. Finn systemets likevektstilstand.
c. Drøft fortegnet til $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$.
d. Tegn en skisse som i grove trekk viser fasekurvene til systemet i xy-planet.
(Du kan ta for gitt at fasekurvene ikke skjærer hverandre.)

Det såkalte "eksklusjonsprinsippet" i økologien sier at hvis to arter konkurrerer om de samme ressursene (dvs. de lever i samme "økologiske nisje"), så vil den ene arten etter hvert dø ut.

e. Se på fasekurvene som du tegnet i d. Ser det ut som at et slik prinsipp holder i denne modellen?

Oppg.5.1.8 a. Eks. **16.05.01** nr. **5**.
b. Eks. **23.05.03** nr. **5**.

6.1 Øvingsoppgaver

Oppg.6.1.1 Løs de homogene differensiallikningene:

a. $y' - 2x \cdot y = 0$ b. $y' - 3x^3 \cdot y = 0$ c. $y' - \frac{1}{x} \cdot y = 0$

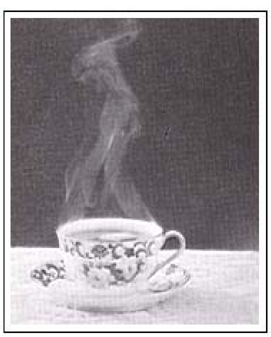
d. $y' - \frac{1}{2x-3} \cdot y = 0$ e. $y' - \frac{2x}{x^2+3} \cdot y = 0$ f. $y' - \ln x \cdot y = 0$

Oppg.6.1.2 **Cellevekst.**
La $V = V(t)$ være volumet av en celle ved tiden **t**. Fordi næringsopptaket skjer gjennom cellens overflate, antar vi at vekstraten $V'(t)$ er proporsjonal med overflatens størrelse.
Anta at cellen vokser uten å forandre form. Det kan da vises at overflaten **O** er proporsjonal med $V^{\frac{2}{3}}$. Dette leder til differensiallikningen $V'(t) = k \cdot V^{\frac{2}{3}}$ der k er en positiv konstant.
Løs denne differensiallikningen når $V(0) = V_0$ og tolk resultatet.

Oppg.6.1.3 **Populasjonsvekst**.
Vi betrakter en populasjon som ved tiden **t = 0** har N_0 individer. La **N = N(t)** være antall individer i populasjonen ved tiden **t**. Vi antar at populasjonen vokser på en slik måte at den relative vekstraten (se ovenfor) er proporsjonal med N^r der **r** er en positiv konstant.
Still opp en differensiallikning for veksten i populasjonen og løs den med betingelsen $N(0) = N_0$.

Oppg.6.1.4 **Kjemiske reaksjoner**.
Når grunnstoffet Jod reagere med grunnstoffet Sølv, f.eks. ved at Jod-damp ledes over en bit Sølv, danner det seg på Sølvet en hinne av Sølvjodid.
Etter hvert som hinna blir tykkere, har joddampen vanskeligere for å reagere med Sølvet.
Det er derfor rimelig å anta at hinna blir tykkere med en hastighet $\frac{dy}{dt}$ som er omvendt proporsjonal med tykkelsen **y**: $\frac{dy}{dt} = k \cdot \frac{1}{y}$ der k er en positiv konstant.
Løs differensiallikningen når vi forutsetter at **y = 0** når **t = 0**.

Oppg.6.1.5 **Newtons avkjølingslov**



Newtons avkjølingslov fastsetter at et varmt objekt avkjøles i kaldere omgivelser slik at avkjølingsraten (dvs. forandringen i temp. pr. tidsenhet) er proporsjonal med forskjellen mellom objektets og omgivelsenes temperatur.
Anta en kopp te som holder 95^o **Celsius** settes på et bord i et rom med konstant temperatur på 20^o **Celsius**. Sett opp en differentiallikning for temperatur-utviklingen i teen. La **t** bety tiden (målt i minutter) etter det tidspunkt koppen settes inn i rommet og La **T(t)** være temperaturen i teen ved tidspunkt **t**.
Løs differensiallikningen og finn ut hvor lang tid det tar før temperaturen i teen er halvert.

