

Rekker og transformer

Anton Bjartnes

Høgskolen i Nord-Trøndelag
Kompendium

Steinkjer 2007



Rekker og transformer

Anton Bjartnes



Høgskolen i Nord-Trøndelag

Kompendium

Avdeling for sykepleier-, ingeniør- og lærerutdanning

ISBN 82-7456-503-7

Steinkjer 2007

Forord

Denne boka omhandler det mest sentrale stoffet innenfor fagområdene integrasjonsanvendelser, rekker, funksjoner av flere variable, Laplace-transform, Fourier-rekker og Fourier-transform. Stoffet i boka bygger hovedsaklig på det dere lærte i faget Derivasjon og differensiallikninger, mens kapitlet om rekker bygger på faget Diskret matematikk og lineær algebra.

Etter hvert kapittel kommer en side med oppsummerende oppgaver som inngår i de obligatoriske øvingene. Fasitsvar til disse står bakerst i boka.

Ellers er sidetallet i boka forholdsvis lavt, min mening med dette er å fokusere på det viktigste i pensum og ikke på uvesentligheter. Hvis dere synes deler av stoffet er mangelfullt behandlet kan jeg gi råd angående valg av tillegglitteratur.

Levanger, 31. juli 2006

Anton Bjartnes

Innholdsfortegnelse

1. Integrasjonsanvendelser	1
2. Potensrekker	15
3. Funksjoner av flere variable	31
4. Laplace-transformen	46
5. Fourier-rekker	62
6. Fourier-transformen	75
Fasit til oppgavene	91
Stikkordregister	97

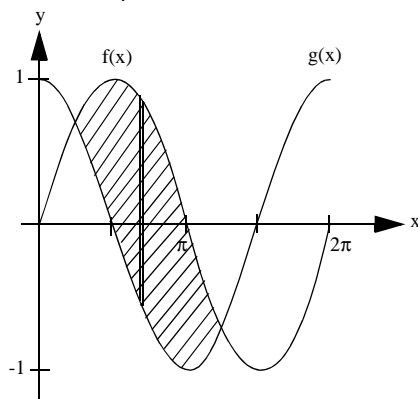
1 Integrasjonsanvendelser

I faget Derivasjon og diff-likninger benyttet vi integrasjon til beregning av areal. Vi fant først et uttrykk for arealet dA av en tynn vertikal stripe før vi integrerte dette uttrykket og satte inn integrasjonsgrensene. Vi kan starte med å friske opp dette gjennom et lite eksempel:

Eksempel 1.1:

Finn arealet som avgrenses av kurvene $f(x) = \sin x$ og $g(x) = \cos x$ i første periode ($0 - 2\pi$).

Løsning: For å få den fulle oversikten over problemet er det alltid lurt å tegne en figur:



Vi skjønner da at det er det skraverte arealet på figuren som skal beregnes. Arealet av den tynne vertikale stripa er $dA = (\sin x - \cos x)dx$

Så var det integrasjonsgrensene. De to kurvene skjærer hverandre når $\sin x = \cos x$. Divisjon med $\cos x$ gir $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee \frac{5\pi}{4}$

$$\text{Da er } A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)dx = [-\cos x - \sin x] \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$\left(-\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

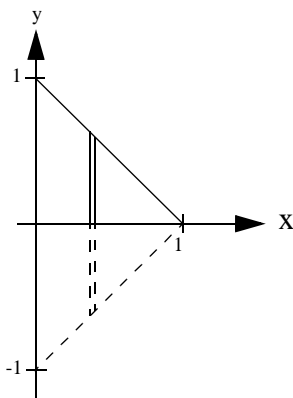
Hvis vi bruker figuren finner vi relativt enkelt de eksakte verdiene:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Vi skal på de nærmeste sidene se at integrasjon også kan benyttes til andre ting.

Volum av omdreiningslegemer, horisontale akser

Ta utgangspunkt i et areal som i sin helhet ligger over x-aksen. Vi kan ta trekanten avgrenset av $y = 1 - x$ og koordinataksene som eksempel. Tenk deg nå at dette arealet roteres om x-aksen. Vi får da fram et kjegleformet romlegeme (se figur).



Etter som dette romlegemet er resultat av en rotasjon, kaller vi det for omdreiningslegeme (eller rotasjonslegeme). Dersom vi kjenner prinsippene for vanlig arealintegrasjon, vil det ikke oppfattes som særlig vanskelig å finne volumet til slike romlegemer.

Vi tenker på nøyaktig samme måte: Først setter vi opp et uttrykk for volumet som oppstår når en tynn vertikal stripe i trekanten dreies rundt x-aksen. Vi får da en tynn sirkelskive, og volumet av denne er $dV = \pi(1-x)^2 dx = \pi(1-2x+x^2)dx$

Til slutt er det bare å integrere dette uttrykket fra $x = 0$ til $x = 1$. Vi får da hele volumet:

$$V = \pi \int_0^1 (1-2x+x^2) dx = \pi \left[x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \pi \left[\left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) - 0 \right] = \frac{\pi}{3}$$

I formelsamlinga står volumet av en kjegle angitt som $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, der r er radius i grunnflaten og h er høyden. I dette tilfellet er $r = 1$ og $h = 1$, og volumet blir selvfølgelig $\frac{\pi}{3}$.

Da har vi beregnet volumet av en kjegle ved hjelp av integrasjon. Og ikke var det spesielt vanskelig heller!

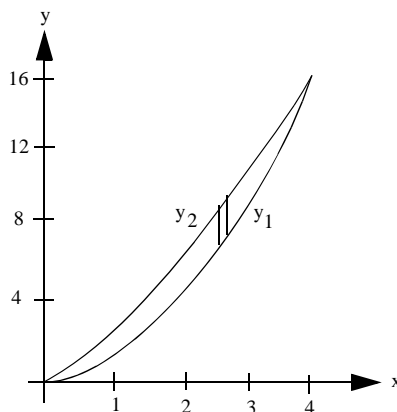
Dersom omdreiningslegemet ikke er avgrenset av rotasjonsaksen, vil det ha et hull i midten. På neste side er et eksempel der dette er tilfelle.

Eksempel 1.2:

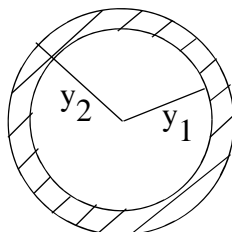
Finn volumet av omdreingslegemet som oppstår når arealet avgrenset av kurvene $y_1 = x^2$ og

$$y_2 = 2x\sqrt{x} \text{ roteres om x-aksen.}$$

Løsning: Det er alltid smart å starte med en liten figur:



Vi ser av figuren at skjæringspunktene mellom y_1 og y_2 er $x = 0$ og $x = 4$ (lett å finne også ved regning). Det neste blir da å finne et uttrykk for volumet dV som oppstår når den tynne vertikale stripen på figuren roterer om x-aksen. Vi får da en sirkelskive med et svært hull i:



Det skraverte arealet på figuren er $\pi y_2^2 - \pi y_1^2 = \pi[(2x\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] = \pi(4x^3 - x^4)$

NB! Det kan være fort gjort å sette arealet lik $\pi(y_2 - y_1)^2$, men dette blir forferdelig feil!

Volumet av sirkelskiva blir nå i stedet $dV = \pi(4x^3 - x^4)dx$

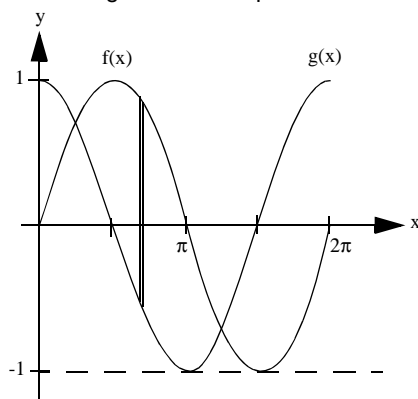
Vi kan da finne hele volumet av omdreingslegemet: $V = \pi \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx =$

$$\pi \left[x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^4 = \pi \left[256 - \frac{1024}{5} \right] = \pi \left(\frac{1280 - 1024}{5} \right) = \frac{256\pi}{5}$$

Eksempel 1.3:

Finn volumet som oppstår når arealet fra eksempel 1.1 roteres om den rette linja $y = -1$.

Løsning: Vi begynner som alltid med en figur som viser problematikken:



Vi ser at volumet dV som framkommer når den tynne stripa roterer om $y = -1$ må bli

$$dV = \pi[(\sin x + 1)^2 - (\cos x + 1)^2]dx =$$

$$\pi[(\sin^2 x + 2\sin x + 1) - (\cos^2 x + 2\cos x + 1)]dx =$$

$$\pi[\sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin x - 2\cos x]dx = \pi(2\sin x - 2\cos x - \cos 2x)dx$$

Her brukte vi den grunnleggende trigonometriske formelen $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ med det formål å få enklere integrasjon.

Volumet blir nå:

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (2\sin x - 2\cos x - \cos 2x)dx = \pi \left[-2\cos x - 2\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$\pi \left[\left(-2\cos \frac{5\pi}{4} - 2\sin \frac{5\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin \frac{5\pi}{2} \right) - \left(-2\cos \frac{\pi}{4} - 2\sin \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

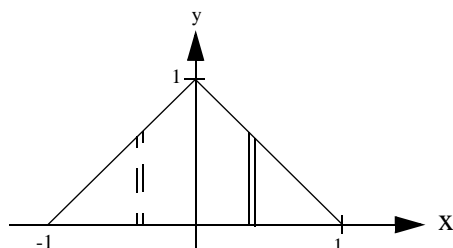
$$\pi \left[\left(\sqrt{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(-\sqrt{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \pi \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$

Nå kan vi i prinsippet finne volumet av ethvert omdreininglegeme som framkommer når et flatestykke roteres om en horisontal akse.

Volum av omdreiningslegemer, vertikale akser

Vi velger å benytte de samme grunnprinsippene når rotasjonsaksen er vertikal. Dette betyr at vi fortsatt skal finne et uttrykk for volumet dV som oppstår når en tynn vertikal stripe dreies om rotasjonsaksen. Forskjellen ligger i at dV nå ikke blir en sirkelskive, men derimot et sylinderskall.

Vi kan igjen ta for oss trekanten på side 2. Når den roteres om y-aksen får vi følgende figur:



Volumet av sylinderskallet som oppstår når vi roterer den tynne stripa om y-aksen blir:

$$dV = 2\pi x(1-x)dx = 2\pi(x-x^2)dx \quad (\text{Radius i sylindere er } x, \text{ mens høyden er } 1-x)$$

Da blir volumet av hele omdreiningslegemet:

$$V = 2\pi \int_0^1 (x-x^2)dx = 2\pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Kanskje ikke så merkelig at vi fikk samme svar som på side 2?

Eksempel 1.4:

Ta utgangspunkt i samme areal som i eksempel 1.2 og finn volumet av omdreiningslegemet med y-aksen som rotasjonsakse.

Løsning: Volumet av sylinderskallet blir i dette tilfellet

$$dV = 2\pi x(2x\sqrt{x} - x^2)dx = 2\pi \left(2x^{\frac{5}{2}} - x^3 \right) dx$$

Da kan vi regne ut hele volumet:

$$V = 2\pi \int_0^4 \left(2x^{\frac{5}{2}} - x^3 \right) dx = 2\pi \left[\frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^4 = 2\pi \left[\frac{4}{7} \cdot 4^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{4} \cdot 4^4 \right] =$$

$$2\pi \left(\frac{512}{7} - 64 \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{512 - 448}{7} \right) = 2\pi \cdot \frac{64}{7} = \frac{128\pi}{7}$$

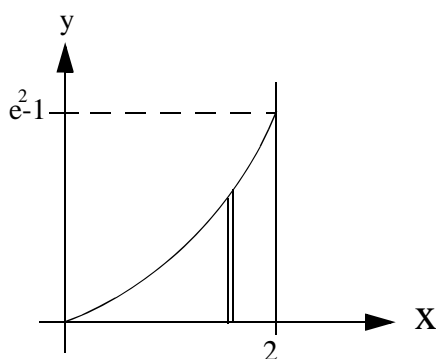
Ved nærmere ettersyn ser vi at svarene vi fikk i eksempel 1.2 og eksempel 1.4 ikke er like. Dette til tross for at det var samme areal som ble rotert, riktig nok rundt to forskjellige akser. Hva kan dette komme av?