Oppg.6.1.6 **Plantevekst**.
En regner ofte at en plantes vekstforandring (høyden) er proporsjonal med produktet av plantens høyde og differansen mellom plantens høyde og dens maksimumshøyde.
La **H** = plantens maskimums-høyde og **y = y(t)** være plantens høyde ved tidspunkt t (målt i uker). Still opp en differensiallikning for utviklingen av plantens høyde og løs den når vi vet at plantens høyde ved utplantings-tidspunktet **t = 0** er **0,15 m** men planten blir målt å være **0,30 m** høy etter **2 uker**.
Hvor lang tid tar det for planten å nå en høyde på **1 m**?

Oppg.6.1.7 **Idespredning i en befolkning**.

I sosiologi hender det at man er interessert i å beskrive hvor fort en ny ide sprer seg i en befolkning. Vi tenker oss en befolkning med fast antall individer som vi antar er **P =** $\mathbf{4 \cdot 10^7}$ individer. La **y = y(t)** være en deriverbar funksjon som tilnærmet gir det antall individer som ved tiden t kjenner til den nye ideen.

$\mathbf{\frac{dy}{dt}}$ kaller vi spredningsraten, og vi kan anta at spredningsraten til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall individer som kjenner til ideen og antall individer som ikke gjør det. Kall proporsjonalitetskonstanten **k**.

a. Still opp en differensiallikning for **y**.

b. For hvilken verdi av y er spredningsraten størst?

c. Anta at nøyaktig halvparten av befolkningen kjenner til ideen ved tiden **t = 0** og **at k =** $\mathbf{0{,}25 \cdot 10^{-7}\ (år^{-1})}$.
Bestem **y** som funksjon av **t**.

Oppg.6.1.8 **Dyrepopulasjonsvekst**.

En dyrebestand består ved tiden **t = 0** av **4000** individer.

a. Vi skal først betrakte en logistisk vekstmodell for denne dyrebestanden, og vi setter $\mathbf{\frac{dN}{dt} = 0{,}0001 \cdot N \cdot (10000 - N)}$, dvs. bærekapasiteten er **10000** individer, og ledig kapasitet er **10000 - N**, der **N = N(t)** er ant. individer **t** år etter **t = 0**.
Løs differensiallikningen og bestem et uttrykk for **N(t).**

b. Bestem hvilken størrelse bestanden i det lange løp vil stabilisere seg på.

Oppg.6.1.9 **Dyrepopulasjonsvekst**.

En bestand av smågnagere har en konstant relativ vekstrate på **0,5** (pr. år) når den får være i ro. For å holde bestanden i sjakk, beskattes den med **2400 dyr** pr. år.
Still opp en differensiallikning for bestanden etter at vi har begynt å beskatte den. Løs denne likningen under forutsetning av at det er **5000** individer til å begynne med.

7.1 Fasit til kapiteloppgaver og øvingsoppgaver

Avsnitt 1.4

1.4.8 Funksjoner av typen **y = C**, der **C** er en reell konstant.

1.4.9 Funksjoner av typen $\mathbf{y = k \cdot x}$, der **k** er en reell konstant.

1.4.10 Funksjoner av typen $\mathbf{y = \frac{1}{2}x^2 + C}$, der **C** er en reell konstant.

1.4.11 Funksjoner av typen $\mathbf{y = \frac{1}{2}k \cdot x^2 + C}$, der k og **C** er reelle konstanter.

1.4.12 Funksjoner av typen $\mathbf{y = \frac{1}{n+1}a_n \cdot x^{n+1} + y = \frac{1}{n}a_{n-1} \cdot x^n + \ldots + \frac{1}{2}a_1 x^2 + a_0 x + C}$

der $\mathbf{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0}$ og **C** alle er reelle konstanter.

Avsnitt 1.5

1.5.8 a. $\mathbf{y = \ln|x| + C}$, der **C** er en reell konstant.

b. $\mathbf{y = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + C}$, der **C** er en reell konstant.

1.5.9 Generell løsning: $\mathbf{y = 2 \cdot \ln|x^2+1| + C}$, der **C** er en reell konstant.

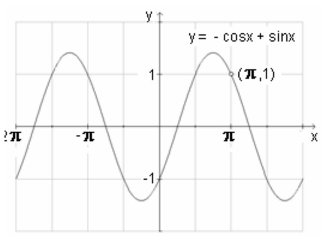
Spesiell løsning: $\mathbf{y = 2 \cdot \ln|x^2+1| + 1}$

1.5.10 Generell løsning: $\mathbf{y = x - 3\ln|x+2| + C}$, der **C** er en reell konstant.

1.5.11 Generell løsning: $\mathbf{y = -\cos x + \sin x + C}$, der **C** er en reell konstant.

Spesiell løsning: $\mathbf{y = -\cos x + \sin x}$

Grafe:



1.5.12 a. $\mathbf{y = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C \; , \; C \in R}$ b. $\mathbf{y = -e^{-x} + C \; , \; C \in R}$

c. $\mathbf{y = \frac{1}{-2}e^{-x^2} + C \; , \; C \in R}$ d. $\mathbf{y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C \; , \; C \in R}$

e. $\mathbf{y = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\sqrt{1-x}\right)^5 + C \; , \; C \in R}$

f. $\mathbf{y = \sqrt{x^2+1} + C \; , \; C \in R}$ g. $\mathbf{y = -\left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot e^{-x} + C \; , \; C \in R}$

1.5.13 $\mathbf{y = x \cdot \ln x - x + C \; , \; C \in R}$

1.5.14 a. $\mathbf{y = -\frac{4}{e} \cdot e^{\sqrt{t^4+1}} + C \; , \; C \in R}$ b. $\mathbf{y = \sqrt{2e^{x^2} - 1}}$

Avsnitt 1.6

1.6.5 a. $\mathbf{y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x} \; , \; C \in R}$ b. $\mathbf{y = C \cdot e^{4x} \; , \; C \in R}$

c. $\mathbf{y = C \cdot e^{-2x} \; , \; C \in R}$ d. $\mathbf{y = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2 \; , \; C \in R}$

1.6.6 a. $\mathbf{y' = e^x}$ c. $\mathbf{y' = e^x = y}$

1.6.7

$$\mathbf{y'' = -C_1 \sin t - C_2 \cos t}$$

$$\mathbf{y'' = -C_1 \sin t - C_2 \cos t = -\left(C_1 \sin t - C_2 \cos t\right) = -y}$$

$$\mathbf{y'' = -y \Leftrightarrow y'' + y = 0}$$

1.6.8

$$\mathbf{y'' = -\lambda^2 \cdot C_1 \sin \lambda t - \lambda^2 \cdot C_2 \cos \lambda t}$$

$$\mathbf{y'' = -\lambda^2 \cdot C_1 \sin \lambda t - \lambda^2 \cdot C_2 \cos \lambda t = -\lambda^2 \cdot \left(C_1 \cdot \sin \lambda t + C_2 \cdot \cos \lambda t\right) = -\lambda^2 \cdot y}$$

$$\mathbf{y'' = -\lambda^2 \cdot y \Leftrightarrow y'' + \lambda^2 \cdot y = 0}$$

1.6.9 $y'' = \lambda^2 \cdot C_1 e^{\lambda \cdot t} + \lambda^2 \cdot C_2 e^{\lambda \cdot t}$

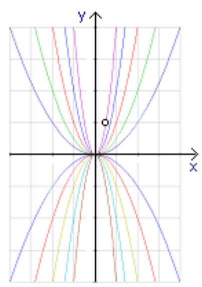
$y'' = \lambda^2 \cdot C_1 e^{\lambda \cdot t} + \lambda^2 \cdot C_2 e^{\lambda \cdot t} = \lambda^2 \cdot \left(C_1 e^{\lambda \cdot t} + C_2 e^{\lambda \cdot t}\right) = \lambda^2 \cdot y$

$y'' = \lambda^2 \cdot y \Leftrightarrow y'' - \lambda^2 \cdot y = 0$

1.6.10 $y = k \cdot x + C \quad , \quad k, C \in R$ **1.6.11** $y' = a$

1.6.12 $y = 4x^2$

Grafer:



Differensiallikning: $y' = 4\sqrt{y}$

Avsnitt 2.1 **2.1.2** Begge er separable.

2.1.4 $y' = xy + y = (x+1) \cdot y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = x + 1$

2.1.10 $y = \sqrt{x^2 + C} \; , \; C \in R$ **2.1.11** $y = \frac{1}{x + C} \; , \; C \in R$.