Eksempel 1.5:

Finn volumet av omdreingslegemet som oppstår når arealet avgrenset av x-aksen, den rette linja

$$x = 2 \text{ og grafen til funksjonen } e^x - 1 \text{ roterer om akse } x = 2.$$

Løsning: Vi starter med å tegne figur:



Sylinderskallet har nå volumet $dV = 2\pi(2-x)(e^x-1)dx$, slik at hele volumet blir

$$V = 2\pi \int_0^2 (2-x)(e^x-1)dx$$

Vi løser det ubestemte integralet først, og må da benytte delvis integrasjon.

$$\text{Formelen vi benytter til dette ser slik ut: } \int g \cdot D(h) = g \cdot h - \int D(g) \cdot h$$

$$\text{Vi velger } g = 2-x \Rightarrow D(g) = -1 \text{ og } D(h) = e^x-1 \Rightarrow h = e^x-x$$

$$\begin{aligned} \text{Vi får da: } \int (2-x)(e^x-1)dx &= (2-x)(e^x-x) - \int (-1)(e^x-x)dx = \\ &= 2e^x - 2x - xe^x + x^2 + e^x - \frac{1}{2}x^2 + C = (3-x)e^x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

Da gjenstår bare å sette inn integrasjonsgrensene:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 (2-x)(e^x-1)dx = 2\pi \left[(3-x)e^x + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right] \Big|_0^2 = \\ &= 2\pi[(e^2 + 2 - 4) - 3] = 2\pi(e^2 - 5) \end{aligned}$$

Tyngdepunkt til plant flatestykke

Et plant flatestykke skal teoretisk sett kunne balanseres på en nål dersom vi plasserer nålespissen nøyaktig i flatestykkets tyngdepunkt. Koordinatene til tyngdepunktet er (\bar{x}, \bar{y}) og vi skal nå lære oss å beregne disse to koordinatene.

Den greske matematikeren Pappus fant i sin tid følgende enkle sammenhenger: $\bar{x} = \frac{V_y}{2\pi A}$ og $\bar{y} = \frac{V_x}{2\pi A}$, der A er flatestykkets areal mens V_y og V_x er volumet av omdreiningslegemene når flatestykket roterer om hhv. y - og x -aksen.

Dette innebærer at dersom vi er i stand til å finne volumet av omdreiningslegemer, er vi også i stand til å finne tyngdepunktet til plane flatestykker.

Eksempel 1.6:

Beregn koordinatene til tyngdepunktet av det plane flatestykket vi regnet på i eksempel 1.2 og eksempel 1.4.

Løsning: Fra eksempel 1.2 har vi at $V_x = \frac{256\pi}{5}$ og fra eksempel 1.4 at $V_y = \frac{128\pi}{7}$.

Da mangler vi bare arealet:

$$A = \int_0^4 (2x\sqrt{x} - x^2) dx = \left[2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 =$$

$$\frac{128}{5} - \frac{64}{3} = \frac{384 - 320}{15} = \frac{64}{15}$$

$$\text{Da blir } \bar{x} = \frac{V_y}{2\pi A} = \frac{\frac{128\pi}{7}}{2\pi \cdot \frac{64}{15}} = \frac{128\pi}{7} \cdot \frac{15}{128\pi} = \frac{15}{7}$$

$$\text{og } \bar{y} = \frac{V_x}{2\pi A} = \frac{\frac{256\pi}{5}}{2\pi \cdot \frac{64}{15}} = \frac{256\pi}{5} \cdot \frac{15}{128\pi} = 6$$

Når vi har beregnet koordinatene til tyngdepunktet, må vi alltid se på figuren for å sjekke at svarene ligger innenfor rimelighetens grenser.

Eksempel 1.7:

Finn tyngdepunktet til det plane flatestykket i eksempel 1.5.

Løsning: Resultatet vi kom fram til i eksempel 1.5 er ikke til noen nytte her fordi vi da roterte om akse
 $x = 2$. Vi må altså starte med blanke ark, og vi begynner med å finne A :

$$A = \int_0^2 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^2 = (e^2 - 2) - 1 = e^2 - 3$$

Så var det V_x . Vi ser at $dV_x = \pi(e^x - 1)^2 dx = \pi(e^{2x} - 2e^x + 1) dx$

$$\text{Da blir } V_x = \pi \int_0^2 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x + x \right]_0^2 =$$

$$\pi \left[\left(\frac{1}{2} e^4 - 2e^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right] = \pi \left[\frac{1}{2} e^4 - 2e^2 + \frac{7}{2} \right] = \frac{\pi(e^4 - 4e^2 + 7)}{2}$$

Ved omdreining om y -aksen blir $dV_y = 2\pi x(e^x - 1) dx$, og vi blir nødt til å ty til delvis integrasjon for å løse $\int x(e^x - 1) dx$.

Vi velger $g = x \Rightarrow D(g) = 1$ og $D(h) = e^x - 1 \Rightarrow h = e^x - x$

Da blir $\int x(e^x - 1) dx = x(e^x - x) - \int 1(e^x - x) dx =$

$$xe^x - x^2 - e^x + \frac{1}{2}x^2 + C = (x - 1)e^x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\text{Da kan vi finne } V_y: V_y = 2\pi \int_0^2 x(e^x - 1) dx = 2\pi \left[(x - 1)e^x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 =$$

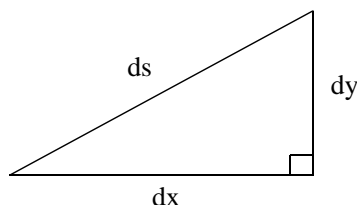
$$2\pi[(e^2 - 2) - (-1)] = 2\pi(e^2 - 1)$$

Koordinatene til tyngdepunktet blir da: $\bar{x} = \frac{V_y}{2\pi A} = \frac{2\pi(e^2 - 1)}{2\pi(e^2 - 3)} = \frac{e^2 - 1}{e^2 - 3}$ og

$$\bar{y} = \frac{V_x}{2\pi A} = \frac{\frac{\pi(e^4 - 4e^2 + 7)}{2}}{2\pi(e^2 - 3)} = \frac{\pi(e^4 - 4e^2 + 7)}{2} \cdot \frac{1}{2\pi(e^2 - 3)} = \frac{e^4 - 4e^2 + 7}{4(e^2 - 3)}$$

Buelengde

Integrasjon kan også benyttes til å finne buelengden til en kurve. Denne formelen er veldig enkel å utlede.



Hvis vi ser på en svært liten del av en kurve, er buelengden gitt av formelen

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (Pythagoras). Dette uttrykket er ikke så greit å integrere. Men hvis vi både dividerer og multipliserer med dx , får vi:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \cdot dx = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}} \cdot dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

Det er denne siste formelen vi benytter når vi skal beregne buelengden til en kurve.

Eksempel 1.8:

Finn buelengden av grafen til funksjonen $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$ fra origo til punktet $(4, 16)$.

Løsning: Vi begynner med å derivere: $\frac{df}{dx} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \Rightarrow \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = 9x$

Da er $ds = \sqrt{1 + 9x}$ og $s = \int_0^4 \sqrt{1 + 9x} dx$

Vi substituerer $u = 1 + 9x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 9 \Rightarrow dx = \frac{du}{9}$ og får

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + 9x} dx = \int_1^{37} \sqrt{u} \frac{du}{9} = \frac{1}{9} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{37} = \frac{2}{27} (37\sqrt{37} - 1)$$

Numerisk tilsvarer dette ca. 16,597. Vi kan sammenligne med lengden av den rette linjen mellom origo og $(4, 16)$ som er $\sqrt{4^2 + 16^2} = \sqrt{272} \approx 16,492$. Vi ser da at svaret er meget sannsynlig.

Eksempel 1.9:

Finn buelengden av funksjonen $g(x) = x^2 - \frac{1}{8} \ln x$ fra $x = 1$ til $x = e$.

Løsning: Vi deriverer først og finner

$$\frac{dg}{dx} = 2x - \frac{1}{8x} = \frac{16x^2 - 1}{8x} \Rightarrow \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 = \frac{256x^4 - 32x^2 + 1}{64x^2}$$

$$\text{Da blir } 1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 = \frac{64x^2}{64x^2} + \frac{256x^4 - 32x^2 + 1}{64x^2} = \frac{256x^4 + 32x^2 + 1}{64x^2}$$

(Det eneste som skjer når vi legger til 1, er at leddet $32x^2$ skifter fortegn.)

Men da er $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{256x^4 + 32x^2 + 1}{64x^2}}$ som ikke ser helt enkelt ut å integrere.

Men legg merke til likheten med $\left(\frac{dg}{dx}\right)^2$:

Når $(16x^2 - 1)^2 = 256x^4 - 32x^2 + 1$, må selvfølgelig $(16x^2 + 1)^2 = 256x^4 + 32x^2 + 1$

Og da går integrasjonen som en lek: $s = \int_1^e \sqrt{\frac{256x^4 + 32x^2 + 1}{64x^2}} dx = \int_1^e \frac{16x^2 + 1}{8x} dx =$

$$\int_1^e \left(2x + \frac{1}{8x}\right) dx = \left[x^2 + \frac{1}{8} \ln x\right]_1^e = \left[\left(e^2 + \frac{1}{8}\right) - 1\right] = e^2 - \frac{7}{8}$$

Dette tallet er ca. 6,514. For å finne ut om dette er et fornuftig svar kan vi beregne avstanden i luftlinje mellom $(1, 1)$ og $\left(e, e^2 - \frac{1}{8}\right)$.

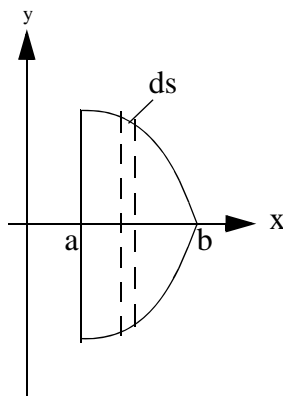
$$\text{Vi får da } \sqrt{(e-1)^2 + \left(e^2 - \frac{9}{8}\right)^2} = \sqrt{e^2 - 2e + 1 + e^4 - \frac{9}{4}e^2 + \frac{81}{64}} =$$

$$\sqrt{e^4 - \frac{5}{4}e^2 - 2e + \frac{145}{64}} \approx 6,495$$

Igjen ser vi at buelengden er litt lengre enn den korteste avstanden mellom punktene. Dette er en veldig fin måte å kontrollere svaret på.

Areal av omdreiningsflater

En omdreiningsflate er den flaten som oppstår når vi roterer et linjestykke om en akse. Vi tar horisontale akser først, og kikker på et tilfelle der x-aksen er rotasjonsakse:



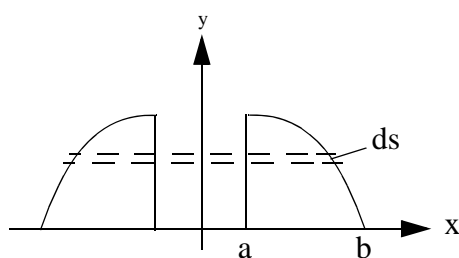
Vi skal finne arealet dA av det båndet vi får når linjestykket ds (NB: Ikke dx !) roterer om x-aksen. Båndets radius er y slik at $dA = 2\pi y \cdot ds$. Arealet av en omdreiningsflate ved om-

dreining rundt x-aksen blir dermed
$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Dersom omdreiningen skjer om en vilkårlig horisontal akse $y = c$, blir arealet av omdrein-

ingsflaten
$$A = 2\pi \int_a^b |y - c| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Så var det vertikale akser, vi ser først på omdreining rundt y-aksen:



Eneste forskjell er at båndets radius nå blir x i stedet for y . Vi får derfor $dA = 2\pi x \cdot ds$ og

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$
 Dersom omdreiningen skjer om en vilkårlig vertikal akse $x = c$,

blir arealet av omdreiningsflaten
$$A = 2\pi \int_a^b |x - c| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Eksempel 1.10:

Finn arealet av omdreiningsflaten som oppstår når grafen til funksjonen $f(x) = x^3$ $x \in [0, 1]$ roteres om x-aksen.

Løsning: Vi deriverer først: $\frac{df}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = 9x^4$

$$\text{Arealet blir da: } A = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

Her er det på sin plass med en substitusjon:

$$u = 1 + 9x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 36x^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{36x^3}$$

$$\text{Vi får da: } A = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = 2\pi \int_1^{10} x^3 \sqrt{u} \cdot \frac{du}{36x^3} = \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$\frac{\pi}{18} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

På neste side skal vi regne på funksjonen $\cosh x$, (cosinus hyperbolicus x), som er et nytt bekjentskap. På mange kalkulatorer finnes det taster med både $\sinh x$ og $\cosh x$, og disse funksjonene har flere interessante egenskaper. Det overraskende er at $\sinh x$ og $\cosh x$ er eksponentialfunksjoner, de er nemlig definert slik: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ og $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$!