2.1.12 $y = \frac{C}{|x|} \; , \; C \in R$ **2.1.13** $y = C \cdot e^x - 1 \; , \; C \in R$

2.1.15 $y = C \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} \; , \; C \in R$

Avsnitt 3.1 **3.1.12** $y = 1000 \cdot e^{-0{,}06931 \cdot t}$

3.1.13 $y' = (-\lambda) \cdot k \cdot e^{-\lambda} = -\lambda \cdot y$ $y' = -\lambda \cdot y \Leftrightarrow y' + \lambda \cdot y = 0$

3.1.14 a. Differensiallikning: $\frac{dm}{dt} = k \cdot m \quad , \; \text{for } m < m_1$ Løsning: $m(t) = m_0 \cdot e^{k \cdot t} \; , \; k \in R$

b. Differensiallikning: $\frac{dN}{dt} = k \cdot (100000 - N) \; , k \in R \; , k > 0$

Løsning: $N(t) = 100000 - 99999 \cdot e^{-0{,}01505 \cdot t}$

c. Differensiallikning: $\frac{dK}{dt} = k \cdot (P - K) \; , \; k > 0$

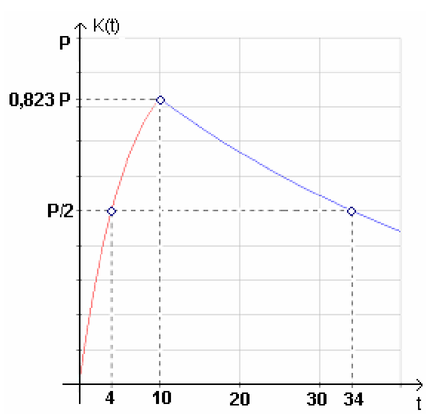
Proporsjonalitetsfaktoren $k \approx 0{,}17329$

Kunnskapsmengde v. eksamen: **82,3 % av P.**

$\frac{dK_1}{dt} = -k \cdot 0{,}823 \cdot P$ Løsning: $K_1(t) = C_1 \cdot e^{-n \cdot (t - 10)}$

n = 0,020765 $K_1(t) = 0{,}823 \cdot P \cdot e^{-0{,}020765 \cdot t}$

Grafe:



d. Differensiallikning: $\frac{dM}{dt} = 1500 - 0,05 \cdot M$

Løsning: $M(t) = 30000 - 10000 \cdot e^{-20 \cdot t}$

Differensiallikning: $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_S - T)$ Løsn.: $T(t) = T_S + (T_S - T_0) \cdot e^{-k \cdot t}$, $k \in R$

$k = 0,49532$ $T(t) = 20 + 17,5 \cdot e^{-0,49532 \cdot t}$ Drapstidspunkt: 2 timer før funn.

e. Ledig kapasitet = **2000 – F(t)** Differensiallikning: $\frac{dF}{dt} = k \cdot (2000 - F)$, $k \in R$

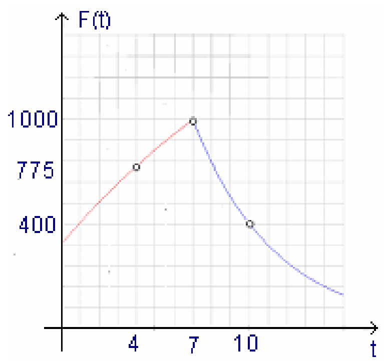
Løsning: $F(t) = 2000 - 1600 \cdot e^{-0,06677 \cdot t}$

$F(t) = 1000 \Leftrightarrow 2000 - 1600 \cdot e^{-0,06677 \cdot t} = 1000 \Leftrightarrow t \approx 7$

Differensiallikn.: $\frac{dF}{dt} = -k \cdot F$, **der** $k \in R$ **og** $k > 0$ **og** $t =$ **ant. år etter fiskestart.**

Løsning: $F(t) = 1000 \cdot e^{-0,23105 \cdot (t-7)}$ når t = ant. år etter tellestarten.

Grafer:



f. Differensiallikning: $\frac{dP}{dt} = k \cdot (15000 - P)$

Generell løsning: $P(t) = 15000 - C \cdot e^{-k \cdot t}$, $C, k \in R$ $k > 0$

Funksjon: $P(t) = 15000 - 14999 \cdot e^{-0,034654 \cdot t}$

I løpet av de 10 første dagene var **4394** smittet.