En kan saktens spekulere på hvorfor de har fått sine navn fra trigonometrien. Forklaringen ligger nok i likhetene når det gjelder derivasjon (og integrasjon). Vi finner greit ut at

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \text{ og } \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x. \text{ I tillegg har vi at } \sinh 0 = 0 \text{ og at } \cosh 0 = 1.$$

Så det er unektelig en del likhetstrekk mellom $\cosh x$ og $\cos x$, selv om grafene blir nokså forskjellige!

Eksempel 1.11:

Finn arealet av omdreiningsflaten som oppstår når grafen til funksjonen

$$g(x) = \cosh x \quad x \in [0, 1] \text{ roteres om aksene } x = 2.$$

Løsning: Vi starter med å derivere:

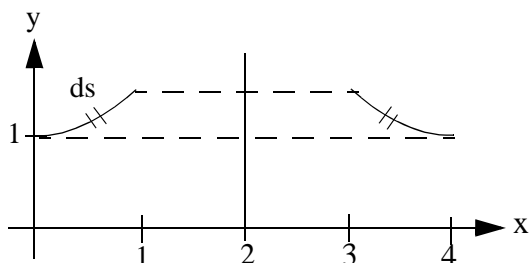
$$g(x) = \cosh x \Rightarrow \frac{dg}{dx} = \sinh x \Rightarrow \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 = \sinh^2 x = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$\text{Da blir } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} = \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} =$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Det vi gjorde her ligner veldig på det vi gjorde i eksempel 1.9 da vi fikk fjernet rottegnet!

Nå er det kanskje på sin plass med en liten figur:



Vi ser at radius i båndet denne gangen blir $2 - x$ slik at integralet blir seende slik ut:

$$A = 2\pi \int_0^1 (2-x) \cdot \cosh x dx$$

Delvis integrasjon er tingen her:

$$g = 2-x \Rightarrow D(g) = -1 \text{ og } D(h) = \cosh x \Rightarrow h = \sinh x$$

$$\text{Da blir } \int (2-x) \cdot \cosh x dx = (2-x) \sinh x - \int (-1) \sinh x dx =$$

$$(2-x) \sinh x + \cosh x + C$$

Da kan overflata regnes ut:

$$A = 2\pi \int_0^1 (2-x) \cdot \cosh x dx = 2\pi [(2-x) \sinh x + \cosh x] \Big|_0^1 =$$
$$2\pi \left[\left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2} + \frac{e^1 + e^{-1}}{2} \right) - (0+1) \right] = 2\pi(e-1)$$

Oppgaver

1. a) Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår når arealet avgrenset av grafen til $f(x) = \sqrt{x}$, x-aksen og den rette linja $x = 2$ roteres om i) x-aksen ii) y-aksen.
b) Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår når arealet avgrenset av grafen til $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, x-aksen og den rette linja $x = 1$ roteres om i) x-aksen ii) y-aksen.
2. Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår når arealet avgrenset av grafen til $h(x) = e^x - 1$, x-aksen og den rette linja $x = 1$ roteres om aksene $y = -\frac{1}{2}$.
3. a) Finn tyngdepunktet til det plane flatestykket avgrenset av grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x + 3$.
b) Finn tyngdepunktet til det plane flatestykket avgrenset av grafen til funksjonen $h(x) = e^{-x}$, begge koordinataksene og den rette linja $x = \ln 2$.
4. a) Finn buelengden av funksjonen $f(x) = 3x + 4$ fra $x = 0$ til $x = 3$.
b) Finn buelengden av funksjonen $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln x$ fra $x = 1$ til $x = e$.
5. a) Finn arealet av den omdreiningsflaten som oppstår når grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ $x \in [1, 2]$ roterer om x-aksen.
b) En parabolantenne har fasong som den omdreiningsflaten som oppstår når grafen til funksjonen $g(x) = x^2$ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ roteres om y-aksen. Beregn antennens overflate.

2 Potensrekker

Vi starter med en liten repetisjon av noe av det stoffet vi var gjennom i rekkekapitlet i Diskret matematikk og lineær algebra.

Tallfølger

En tallfølge er en serie med tall som er adskilt med komma. En tallfølge kan være helt tilfeldig, f. eks. $\{1, 6, 3, 14, 2, 9 \dots\}$ eller den kan følge et system, f.eks. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\right\}$. Vi skal

nå utelukkende konsentrere oss om den siste typen. Tallfølger som følger et system kan alltid beskrives ved følgens allmenne ledd. Det allmenne leddet i følgen $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\right\}$ er

$a_n = \frac{1}{n}$ dersom vi velger å starte med $n = 1$.

Rekker

Hvis vi bytter ut alle kommaene i en tallfølge med plusstegn, får vi en rekke. En rekke kan også beskrives ved hjelp av det allmenne leddet. En uendelig lang rekke med allment ledd

$a_n = \frac{1}{n}$ ser altså slik ut: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ (forutsatt at vi begynner med $n = 1$). En

annen skrivemåte for denne uendelige lange rekken er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Geometriske rekker

En rekke sies å være geometrisk dersom den er på formen $a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots$. Rekken

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ er med andre ord ikke geometrisk, men det er derimot rekken

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$. Denne siste rekken har (til tross for at den er uendelig lang) en definert sum, og vi skal nå repetere hvordan vi finner summen av geometriske rekker.

Eksempel 2.1:

Finn summen S av den uendelig lange geometriske rekke $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Løsning: Vi merker oss at $k = \frac{1}{2}$ i denne rekke og setter så opp uttrykkene for summene S og kS

$$\text{under hverandre: } S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Vi trekker nå den nederste rekke fra den øverste og får: $S - \frac{1}{2}S = 1 - 0$ (Hvis vi regner med like mange ledd i begge rekkene blir det igjen et ledd i den nederste rekke, men dette leddet vil naturligvis gå mot null når rekke blir lang nok.)

$$\text{Nå finner vi summen enkelt: } \frac{1}{2}S = 1 \Rightarrow S = 2$$

I dette eksemplet så vi at selv om vi summerer et uendelig antall ledd, så trenger ikke summen bli uendelig høy. Forklaringen er naturligvis at leddene blir uendelig små etter hvert. Dersom summen av en uendelig lang rekke eksisterer, sier vi at rekke konvergerer. I motsatt fall sier vi at rekke divergerer. Vi kan forholdsvis enkelt finne ut hvilke kriterier som må være oppfylt for at en geometrisk rekke skal konvergere.

Vi tar utgangspunkt i en generell geometrisk rekke $S = a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots$

Multiplikasjon med k gir: $kS = ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + \dots$

Subtraherer og får: $S - kS = a - 0$ dersom $|k| < 1$. Da blir $S = \frac{a}{1-k}$ og rekke konvergerer.

Derimot får vi $S - kS = a - \infty$ dersom $|k| > 1$. Da divergerer rekke.

Dersom $k = \pm 1$ får vi enten $S = a + a + a + a + a + \dots$ som opplagt divergerer, eller vi får $S = a - a + a - a + a - a + \dots$ der summen hopper opp og ned mellom 0 og a . I slike tilfeller er vi også nødt til å konkludere med at rekke divergerer fordi vi ikke kan si at summen er definert. Vi kan altså konkludere med følgende:

En geometrisk rekke konvergerer bare dersom $|k| < 1$.

Divergenstesten

Vi skal se nærmere på de to fenomenene konvergens og divergens og vi starter med en forholdsvis innlysende(?) setning som har fått navnet divergenstesten:

En uendelig lang rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er nødt til å divergere dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

Det hadde vært veldig gunstig om det hadde eksistert en tilsvarende enkel konvergenstest: En

uendelig lang rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er nødt til å konvergere dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Men denne setningen stemmer dessverre ikke for alle uendelige rekker.

Vi skal i stedet lære ikke mindre enn fire konvergenstester som kan hjelpe oss å bestemme om en uendelig lang rekke konvergerer eller divergerer. Det må presiseres at disse konvergenstestene bare kan brukes til å avgjøre konvergens eller divergens. De kan ikke hjelpe oss med å finne summen av en konvergent rekke.

Først kan vi imidlertid se på et eksempel der vi benytter divergenstesten:

Eksempel 2.2:

Hvilke(n) av disse uendelig lange rekkene kan vi med sikkerhet si divergerer?

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{d) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$$

Løsning: Vi prøver divergenstesten på alle fire rekkene og ser hva vi kommer ut med:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= 0 & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \\ \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} &= 0 & \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 0 \end{aligned}$$

Vi kan altså med sikkerhet si at **rekke b) divergerer**. Vi kan ikke trekke noen konklusjon på de tre andre fordi vi kan for lite ennå. Men etter at vi har lært de fire konvergenstestene skal vi nok greie å gjøre oss opp en mening om disse også!

Forholdstesten

Dette er den mest brukte av konvergenstestene. Den virker ikke alltid, men den er uunnværlig når vi kommer så langt som til potensrekker. Testen bygger på forholdet ρ mellom to påfølgende ledd langt ute i rekka. Det er størrelsen på ρ som avgjør om rekka konvergerer.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| : \text{Dersom } \rho < 1 \text{ konvergerer rekka. Dersom } \rho > 1 \text{ divergerer rekka.}$$

Dette så jo greit ut. Eneste hake er at vi ikke kan trekke noen konklusjon dersom $\rho = 1$.

Eksempel 2.3:

Benytt forholdstesten til å avgjøre om disse rekkene konvergerer eller divergerer:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\text{Løsning: a) } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rekka konvergerer}$$

$$\text{b) } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot 3^n}{n! \cdot 3^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} \Rightarrow \text{Divergens}$$

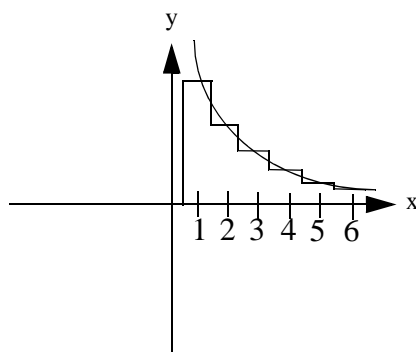
$$\text{c) } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-2)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-2)^{n+1} \cdot n}{(-2)^n \cdot (n+1)} \right| = |-2| = 2 \Rightarrow \text{Divergens}$$

$$\text{d) } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[(n+1)!]^2 \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot (2n+2)!} \right| =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n+1) \cdot 2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Rekka konvergerer}$$

Integraltesten

Denne konvergenstesten bygger på at summen av en uendelig lang rekke $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ kan sammenlignes med arealet under en kontinuerlig kurve $f(x)$. Se figur:



Det er dessverre ikke slik at arealet under den trappeformede rekkefunksjonen blir nøyaktig likt arealet under den glatte kurven. Men følgende setning (integraltesten) gjelder uansett:

Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergerer hvis (og bare hvis) $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergerer.

Eksempel 2.4:

Bruk integraltesten til å avgjøre om de følgende uendelige rekkene konvergerer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Løsning: a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty}$

I og med at $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \rightarrow \infty$, divergerer integralet. Da **divergerer** også rekka.

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$ Integralet konvergerer.

Da kan vi slå fast at rekka **konvergerer** (men vi kan ikke si noe om hva summen blir).

Vi kan stoppe opp litt og tenke over de resultatene vi fant i eksemplet på forrige side.

I a) skulle vi avgjøre om rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ konvergerer eller divergerer.

Denne rekka har til og med fått sitt eget navn, *den harmoniske rekka*, men den divergerer

likevel. I b) fant vi ut at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$ konvergerer. Det kan være like

greit å pugge disse to resultatene først som sist! Det vil bli bruk for dem senere.

Eksempel 2.5:

Avgjør om følgende rekker konvergerer eller divergerer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, der p er en konstant.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

Løsning: a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^{\infty}$ når $p \neq 1$.

Dersom $p > 1$ får vi nå $0 - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}$, og rekka konvergerer.

Dersom $p < 1$ får vi derimot ∞ , og rekka divergerer.

Da vet vi at $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ konvergerer for $p > 1$ og divergerer for $p \leq 1$ (eksempel 2.4).

b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} dx$ Delbrøksoppspalting gir: $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

Får da: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} dx = [\ln(x-1) - \ln x]_2^{\infty} =$

$\left[\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \right]_2^{\infty} = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2$. Integralet konvergerer, og rekka **konvergerer!**

Sammenlikningstesten

Denne testen er egentlig av det uformelle slaget, men den fungerer like bra for det. Vi skal gå relativt direkte på regneeksempler, men først må vi bli enige om et par ting. Integraltesten ga oss et par nyttige resultater som dere fikk beskjed om å legge inn i minnet. Nå kan dere plukke dem fram igjen!