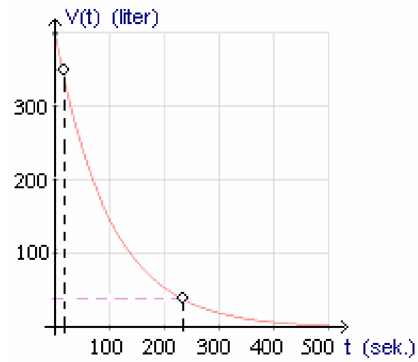
g. Etter 50 døgn er rødspetten **1,38 cm** lang.

Rødspetten kan bli **68,5 cm** lang

Det tar **21,5 min** før kaffen har temp. $15^{o}C$.

h. $V(t) = 400 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$

Grafe:



Etter **13 sekunder** har 50 l rent ut av karet.

Etter **230 sek** har 90 % av vannet rent ut av karet.

Karet blir **aldri helt tomt iflg. modellen**, siden V(t)>0 for alle t, men i praksis vil det kun være 1 ml igjen i karet etter ca. **1300 sek**.

i. Differensiallikningen $\frac{dG}{dt} = -0,0002 \cdot G$ uttrykker at giftmengden minsker med 2/10000 av den giftmengden som til enhver tid finnes i vannet.

Løsning: $\mathbf{G(t) = 5 \cdot e^{-0{,}0002 \cdot t}}$ Giftmengden er halvert i løpet av **3466 døgn**.

Ny differensiallikning: $\mathbf{\frac{dG}{dt} = -0{,}0002 \cdot G + 0{,}003}$.

Løsning: $\mathbf{G(t) = 15 - 10 \cdot e^{-0{,}0002 \cdot t}}$. I det lange løp vil giftmengden gå mot 15 tonn.

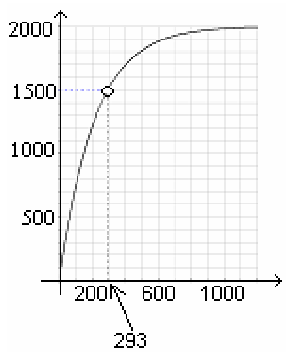
j. $\mathbf{y = 2x^2 + bx \;\Rightarrow\; y' = 4x + b \;\Rightarrow\; y' - \frac{y}{x} - 2x = 4x + b - \frac{2x^2 + bx}{x} - 2x = 0}$, så funksjonen y passer i likningen. Med nullpunkt i x = 2, blir $\mathbf{y = 2x^2 - 4x}$.

Differensiallikning: $\mathbf{\frac{dN}{dt} = k \cdot (2000 - N)\;,\; k \quad R\;,\; k > 0}$

Veksten er raskest i starten og avtar etter hvert som bakterieantallet nærmer seg øvre grense på 2000.

Løsning: $\mathbf{N(t) = 2000 - 1990 \cdot e^{-0{,}004711 \cdot t}}$

Kulturen passerer 1500 bakterier etter **293 minutter**.
Grafe:



k. Differensiallikning: $\mathbf{\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{1000} \cdot y - 100}$

Det vil ta 95,3 min å tømme tanken.
liter olje er sluppet ut i den tida pumpa har vært på.
Det var liter olje i tanken da den begynte å lekke.

l. Antagelsen er at endringen i fiskebestanden er proporsjonal med ledig kapasitet i Fiskevannet. (Jo mindre differanse mellom bærekapasiteten og antall fisk, jo mindre økning i fiskebestanden.)

8. Referanser

[**Alfsen. 1973**]	"Differensiallikninger. 2 utg."	Knut Alfsen, Erik Alfsen.	Aschehough.	1973
[**Burgmeier. 1990**]	"Calculus with applications."	James Burgmeier, Monte Boisen, Max Larsen	McGraw-Hill Publ.	1990
[**Doucet. 1992**]	"Mathematical modelling in life sciences."	Paul Doucet, Peter Sloep	Horwood Ltd.	1992
[**Gulliksen.1991**]	"Matematikk i praksis."	Tor Gulliksen.	Universitetsfl.	1991
[**Reed. 1974**]	"Økomatematikk. Kvalitative matematiske metoder i økologi."	Jon Reed.	Univ. i Tromsø.	1974