Den uendelige rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2}$ er nødt til å konvergere fordi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gjør det. Summen blir bare 8 ganger så stor!

På samme vis må $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9n}$ divergere fordi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer. ($\frac{2}{9} \cdot \infty$ er fortsatt ∞ !)

Eksempel 2.6:

Avgjør om rekkene konvergerer ved å sammenlikne med "kjente" rekker:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - 2n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$

Løsning: a) Her må vi først innse at nevneren fort vil domineres av n^2 -leddet slik at $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$ vil

oppføre seg nøyaktig som $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$. Vi kan skrive dette slik: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

Rekka vil derfor **konvergere**.

b) Vi tenker på samme måte som i a). Telleren vil domineres av n -leddet og nevneren av n^2 -

leddet. Vi får derfor $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - 2n} \sim \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ Rekka må **divergere**.

c) Her trenger vi noe kunnskap om $\arctan n$. Vi vet forhåpentligvis at denne funksjonen går

mot $\frac{\pi}{2}$ når n blir stor. Vi kan derfor skrive $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^2}$. Rekka **konvergerer**.

Test for alternerende rekker

I en alternerende rekke er annethvert ledd positivt og negativt. Vi kan lage en alternerende rekke ved å ta det allmenne leddet fra en vanlig positiv rekke og multiplisere det med faktoren $(-1)^n$ eller $(-1)^{n-1}$. Hvis vi for eksempel tar utgangspunkt i den harmoniske rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{ og multipliserer det allmenne leddet med } (-1)^{n-1}, \text{ vil vi få den}$$

$$\text{alternerende rekka } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Det er her verdt å merke seg at en alternerende rekke helt sikkert konvergerer dersom den tilsvarende positive rekka konvergerer (absolutt konvergens). Men det kan også hende at en alternerende rekke konvergerer selv om den tilsvarende positive rekka divergerer (betinget konvergens). Derfor er vi nødt til å ha en egen konvergenstest for alternerende rekker.

To krav må være oppfylt dersom den alternerende rekka $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ skal konvergere:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ og ii) $a_n \geq a_{n+1}$ for alle n

Eksempel 2.7:

Undersøk om følgende alternerende rekker konvergerer:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin n$$

Løsning: a) i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ii) $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ for alle n

Begge kravene er oppfylt. Rekka **konvergerer**.

Vi sier at rekka konvergerer betinget fordi den positive rekka divergerer.

b) i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ eksisterer ikke. Krav i) er derfor ikke oppfylt. Da er det ikke nødvendig

å sjekke krav ii). Rekka **divergerer**.

Potensrekker

En potensrekke er en rekke som inneholder alle mulige potenser av en ukjent variabel, som regel x . Generelt ser en potensrekke slik ut: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$. Vi skjønner at summen av en slik potensrekke (hvis rekka i det hele tatt konvergerer) ikke blir et konstant tall, men derimot en funksjon av x .

NB! Når vi angir summen $f(x)$ av en potensrekke, er det helt nødvendig at vi samtidig angir hvilke x -verdier denne summen gjelder for!

Eksempel 2.8:

Gitt potensrekka $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

- a) For hvilke verdier av x konvergerer rekka?
- b) Hva blir summen av rekka for disse x -verdiene?

Løsning: a) Vi ser at dette er en geometrisk rekke med $k = x$. Vi har tidligere konkludert med at en geometrisk rekke konvergerer når $|k| < 1$. Denne rekka konvergerer derfor når $|x| < 1$.

Vi kaller dette **konvergensområdet** for rekka. Dette er et begrep som det er svært viktig å skjønne betydningen av.

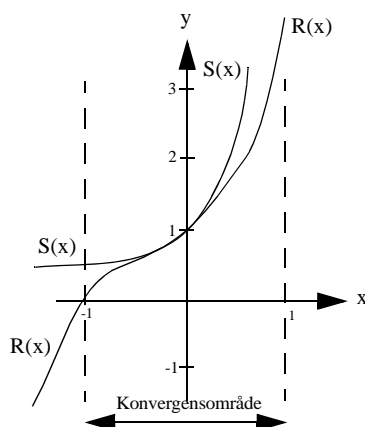
b) Vi kan også her hente svaret fra side 16. Der fant vi at summen for en geometrisk rekke er

$$S = \frac{a}{1 - k}.$$

Her er $a = 1$ og $x = k$ slik at summen blir $S = \frac{1}{1 - x}$ (dersom $|x| < 1$!)

Vi har nå sett at en uendelig lang potensrekke kan ha en sum, men som oftest bare for noen verdier av x . Vi skal nå prøve å forklare dette ved å kikke på grafene til både rekka ($R(x)$) og summen ($S(x)$) i et og samme koordinatsystem. Se neste side.

Når det gjelder grafen til rekka må vi selvfølgelig kutte ned på antall ledd, så vi velger å ta med bare de fire første leddene, altså $R(x) = 1 + x + x^2 + x^3$. De stiplede vertikale linjene angir grensene for konvergensområdet for rekka.



Vi ser at det er veldig stor forskjell mellom $R(x)$ og $S(x)$ utenfor konvergensområdet. Dette spiller ingen rolle, fordi den summen vi fant på foregående side, $S = \frac{1}{1-x}$, bare gjelder innenfor konvergensområdet.

Innenfor konvergensområdet skal vi i følge teorien ha $R(x) = S(x)$. Her ser vi at dette ikke stemmer helt. Den lille feilen kommer av at vi bare har tatt med de fire første leddene av rekka når vi har beregnet verdiene for $R(x)$. Når vi tar med flere ledd, vil grafen til $R(x)$ nærme seg den andre grafen mer og mer. Ikke før vi har tatt med uendelig mange ledd, vil de to kurvene være helt like (vel å merke innenfor konvergensområdet).

Eksempel 2.9:

Beregn differansen mellom kurvene på figuren for i) $x = -0,5$, ii) $x = 0,5$ og iii) $x = 1,5$.

Hvor stor ville disse tre differansene blitt dersom vi hadde satt $R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$?

Løsning: i) $R(-0,5) = 0,625$ mens $S(-0,5) \approx 0,667$. Differansen er **0,042**

ii) $R(0,5) = 1,875$ mens $S(0,5) = 2$. Differansen er **0,125**

iii) $R(1,5) = 8,125$ mens $S(1,5) = -2$. Differansen er **10,125**

Dersom vi hadde satt $R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ville vi fått $R(x) = S(x)$ innenfor konvergens-

rådet, mens $R(x)$ ville divergert utenfor konvergensområdet. De tre differansene ville derfor blitt: i) **0** ii) **0** iii) ∞

Eksempel 2.10:

Bestem konvergensområdet til følgende potensrekker: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{2^n}$

Løsning: Det har tidligere blitt ymtet frampå (side 18) om at forholdstesten er uunnværlig når det gjelder å finne konvergensområdet for potensrekker. Vi satser derfor på å benytte forholdstesten først, og så får vi se hvordan det går videre.

$$\text{a) } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx^{n+1}}{(n+1)x^n} \right| = |x|$$

Rekka konvergerer når $\rho < 1$, altså når $-1 < x < 1$. Men hvordan går det når $x = \pm 1$?

Når $x = 1$ blir rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, som vi vet divergerer. Når $x = -1$ får vi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Testen for alternerende rekker gir da i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ og ii) $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ for alle n .

Rekka konvergerer derfor for $x = -1$ slik at hele konvergensområdet blir $-1 \leq x < 1$.

$$\text{b) } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{n(x-3)^n}{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n(n+1) \cdot (x-3)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot n \cdot (x-3)^n} \right| = \left| \frac{x-3}{2} \right|$$

Rekka konvergerer altså når $\left| \frac{x-3}{2} \right| < 1 \Rightarrow |x-3| < 2 \Rightarrow x \in (1,5)$

Vi må altså undersøke grundigere for $x = 1$ og $x = 5$.

$x = 1$ gir rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ som divergerer (divergenstesten).

$x = 5$ gir rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ som opplagt divergerer.

Vi kan dermed konkludere med at konvergensområdet blir $1 < x < 5$

Taylor-rekker

Den engelske matematikeren Brook Taylor (1685-1731) publiserte i 1715 en formel for rekkeutvikling av hvilken som helst deriverbar funksjon. En slik rekke kalles en Taylor-rekke, og den generelle formelen for Taylor-rekka ser slik ut:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots, \text{ der } a \text{ er en selvvalgt konstant.}$$

Det er ofte hensiktsmessig å velge $a = 0$. Dette spesialtilfellet kalles Maclaurin-rekka:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

Maclaurin-rekka er mest brukt, men for noen funksjoner, for eksempel $f(x) = \ln x$ (som ikke er definert for $x = 0$), må vi selvfølgelig bruke Taylor-rekka med $a \neq 0$.

Eksempel 2.11:

$$\text{Utled Maclaurin-rekka for funksjonen } f(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1,1)$$

Løsning: Først må vi finne et generelt uttrykk for den n -te deriverte til $f(x)$. Det er faktisk enklest å se systemet dersom en ikke rydder opp etter hver derivasjon:

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1)$$

$$f''(x) = (-1)(-2) \cdot (1-x)^{-3} \cdot (-1)^2$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3) \cdot (1-x)^{-4} \cdot (-1)^3$$

Vi ser at alle de deriverte får positivt fortegn, og kan rimelig greit gjette oss til at

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \text{ Da er } f^{(n)}(0) = n!$$

Da kan vi bruke formelen for Maclaurin-rekka, og får:

$$f(x) = 1 + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \dots + \frac{n!}{n!}x^n + \dots = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Vi har nå vist at $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ ved hjelp av formelen for

Maclaurin-rekka. Dette bekrefter det resultatet vi kom fram til i eksempel 2.8.

Vi kunne naturligvis fortsatt med å utlede Taylor-rekkene til flere funksjoner, men det er heldigvis folk som har gjort dette før oss, så da kan vi i stedet bruke resultatene deres:

$f(x)$	Maclaurin-rekke	Konvergens-område
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$ x < 1$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	R
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	R
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	R
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$	$-1 < x \leq 1$
$(1+x)^r$	$1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n}x^n$	$ x < 1$

Legg merke til den nederste linjen! Her blir det et gjensyn med binomialkoeffisientene som vi stiftet bekjentskap med da vi lærte om kombinatorikk!

Eksempel 2.12:

Bruk tabellen ovenfor til å finne summen av de uendelig lange rekkene

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ og b) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

Løsning: a) Vi ser av nest nederste linje i tabellen at $\ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Summen er altså $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \approx 0,693$

b) Fjerde linje gir: $e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ som gir $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1$

I eksemplet på forrige side brukte vi tabellen med Taylor-rekker til å finne summen av et par konvergerende rekker. I de neste eksemplene skal vi bruke samme tabell til å finne Taylor-rekker for flere funksjoner.

Eksempel 2.13:

Finn Taylor-rekka for funksjonen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Løsning: I øverste linje i tabellen har vi $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1.$

Dersom vi erstatter x med $-x^2$, skulle vi få det vi er ute etter. Vi tar det med teskje:

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

Resultatet blir: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$

Konvergensområdet er fortsatt $|x| < 1$

Eksempel 2.14:

Finn Taylor-rekka for funksjonen $g(x) = \arctan x$

Løsning: Et flyktig blikk i tabellen gir intet håp om en løsning på dette problemet, så her må vi antakelig tenke helt nytt. Stikkordet er integrasjon!

I eksempel 2.13 fant vi Taylor-rekka for $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Etter som

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C, \text{ kan vi faktisk finne Taylor-rekka for } g(x) = \arctan x \text{ ved}$$

leddvis integrasjon av svaret fra eksempel 2.13! Vi prøver:

$$g(x) = \arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Strengt tatt kunne vi fått en konstant C i tillegg, men siden $\arctan 0 = 0$ ser vi at rekka vi fant må være den riktige. Konvergensområdet for denne rekka er fremdeles $|x| < 1$.

Før vi tar fatt på neste eksempel, trenger vi litt mer teori om binomialkoeffisienter. I kombinatorikken lærte vi formelen $\binom{r}{n} = \frac{r!}{(r-n)! \cdot n!}$. Her var det et krav at r og $n \in N$ fordi vi ikke kan beregne fakultet av tall som ikke er element i N . Hvis vi for eksempel prøver med $r = 8$ og $n = 3$, får vi $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$.

Vi skal nå endre formelen litt slik at den blir mer anvendelig. Vi starter med $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}$, og observerer at dette følger oppskriften $\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)}{n!}$. Nå har $r!$ forsvunnet, og dermed trenger ikke $r \in N$ lengre! Vi skal nå bruke denne nye formelen og vi

finner da for eksempel at $\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} = \frac{-1 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 2^3} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16}$

Eksempel 2.15:

Bruk tabellen på side 27 til å finne Taylor-rekka for $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $|x| < 1$

Løsning: Helt nederst i tabellen finner vi den riktige rekka:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n$$

$$\text{Vi finner greit at } \binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \text{ og at } \binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} = \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Det allmenne leddet må vi jobbe litt mer med:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n! \cdot 2^n} \text{ Det er litt}$$

irriterende med alle prikkene i telleren, men vi kan fjerne dem på denne måten:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} = \frac{(2n)!}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n) \cdot 2^n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$$

$$\text{Vi får nå: } (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{4^n \cdot (n!)^2} \cdot x^n$$

Oppgaver

6. Anta at det første leddet er ledd nr. 1 og finn en formel for det allmenne leddet i følgene:

a) $\{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

b) $\{b_n\} = \{2, 6, 10, 14, 18, \dots\}$

c) $\{c_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$

d) $\{d_n\} = \{1, -4, 9, -16, 25, \dots\}$

7. Skriv følgende rekker med summetegnet:

a) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$

b) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots$

8. Finn summen av de geometriske rekkene:

a) $4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{54} + \dots$

b) $1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots \quad 0 < x < 2$

9. Benytt delbrøksoppspalting til å finne summen av den uendelige rekka $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

10. Avgjør om følgende rekker konvergerer eller divergerer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{10}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2+3}{4n^3-2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-7}{4n^3+8}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n+1}{n^2}$

11. Finn konvergensområdet for følgende rekker: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{4^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}$

12. Bruk definisjonen på side 26 til å utlede Maclaurin-rekka for $f(x) = \sin x$.

13. Bruk tabellen på side 27 til å finne Maclaurin-rekka til følgende funksjoner:

a) $f(x) = \ln(1-x^3)$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

14. Finn hvilken funksjon $f(x)$ som kan representeres av følgende potensrekker, og angi samtidig konvergensområde for rekkene: a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{x^n}{n!}$

15. Skriv integralet $\int_0^1 t e^{t^3} dt$ som summen av en uendelig lang rekke.

3 Funksjoner av flere variable

Noen ganger har vi bruk for mer enn en variabel for å uttrykke en funksjon. Høyden over havet innenfor et landområde kan være et eksempel på dette. Her vil høyden h være avhengig av posisjonen (x, y) innenfor området, f. eks. $h(x, y) = x^2 - y^2$. Temperaturen i et lukket rom vil på samme måte være en funksjon av tre variable, f. eks. $T(x, y, z) = x + y - 2z$.

Vi skjønner kanskje at stigningstallet til en funksjon av flere variable vil være avhengig av hvilken retning vi ser. Dersom vi står i en bratt sørvendt skråning vil stigningstallet (den deriverte) være et positivt tall hvis vi ser nordover, negativt hvis vi vender oss sørover, og tilnærmet null både i øst- og vest-retning. Det er derfor ikke tilstrekkelig å operere med bare en derivert lenger. For å ha full oversikt over stigningstallet i alle ulike retninger, må vi innføre begrepet retningsderivert. I dette faget skal vi imidlertid nøye oss med å se på stigningstallet i positiv x-retning (øst) og positiv y-retning (nord).

Partiell-deriverte

En funksjon $h(x, y)$ har to partiell-deriverte, nemlig $\frac{\partial h}{\partial x}$ (stigningstallet i positiv x-retning) og $\frac{\partial h}{\partial y}$ (stigningstallet i positiv y-retning). Operatoren ∂ uttales “del” og er ikke helt den samme som operatoren d i for eksempel $\frac{df}{dx}$.

Å utføre en partiell-derivasjon er forholdsvis enkelt. Når vi skal finne $\frac{\partial h}{\partial x}$ later vi som om y er en konstant og deriverer med hensyn på x etter vanlige regler. $\frac{\partial h}{\partial y}$ finnes ved å betrakte x som en konstant.

Hvis vi for eksempel skal derivere $h(x, y) = xy$ får vi de to partiell-deriverte til å bli henholdsvis $\frac{\partial h}{\partial x} = y$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = x$. Noen eksempler vil antakelig hjelpe!

Eksempel 3.1:

Finn de partiell-deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ av følgende funksjoner:

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 - 3 \cos y \quad \text{b) } f(x, y) = xy^2 + \frac{e^x}{y} \quad \text{c) } f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$$

Løsning: a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \sin y$

$$\text{b) } \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + \frac{e^x}{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \frac{e^x}{y^2}$$

$$\text{c) } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x-y) - xy \cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{xy - y^2 - xy}{(x-y)^2} = \frac{-y^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x-y) - xy \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \frac{x^2 - xy + xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

Andreordens partiell-deriverte

Det er selvfølgelig fullt mulig å partiell-derivere en funksjon av to variable flere ganger. Men vi skal da være klar over at vi får hele fire andrederiverte! For å holde orden i kaoset har vi innført egne skrivemåter for alle disse andrederiverte. Når vi deriverer $f(x, y)$ to ganger med hensyn på x , skriver vi dette som f_{xx} . Når vi deriverer to ganger med hensyn på y får vi f_{yy} . Vi kan også derivere først med hensyn på x og så med hensyn på y og få f_{xy} . Den siste muligheten er å bytte rekkefølge på disse derivasjonene og få f_{yx} .

Hvis du ønsker kan du også skrive de førsteordens partiellderiverte på samme måte, det vil si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y.$$

Eksempel 3.2:

Finn de andreordens partiellderiverte f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} og f_{yy} av de tre funksjonene i eksempel 3.1.

Løsning: a) Når $f_x = 2x$ og $f_y = 3 \sin y$, blir $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yx} = 0$ og $f_{yy} = 3 \cos y$

b) Her fant vi $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = y^2 + \frac{e^x}{y}$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2xy - \frac{e^x}{y^2}$

Vi får da: $f_{xx} = \frac{e^x}{y}$, $f_{xy} = 2y - \frac{e^x}{y^2}$, $f_{yx} = 2y - \frac{e^x}{y^2}$ og $f_{yy} = 2x + \frac{2e^x}{y^3}$

c) I eksempel 3.1 fikk vi $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{-y^2}{(x-y)^2}$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{x^2}{(x-y)^2}$

Da blir $f_{xx} = -y^2 \cdot (-2)(x-y)^{-3} \cdot 1 = \frac{2y^2}{(x-y)^3}$, mens

$$f_{xy} = \frac{-2y(x-y)^2 + y^2 \cdot 2(x-y) \cdot (-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2y(x-y) - 2y^2}{(x-y)^3} =$$

$$\frac{-2xy + 2y^2 - 2y^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

Så var det neste: $f_{yx} = \frac{2x(x-y)^2 - x^2 \cdot 2(x-y) \cdot 1}{(x-y)^4} = \frac{2x(x-y) - 2x^2}{(x-y)^3} =$

$$\frac{2x^2 - 2xy - 2x^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

Og til slutt: $f_{yy} = x^2 \cdot (-2)(x-y)^{-3} \cdot (-1) = \frac{2x^2}{(x-y)^3}$

En nærmere gransking av svarene i eksempel 3.2 viser at $f_{xy} = f_{yx}$ i alle tre oppgavene! Dette beror ikke på tilfeldigheter, derivasjonsrekkefølgen har **ingen** betydning. Vi kan altså slå fast at $f_{xy} = f_{yx}$, og da trenger vi i hvert fall ikke bry oss om mer enn tre ulike andrederiverte. Det anbefales likevel å regne ut både f_{xy} og f_{yx} fordi vi da har en meget god kontroll på at disse er riktige, i tillegg til at vi med sikkerhet kan si at f_x og f_y stemmer.

Nivåkurver

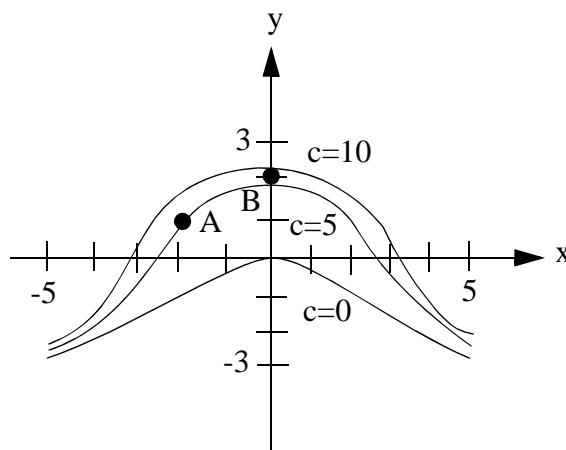
Det er vanskelig å skissere en funksjon av to variable i et koordinatsystem. I så fall må vi være svært gode til å tegne tre-dimensjonalt. En annen måte å illustrere forløpet til en sårn funksjon på, er å tegne funksjonens nivåkurver i stedet. Hvis funksjonen angir høyden over havet, kan vi for eksempel tegne en nivåkurve gjennom alle punkter som ligger 100 meter over havet, en annen nivåkurve gjennom alle punkter som ligger 200 meter over havet og så videre. Topografiske kart er som kjent framstilt på denne måten. Nivåkurvene finnes ved å sette $f(x, y) = c$, der c er nivået (for eksempel høyden over havet).

Eksempel 3.3:

Funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^3$ angir høyden over havet i punktet (x, y) .

- Tegn nivåkurvene til f for $c = 0, 5$ og 10 .
- Gitt punktene $A(-2, 1)$ og $B(0, 2)$. Hvor høyt over havet ligger disse punktene?
- Beregn $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ i punktene A og B . Stemmer resultatene med figuren i a)?

Løsning: a)



b) Vi setter inn i funksjonen og finner $f(-2, 1) = (-2)^2 + 1^3 = 5$ og $f(0, 2) = 0^2 + 2^3 = 8$. A ligger altså **5m** og B **8m** over havet.

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$. Da er $\frac{\partial f}{\partial x} = -4$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = 3$ i A , mens $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ og

$\frac{\partial f}{\partial y} = 12$ i B . Vi kan se at disse resultatene (i det minste fortegnene) stemmer med figuren.

Kjerneregelen

Vi har på de foregående sidene lært oss å derivere en funksjon av flere variable med hensyn på hver variabel. Nå skal vi komplisere bildet ytterligere ved å la hver av disse variablene være funksjoner av en ny variabel. Dette høres nok temmelig forvirrende ut, men vi kan ta et eksempel som forhåpentligvis vil virke konkretiserende.

Hvis vi *beveger oss* i et landskap der høyden over havet er gitt av $h(x, y)$, så kan x og y være funksjoner av tiden t . Det vil da være mulig å beregne hvor fort vi beveger oss oppover $\left(\frac{dh}{dt}\right)$ ved å gå veien om de partiell-deriverte. Formelen vi benytter til dette ser slik ut:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Legg merke til at vi benytter ∂ -operatoren bare når vi deriverer $h(x, y)$! De andre funksjonene er funksjoner av én variabel (også $h(t)$), og vi bruker derfor den alminnelige d -en når vi deriverer disse. Vi ser også at vi ikke kan “forkorte” ∂x mot dx . Vær nøye med dette!!

Eksempel 3.4:

I et område er høyden over havet gitt av $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy$. Du beveger deg en rundtur i landskapet på den måten at koordinatene dine er gitt av $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. Bruk formelen over til å beregne $\frac{dh}{dt}$, altså hvor fort du til enhver tid beveger deg oppover i området!

Løsning: Høyden h er en funksjon av x og y som igjen er funksjoner av t . Vi må derfor benytte

formelen $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. Vi starter med å partiell-derivere $h(x, y)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x - 3y \text{ og } \frac{\partial h}{\partial y} = 4y - 3x. \text{ I tillegg har vi at } \frac{dx}{dt} = -\sin t \text{ og } \frac{dy}{dt} = \cos t. \text{ Da blir}$$

$$\frac{dh}{dt} = (2x - 3y) \cdot (-\sin t) + (4y - 3x) \cdot \cos t. \text{ For å skrive dette som en ren funksjon}$$

av t , må vi sette inn uttrykkene for x og y . Vi får da:

$$\frac{dh}{dt} = (2 \cos t - 3 \sin t) \cdot (-\sin t) + (4 \sin t - 3 \cos t) \cdot \cos t =$$

$$-2 \sin t \cos t + 3 \sin^2 t + 4 \sin t \cos t - 3 \cos^2 t =$$

$$2 \sin t \cos t - 3(\cos^2 t - \sin^2 t) = \mathbf{\sin 2t - 3 \cos 2t}$$

Du har kanskje spekulert på om det kan være mulig å komme fram til det resultatet vi fant i eksempel 3.4 uten å gå veien om formelen vi nettopp har lært. Og det er det faktisk. Vi kan jo rett og slett sette inn uttrykkene for x og y og derivere direkte med hensyn på t . Vi trenger ikke å partiell-derivere en gang!

Eksempel 3.5:

Løs eksempel 3.4 uten bruk av partiell-derivasjon.

Løsning: Vi skriver om $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy$ til en ren funksjon av t , og får:

$$h(t) = \cos^2 t + 2\sin^2 t - 3\cos t \sin t$$

Vi kan nå derivere som vi alltid har gjort:

$$\frac{dh}{dt} = 2\cos t \cdot (-\sin t) + 4\sin t \cdot \cos t - 3(-\sin t \cdot \sin t + \cos t \cdot \cos t) =$$

$$-2\sin t \cos t + 4\sin t \cos t + 3\sin^2 t - 3\cos^2 t =$$

$$2\sin t \cos t - 3(\cos^2 t - \sin^2 t) = \mathbf{\sin 2t - 3 \cos 2t}$$

Vi kom altså fram til nøyaktig samme svar på “gammelmåten”. Betyr det at den nye formelen vi har lært egentlig er unødvendig? Neida, ikke helt.

Det er ofte slik at det er umulig å angi en helt konkret formel for et bevegelsesmønster. Vi må i stedet se på spesifiserte verdier i punkt etter punkt.

Eksempel 3.6:

Du beveger deg på nytt i samme landskap som i eksempel 3.4, der $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy$. Denne gangen beveger du deg litt mer uregelmessig, men i det du passerer punktet $(4, 3)$ har du en fart og retning som tilsvarer 2m/s i positiv x-retning og 0,5m/s i negativ y-retning. Hvor fort endrer h seg med tiden t i dette øyeblikket?

Løsning: Vi bruker samme formel som i eksempel 3.4, $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. Vi får da:

$$\frac{dh}{dt} = (2x - 3y) \cdot 2 + (4y - 3x) \cdot (-0,5) = 4x - 6y - 2y + \frac{3}{2}x = \frac{11}{2}x - 8y$$

Da er det bare å sette inn de gjeldende koordinatene $x = 4$ og $y = 3$, slik at vi får

$$\frac{dh}{dt} = \frac{11}{2} \cdot 4 - 8 \cdot 3 = \mathbf{-2}$$
 Dette betyr at du beveger deg nedover med en fart på 2m/s.

Eksempel 3.7:

Du beveger deg i et landskap der høyden over havet er gitt av $h(x, y) = x^3 - 2xy^2 + 3y$. I det du passerer punktet $A(1, -3)$ har du en fart på 2m/s i en retning $\frac{\pi}{6}$ radianer til høyre for positiv x-akse.

a) Hvor fort endrer h seg i dette øyeblikket?

b) I hvilken retning (vinkel i forhold til x-aksen) bør du bevege deg for å få størst mulig stigning?

Løsning: a) Vi starter med å finne farten i x- og y-retning: $v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$$\text{mens } v_y = \frac{dy}{dt} = -2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

De partiell-deriverte blir henholdsvis: $\frac{\partial h}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = -4xy + 3$.

$$x = 1 \text{ og } y = -3 \text{ gir da } \frac{\partial h}{\partial x} = 3 - 18 = -15 \text{ og } \frac{\partial h}{\partial y} = 12 + 3 = 15$$

Da kan vi sette inn i formelen $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$, noe som gir:

$$\frac{dh}{dt} = -15\sqrt{3} + 15 \cdot (-1) = -15(\sqrt{3} + 1)$$

b) Vi tenker på samme måte som i a). Farten i x-retning blir $v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos \alpha$ og i y-retning

$v_y = \frac{dy}{dt} = v \sin \alpha$, der v er fartens tallverdi og α er vinkelen i forhold til x-aksen.

Da blir $\frac{dh}{dt} = -15v \cos \alpha + 15v \sin \alpha$. Dette uttrykket er størst når den deriverte er lik null:

$$h_{t\alpha} = 15v \sin \alpha + 15v \cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 0 \Rightarrow \tan \alpha = -1$$

Vi har nå to muligheter, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ og $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Innsetting i $\frac{dh}{dt}$ forteller oss at vi må bevege

oss i en retning som gir en vinkel på $\frac{3\pi}{4}$ til venstre for positiv x-akse for å få størst stigning.

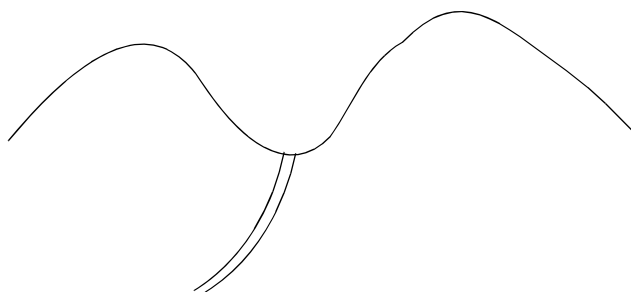
Det kan nevnes at en vektor som peker i den retningen der $h(x, y)$ stiger raskest (i dette tilfellet retningen $\frac{3\pi}{4}$), kalles gradienten til $h(x, y)$. Du kan lære gradienten bedre å kjenne hvis du velger mer matematikk senere i studiet.

Kritiske punkter

Vi har tidligere lært hvordan vi finner maksimums- og minimums-punkter til funksjoner av én variabel: Vi deriverer funksjonen og setter den deriverte lik null. Vi skal nå lære hvordan vi går fram når vi har en funksjon av to variable.

Vi vet at en funksjon av to variable har to partiell-deriverte, $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$. Det første kravet for at vi skal ha et maksimum eller minimum er at begge disse skal være lik null. Punkter der både $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er null, kalles for kritiske punkter. Et kritisk punkt er enten et ekstremalpunkt (altså maksimum eller minimum) eller et salpunkt.

Et salpunkt er et punkt som oppleves som et maks-punkt hvis du beveger deg i x-retning og som et min-punkt når du beveger deg i y-retning (eller motsatt). Vi kan tenke oss en bil som passerer et fjellpass mellom to høye fjell. De som sitter i bilen vil oppleve fjellpasset som et maks-punkt. Samtidig kommer en galning løpende fra den ene fjelltoppen og tenker seg opp på den andre. For han vil fjellpasset oppleves som et min-punkt. Med bakgrunn i dette kan vi si at fjellpasset må være et salpunkt.



Eksempel 3.8:

Finn de kritiske punktene til funksjonen $f(x, y) = x^2 - xy^2 + y$

Løsning: Vi begynner med å partiellderivere og får $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y^2$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 1$.

Begge disse uttrykkene må være lik null for at vi skal ha et kritisk punkt:

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ -2xy + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y^2 \\ 2xy = 1 \end{cases} \text{ Hvis vi setter uttrykket for } 2x \text{ fra den første likningen}$$

inn i den andre, får vi $y^2 \cdot y = 1 \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$. Da blir $x = \frac{1}{2}$, slik at det eneste

kritiske punktet til funksjonen $f(x, y) = x^2 - xy^2 + y$ er punktet $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Andrederivert-testen

Vi skjønner at det blir mye mer omstendelig å finne maks- og min-punkter når vi har to variable i stedet for én. Først må vi (som i eksempel 3.8) løse et likningssett med to ukjente for å finne koordinatene til de kritiske punktene. Deretter må vi gjennom en prosedyre vi kaller andrederivert-testen for å avgjøre om hvert enkelt av de kritiske punktene er et maksimum, minimum eller salpunkt.

Andrederivert-testen er egentlig ganske grei å gjennomføre. Først må vi sette opp de tre andrederiverte f_{xx} , f_{yy} og f_{xy} før vi beregner størrelsen $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ for hvert av de kritiske punktene. Dersom $\Delta > 0$ har vi et ekstremalpunkt, mens $\Delta < 0$ gir et salpunkt. Hvis vi skulle være så uheldige å få $\Delta = 0$ kan ikke andrederivert-testen avgjøre hvilken type punkt vi har med å gjøre. Men dette inntreffer heldigvis nokså sjelden.

Eksempel 3.9:

Avgjør om det kritiske punktet vi fant i eksempel 3.8 er et ekstremalpunkt eller et salpunkt.

Løsning: I forrige eksempel beregnet vi $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y^2$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 1$. Ut fra dette finner vi de

andrederiverte: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2x$ og $f_{xy} = f_{yx} = -2y$. Da er det bare å sette inn

koordinatene til det kritiske punktet $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ og beregne størrelsen Δ :

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2 \cdot (-1) - (-2)^2 = -6$$

På grunn av at $\Delta < 0$ må punktet $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ være et **salpunkt**.

Hvis vi ser litt nærmere på formelen $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ ser vi at produktet $f_{xx} \cdot f_{yy}$ er nødt til å være positivt dersom Δ skal bli positiv. Dette betyr igjen at f_{xx} og f_{yy} må ha samme fortegn dersom funksjonen skal ha et ekstremalpunkt. Da er det ganske enkelt å finne ut om et ekstremalpunkt er maksimums- eller minimums-punkt. Dersom fortegnet på f_{xx} og f_{yy} er positivt (blid graf) har vi et minimumspunkt. I motsatt fall har vi et maksimumspunkt.

Eksempel 3.10:

Bestem samtlige maksimums-, minimums- og salpunkter til funksjonen $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - xy^2$

Løsning: Vi begynner med å finne de førstederiverte: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y - y^2$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2xy$. De

kritiske punktene ligger der både $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er lik null. Vi ser at $\frac{\partial f}{\partial y}$ er enkel å faktorisere, og

vi starter derfor i den enden: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2xy = 2x(1 - y)$. Dette uttrykket blir lik null når

i) $x = 0$ eller ii) $y = 1$. Dette er altså de to eneste stedene vi kan finne kritiske punkter. Vi

må nå ta for oss disse to tilfellene i tur og orden, sette dem inn i likningen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ og se hvilke punkter vi kommer ut med.

i) Vi tar utgangspunkt i $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y - y^2 = 0$, setter $x = 0$ og får $2y - y^2 = 0$.

Denne likningen har løsningene $y = 0$ og $y = 2$, slik at vi allerede har funnet to kritiske punkter, nemlig $(0, 0)$ og $(0, 2)$.

ii) Vi setter nå $y = 1$ inn i $6x + 2y - y^2 = 0$ og får $6x + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$. Da

har vi koordinatene til det tredje og siste kritiske punktet, $(-\frac{1}{6}, 1)$.

For å finne ut om de kritiske punktene er ekstremalpunkter eller salpunkter må vi utføre andrederivert-testen. Vi finner først de andrederiverte: $f_{xx} = 6$, $f_{yy} = -2x$ og $f_{xy} = 2 - 2y$. Vi kan nå sette opp disse resultatene i en liten tabell:

	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	Δ
$(0, 0)$	6	0	2	-4
$(0, 2)$	6	0	-2	-4
$(-\frac{1}{6}, 1)$	6	$\frac{1}{3}$	0	2

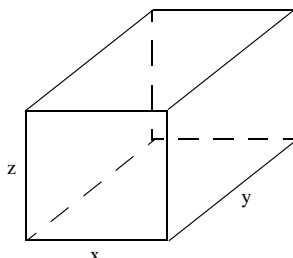
Av verdiene for Δ ytterst til høyre ser vi at $(-\frac{1}{6}, 1)$ er det eneste ekstremalpunktet. Det posi-

tive fortegnet på f_{xx} og f_{yy} tilsier at det må være et minimumspunkt. Vi kan nå dra følgende

konklusjon: **$(0, 0)$ og $(0, 2)$ er salpunkter, mens $(-\frac{1}{6}, 1)$ er et minimumspunkt.**

Eksempel 3.11:

Du skal lage en glassmonter som skal stå på et museum. Monteren skal ha form som et rett prisme (se figur) og den skal ha et volum $V = 320dm^3$.



Glasset på framsiden av monterer koster $300kr/dm^2$, glasset i de tre andre veggene koster $200kr/dm^2$, mens glasset i gulv og tak koster $100kr/dm^2$.

a) Vis at alt glasset i monterer vil koste $K(x, y) = 200xy + \frac{160000}{y} + \frac{128000}{x}$.

b) Finn den lavest mulige prisen på glasset som monterer skal lages av.

Løsning: a) I følge figuren vil glasset i monterer koste

$$K(x, y, z) = 300xz + 2 \cdot 200yz + 2 \cdot 100xy + 200xz = 200xy + 500xz + 400yz.$$

For å finne $K(x, y)$ ser vi at z må elimineres: $V = xyz \Rightarrow z = \frac{V}{xy} = \frac{320}{xy}$. Vi får da:

$$K(x, y, z) = 200xy + 500x \cdot \frac{320}{xy} + 400y \cdot \frac{320}{xy} = 200xy + \frac{160000}{y} + \frac{128000}{x} \quad \text{QED}$$

b) Vi starter med å partiellderivere: $\frac{\partial K}{\partial x} = 200y - \frac{128000}{x^2}$ og $\frac{\partial K}{\partial y} = 200x - \frac{160000}{y^2}$.

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0 \Rightarrow 200y - \frac{128000}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{128000}{200x^2} = \frac{640}{x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{409600}{x^4}$$

$$\text{Innsatt i } \frac{\partial K}{\partial y} = 0, \text{ får vi } 200x - \frac{160000}{409600}x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = 200x \cdot \frac{409600}{160000} = 512x$$

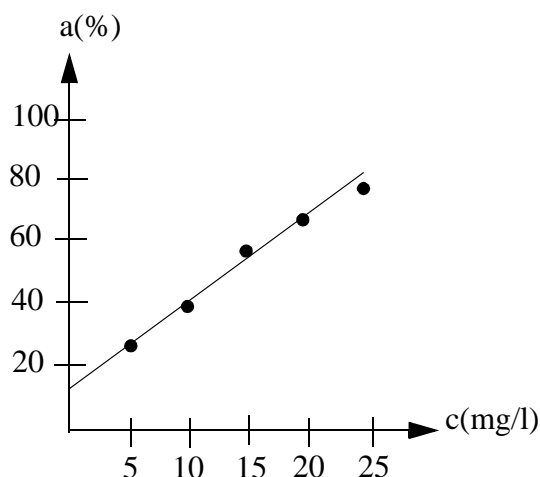
Vi får to løsninger: $x = 0$ (uaktuelt) og $x = 8$. Da blir $y = \frac{640}{x^2} = \frac{640}{8^2} = 10$. Prisen blir da:

$$K = 200 \cdot 8 \cdot 10 + \frac{160000}{10} + \frac{128000}{8} = 16000 + 16000 + 16000 = 48000$$

Minste kvadraters metode

Tenk deg at du sitter med en haug av målepunkter (en haug kan være alt fra tre punkter og oppover). For å behandle måleresultatene matematisk ønsker du å finne likningen for en rett linje $y = ax + b$ som går nærmest mulig de ulike punktene.

Vi kan ta et eksempel fra kjemiens verden: Vi sender elektromagnetisk stråling inn mot en proteinløsning og måler ved hjelp av et spektrofotometer hvor mye stråling som absorberes av løsningen. Vi endrer proteinkonsentrasjonen [mg/l] og foretar en ny måling ved hver konsentrasjon. Måleresultatene presenteres i et koordinatsystem og kan for eksempel bli seende slik ut:



Den rette linja som er lagt inn skal være den linja som samlet sett gir minst mulig avstand fra målepunktene. Vår oppgave blir å finne ut hvordan vi kan bestemme likningen for den rette linja matematisk med utgangspunkt i målepunktene koordinater.

La oss si at disse koordinatene er $(5, 24)$, $(10, 39)$, $(15, 57)$, $(20, 67)$ og $(25, 78)$. Samtidig vet vi at linja $y = ax + b$ går gjennom punktene $(5, 5a + b)$, $(10, 10a + b)$, $(15, 15a + b)$ og så videre. Avviket (altså den vertikale avstanden mellom punktet og den rette linja) ved hvert målepunkt går da fram av følgende tabell:

Punkt nr.	Avvik
1	$5a + b - 24$
2	$10a + b - 39$
3	$15a + b - 57$
4	$20a + b - 67$
5	$25a + b - 78$
Sum	$75a + 5b - 265$

En skulle kanskje tro at dersom en klarte å få summen av alle disse fem avvikene $(75a + 5b - 265)$ minst mulig, så hadde en funnet fram til den riktige linja. Men her er det noe som skurrer, for dette betyr for eksempel at de to linjene $y = 5x - 22$ eller $y = 53$ (flat linje gjennom målingenes middelværdi) må være helt ideelle fordi begge gir at summen av alle avvikene blir lik null! Kan du tenke deg hvorfor vi får så mange morsomme og gale løsninger med denne metoden?

Den riktige framgangsmåten er noe mer komplisert fordi vi i stedet for å summere avvikene blir nødt til å summere kvadratene av hvert enkelt avvik! Vi får da feilfunksjonen

$$F(a, b) = (5a + b - 24)^2 + (10a + b - 39)^2 + (15a + b - 57)^2 + (20a + b - 67)^2 + (25a + b - 78)^2$$

Vi skjønner at det er mye (men ikke uoverkommelig) arbeid med å finne minimumspunktet til denne funksjonen, så vi nøyer oss i stedet med et eksempel der vi har bare tre målepunkter og litt enklere tall.

Eksempel 3.12:

Benytt minste kvadraters metode til å finne den rette linja som er slik at kvadratsummen av hvert enkelt avvik blir minst mulig når du har målepunktene $(1, 2)$, $(2, 5)$ og $(3, 7)$.

Løsning: Vi begynner med å sette opp en tabell over hvert avvik:

Punktets x-verdi	Punktets y-verdi	Linjas y-verdi	Avvik
1	2	$a + b$	$a + b - 2$
2	5	$2a + b$	$2a + b - 5$
3	7	$3a + b$	$3a + b - 7$

Kvadratsummen av avvikene blir nå feilfunksjonen

$$F(a, b) = (a + b - 2)^2 + (2a + b - 5)^2 + (3a + b - 7)^2$$

Vi partiellderiverer uten å multiplisere ut parentesene først:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2(a + b - 2) + 2(2a + b - 5) \cdot 2 + 2(3a + b - 7) \cdot 3 =$$

$$2a + 2b - 4 + 8a + 4b - 20 + 18a + 6b - 42 = 28a + 12b - 66$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2(a + b - 2) + 2(2a + b - 5) + 2(3a + b - 7) =$$

$$2a + 2b - 4 + 4a + 2b - 10 + 6a + 2b - 14 = 12a + 6b - 28$$

Vi får da likningssettet $\begin{cases} 28a + 12b = 66 \\ 12a + 6b = 28 \end{cases}$ som kan løses på flere måter (f. eks. Gauss).

Uansett vil svaret bli $a = \frac{5}{2}$ og $b = -\frac{1}{3}$ slik at likningen for linja blir $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$

Vi har sett at minste kvadraters metode medfører mye regnearbeid når antall punkter blir høyt. Men vi kan unngå mye av dette arbeidet ved å benytte noen enkle formler. Vi kan utlede disse formlene ved å ta utgangspunkt i et vilkårlig antall målepunkter, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, sette opp feilfunksjonen $F(a, b)$, partiellderivere og sette begge de partiellderivate lik null.

Nok prat, formlene ser slik ut:
$$a = \frac{n \sum(xy) - \sum x \sum y}{n \sum(x^2) - (\sum x)^2} \text{ og } b = \frac{\sum(x^2) \sum y - \sum x \sum(xy)}{n \sum(x^2) - (\sum x)^2}.$$

Eksempel 3.13:

Bruk formlene over og se om du kommer fram til samme resultat som i eksempel 3.12.

Løsning: Punktene $(1, 2)$, $(2, 5)$ og $(3, 7)$ gir $\sum x = 1 + 2 + 3 = 6$,

$$\sum y = 2 + 5 + 7 = 14, \quad \sum(xy) = 2 + 10 + 21 = 33 \text{ og}$$

$$\sum(x^2) = 1 + 4 + 9 = 14.$$

$$\text{Da blir } a = \frac{3 \cdot 33 - 6 \cdot 14}{3 \cdot 14 - 6^2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \text{ og } b = \frac{14 \cdot 14 - 6 \cdot 33}{3 \cdot 14 - 6^2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Nøyaktig samme resultat som i eksempel 3.12, men mye mindre arbeid!

Eksempel 3.14:

Finn likningen for den rette linja som gir minst kvadratsumavvik når du har de fem målepunktene $(5, 24)$, $(10, 39)$, $(15, 57)$, $(20, 67)$ og $(25, 78)$.

Løsning: Vi finner først de ulike summene: $\sum x = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 = 75$,

$$\sum y = 24 + 39 + 57 + 67 + 78 = 265,$$

$$\sum(xy) = 120 + 390 + 855 + 1340 + 1950 = 4655 \text{ og}$$

$$\sum(x^2) = 25 + 100 + 225 + 400 + 625 = 1375.$$

$$\text{Dette gir } a = \frac{5 \cdot 4655 - 75 \cdot 265}{5 \cdot 1375 - 75^2} = \frac{3400}{1250} = 2,72 \text{ og}$$

$$b = \frac{1375 \cdot 265 - 75 \cdot 4655}{5 \cdot 1375 - 75^2} = \frac{15250}{1250} = 12,2$$

Da blir likningen for den rette linja $y = 2,72x + 12,2$

Oppgaver

16. Finn de førsteordens partiellderiverte til funksjonene

a) $f(x, y) = 8x^2y + 2x - 5y + 3$

b) $f(x, y, z) = xy \ln(xyz) + 5y^2x$

17. Finn de andreordens partiellderiverte f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} og f_{yy} av funksjonen $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

18. Skisser nivåkurvene til funksjonen $f(x, y) = x^2 - y^2$.
Bruk verdiene $c = -3$, $c = -1$, $c = 1$ og $c = 3$.

19. Finn $\frac{df}{dt}$ både ved hjelp av kjernerregelen og ved å derivere direkte:

a) $f(x, y) = x \cos y$ $x = t^2$ $y = t^3$

b) $f(x, y) = e^{x+y}$ $x = \ln t$ $y = t^2$

20. Du beveger deg i et landskap der høyden over havet er gitt av $h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

I det øyeblikk du passerer punktet $(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ er farten din $3m/s$ og retningen slik at

$\frac{dx}{dt} = 1m/s$. Hva blir $\frac{dh}{dt}$ i dette øyeblikket?

21. Bestem koordinatene til eventuelle maksimums-, minimums- og salpunkter til funksjonene

a) $g(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y + 1$ b) $h(x, y) = x^2y - 2xy + y^2$

22. Du skal bygge en rektvinklet kasse uten lokk (tegn figur). Kassen skal ha sidelengder x og y og høyde z . Selve skjelettet til kassen skal bygges av 12 tynne rør, og den totale lengden rør som skal benyttes er 14 meter.

a) Vis at arealet av kassens overflate (bunn + fire vegger) kan skrives som $A(x, y) = 7x + 7y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy$

b) Hvordan bør sidelengdene x og y samt høyden z velges for at overflaten A skal bli størst mulig?

23. Du har følgende tre målepunkter: $(0, 1)$, $(1, 3)$ og $(2, 6)$. Finn den rette linja som er slik at kvadratsummen av de enkelte avvikene blir minst mulig.

4 Laplace-transformen

Definisjon

Vi har tidligere lært om z-transformen som var et nyttig hjelpemiddel når vi skulle finne den ukjente sekvensen a_n i en differenslikning. Vi transformerte først hele differenslikningen med a_n, a_{n-1} etc. over til z-planet, der vi kunne regne uforstyrret til vi kom fram til $A(z)$, som var z-transformen til a_n . Ved å inverstransformere $A(z)$ fant vi da sekvensen a_n .

På samme måte kan vi si at Laplace-transformen (oppkalt etter den franske matematikeren Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) er svært nyttig ved løsning av differensiallikninger. Det vi gjør her er å transformere diff-likningene over til s-planet. I dette planet blir for eksempel en tidsfunksjon $f(t)$ hetende $F(s)$. Når vi har regnet litt fram og tilbake i s-planet kan vi transformere tilbake til tidsplanet igjen og finne løsningen til differensiallikningen.

Her er definisjonslikningen for Laplace-transformen:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

Uttrykket $L\{f(t)\}$ er tatt med for å presisere at dette er Laplace-transformen til $f(t)$

Eksempel 4.1:

Bruk definisjonslikningen til å finne Laplace-transformen av $f(t) = t$

Løsning: Definisjonen til Laplace-transformen er $L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$, noe som

betyr at vi her må løse integralet $\int_0^{\infty} (e^{-st} \cdot t) dt$ Vi må da ty til delvis integrasjon med

$$g = t \Rightarrow D(g) = 1 \text{ og } D(h) = e^{-st} \Rightarrow h = -\frac{1}{s} e^{-st}.$$

$$\text{Dette gir: } \int (t e^{-st}) dt = t \cdot \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) - \int \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt = -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} + C$$

$$\text{Da blir } F(s) = \int_0^{\infty} (e^{-st} \cdot t) dt = \left[-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty} = (0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

På forrige side beregnet vi Laplace-transformen av den enkle tidsfunksjonen $f(t) = t$. Vi kan forestille oss at det blir en del arbeid når vi får mer kompliserte tidsfunksjoner. Men det er selvfølgelig noen som har sittet og beregnet Laplace-transformer opp gjennom årene, så vi må vel ha lov til å benytte oss av resultatene deres. Her er en tabell over de mest vanlige Laplace-transformene:

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Selv om tabellen er liten, kommer vi ganske langt med bare disse fem linjene. Vi kan lære oss den grunnleggende bruken av tabellen gjennom noen enkle eksempler.

Eksempel 4.2:

Finn ved hjelp av tabellen Laplace-transformen til følgende tidsfunksjoner:

a) $f(t) = t^2 - 3t + 4$ b) $g(t) = e^{-3t} - \cos 2t$ c) $h(t) = e^{-3t} \cdot \cos 2t$

Løsning: a) $L\{f(t)\} = F(s) = \frac{2!}{s^3} - 3 \cdot \frac{1!}{s^2} + 4 \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} = \frac{4s^2 - 3s + 2}{s^3}$

b)

$$L\{e^{-3t} - \cos 2t\} = G(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{s}{s^2+4} = \frac{s^2+4 - s(s+3)}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{-3s+4}{(s+3)(s^2+4)}$$

c) Her er det kanskje nærliggende å tro at $L\{e^{-3t} \cdot \cos 2t\} = L\{e^{-3t}\} \cdot L\{\cos 2t\}$, men dette blir røv ruskende galt! Husk at Laplace-transformen er definert ved et integral, og vi vet fra før at integralet av et produkt ikke er produktet av de integrerte faktorene.

Vi må bare innse at tabellen ikke kan hjelpe oss med å finne all verdens Laplace-transformer, vi trenger noen smarte regler i tillegg!

Multiplikasjon med e^{at}

Tenk deg en funksjon $f(t)$ som har Laplace-transformen $L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$.

Hvilken innflytelse får det nå om vi multipliserer $f(t)$ med faktoren e^{at} ?

Vi skulle da få $L\{e^{at} \cdot f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} \cdot f(t) dt = F(s-a)$.

Vi har dermed funnet en ny formel:

$$L\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$$

Multiplikasjon med e^{at} medfører altså at vi må bytte ut s med $s-a$ i Laplace-transformen.

Eksempel 4.3:

Bruk formelen over til å finne Laplace-transformen til

a) $h(t) = e^{-3t} \cdot \cos 2t$

b) $q(t) = t^3 e^{-t}$

Løsning: a) Tabellen gir oss $L\{\cos 2t\} = F(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$

Men når vi skal finne $L\{e^{-3t} \cdot \cos 2t\}$ bruker vi bare den nye formelen vår med $a = -3$:

$$L\{e^{-3t} \cdot \cos 2t\} = H(s) = F(s+3) = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4} = \frac{s+3}{s^2 + 6s + 13}$$

b) Fra tabellen finner vi $L\{t^3\} = F(s) = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$

Men nå blir $L\{t^3 e^{-t}\} = Q(s) = F(s+1) = \frac{6}{(s+1)^4}$

Vi kan ut fra dette si at en multiplikasjon med faktoren e^{at} i tidsplanet gir en forskyvning på a enheter langs s-aksen når vi kommer til s-planet.

Multiplikasjon med t^n

Denne regelen er litt verre å utlede, så vi dropper det og går rett på formelen:

$$L\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^n F}{ds^n}$$

Eksempel 4.4:

Bruk formelen over til å finne Laplace-transformen til følgende tidsfunksjoner:

a) $p(t) = t \sin 3t$ b) $q(t) = t^3 e^{-t}$

Løsning: a) Vi setter $f(t) = \sin 3t$ og finner $F(s)$ fra tabellen:

$$L\{\sin 3t\} = F(s) = \frac{3}{s^2 + 9} = 3 \cdot (s^2 + 9)^{-1}$$

$$\text{Da er } \frac{dF}{ds} = 3 \cdot (-1) \cdot (s^2 + 9)^{-2} \cdot 2s = \frac{-6s}{(s^2 + 9)^2}$$

Da kan vi benytte formelen over og finner

$$L\{t \cdot f(t)\} = P(s) = (-1) \cdot \frac{dF}{ds} = \frac{6s}{(s^2 + 9)^2}$$

b) Her er $f(t) = e^{-t}$ og vi finner da $L\{e^{-t}\} = F(s) = \frac{1}{s+1} = (s+1)^{-1}$

$$\text{Da blir } \frac{dF}{ds} = (-1) \cdot (s+1)^{-2}, \frac{d^2 F}{ds^2} = (-1) \cdot (-2) \cdot (s+1)^{-3} = 2(s+1)^{-3} \text{ og}$$

$$\frac{d^3 F}{ds^3} = 2 \cdot (-3) \cdot (s+1)^{-4} = \frac{-6}{(s+1)^4}$$

Da er det bare å sette inn i formelen over:

$$L\{t^3 \cdot f(t)\} = Q(s) = (-1)^3 \cdot \frac{d^3 F}{ds^3} = \frac{d^3 F}{ds^3} = \frac{6}{(s+1)^4}$$

Svaret ble heldigvis det samme som i eksempel 4.3b), men det må vel tilstås at den metoden vi brukte da var noe enklere enn denne.

Enhetsfunksjonen $u(t)$

Denne funksjonen er kjent under flere ulike navn, (Heaviside-funksjonen, Enhetstrappesfunksjonen), og flere ulike skrivemåter ($H(t)$, $U(t)$).

Definisjonen er forholdsvis enkel:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

Problemet er at $u(t)$ sjelden framstår i rendyrket form. Når $u(t)$ benyttes er det som oftest i forbindelse med en tidsforsinkelse. Dersom vi tidsforsinker $u(t)$ med τ (for eksempel τ

sekunder), får vi: $u(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < \tau \\ 1 & \text{for } t \geq \tau \end{cases}$ Vi må da forutsette at $\tau > 0$.

Eksempel 4.5:

Finn Laplace-transformen til a) $u(t)$ b) $u(t - \tau)$ c) $t \cdot u(t - 2)$

Løsning: Vi finner ikke noe om $u(t)$ i tabellen på side 47, så her blir vi nødt til å bruke definisjonen:

$$\text{a) } L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

Laplace-transformen er uavhengig av hva som skjer før $t = 0$, slik at $L\{u(t)\} = L\{1\}$.

$$\text{b) } L\{u(t - \tau)\} = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{\tau}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s} e^{-\tau s} \right) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$$

Siden $u(t - \tau) = 0$ for $t < \tau$ blir nedre grense for integralet lik τ .

$$\text{c) } L\{t \cdot u(t - 2)\} = \int_2^{\infty} (e^{-st} \cdot t) dt = \left[-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_2^{\infty} =$$

$$(0 - 0) - \left(-\frac{2}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} \right) = \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-2s} = \frac{2s + 1}{s^2} \cdot e^{-2s}$$

Her brukte vi blant annet resultatet fra integrasjonen i eksempel 4.1 for å finne svaret.

Delt funksjonsforskrift

Når vi får flere enhetsfunksjoner i en og samme funksjon er det som oftest mest oversiktlig å skrive funksjonen på den måten som kalles delt funksjonsforskrift. Dette innebærer at vi skriver funksjonen på flere linjer, en linje for hvert tidsintervall. På denne måten vil for

eksempel funksjonen $f(t) = t \cdot u(t-2)$ kunne skrives slik: $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ t & t \geq 2 \end{cases}$

Har vi for eksempel $g(t) = u(t) + 2u(t-1)$ blir dette 1 for $t < 1$, men $1 + 2 = 3$ for $t \geq 1$.

Vi kan altså skrive $g(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ 3 & t \geq 1 \end{cases}$

Eksempel 4.6:

a) Skriv $f(t) = u(t) - \cos^2 t \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos 2t \cdot u(t - \pi)$ på delt funksjonsforskrift.

b) Skriv funksjonen $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-t} & 0 < t < 1 \\ t+1 & t \geq 1 \end{cases}$ ved hjelp av enhetsfunksjoner.

Løsning: a) For $0 < t < \frac{\pi}{2}$ er $f(t) = 1$, for $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$ er $f(t) = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$, og for

$$t \geq \pi \text{ er } f(t) = \sin^2 t + \cos 2t = \sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t$$

$$\text{Dermed blir } f(t) = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{0 < t < \frac{\pi}{2}} \\ \mathbf{\sin^2 t} & \mathbf{\frac{\pi}{2} \leq t < \pi} \\ \mathbf{\cos^2 t} & \mathbf{t \geq \pi} \end{cases}$$

b) Her må vi selvfølgelig starte med $\frac{1}{1-t} \cdot u(t)$. Så må vi legge til noe fra og med $t = 1$

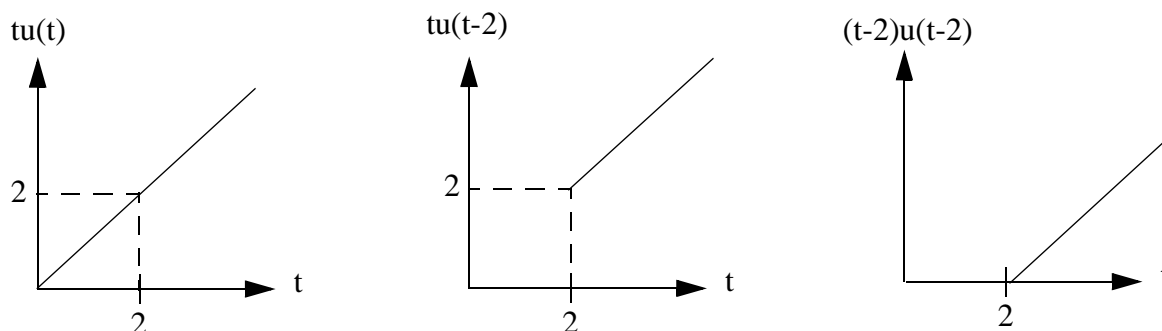
slik at summen blir $t + 1$. Det vi legger til må da være

$$t + 1 - \frac{1}{1-t} = \frac{t-t^2+1-t-1}{1-t} = \frac{-t^2}{1-t} = \frac{t^2}{t-1}.$$

$$\text{Dermed blir } g(t) = \frac{1}{1-t} \cdot u(t) + \frac{t^2}{t-1} \cdot u(t-1)$$

Tidsforsinkelse

Vi skal nå se litt nærmere på begrepet tidsforsinkelse. Med tidsforsinkelse mener vi at forløpet forskyves mot høyre. Det er forhåpentligvis greit å skjønne at funksjonen $u(t-2)$ er en tidsforsinket utgave av $u(t)$. Litt verre blir det når enhetsfunksjonene multipliseres med andre funksjoner. Hvordan ser for eksempel $t \cdot u(t-2)$ ut i forhold til $t \cdot u(t)$?



Disse figurene gir svaret. Funksjonen $t \cdot u(t-2)$ (i midten) følger kurven til $t \cdot u(t)$, men starter i punktet $(2, 2)$. Det er altså ikke dette vi forbinder med tidsforsinkelse. Dersom vi vil gi funksjonen $t \cdot u(t)$ en tidsforsinkelse på 2, må vi bytte ut *alle* t -er med $t-2$. Vi får da funksjonen $(t-2) \cdot u(t-2)$ som er skissert til høyre.

Eksempel 4.7:

Gi følgende tidsfunksjoner tidsforsinkelsen τ som angitt:

a) $f(t) = (t^2 - 3t + 2) \cdot u(t) \quad \tau = 3$

b) $g(t) = (\cos 2t - \sin t) \cdot u(t) \quad \tau = \pi$

Løsning: a) Vi bytter ut alle t -er med $t-3$ og får:

$$f(t-3) = [(t-3)^2 - 3(t-3) + 2] \cdot u(t-3) =$$

$$[t^2 - 6t + 9 - 3t + 9 + 2] \cdot u(t-3) = (t^2 - 9t + 20) \cdot u(t-3)$$

b) Her må vi bytte ut t med $t-\pi$:

$$g(t-\pi) = [\cos 2(t-\pi) - \sin(t-\pi)] \cdot u(t-\pi) =$$

$$[\cos(2t-2\pi) - \sin(t-\pi)] \cdot u(t-\pi) = (\cos 2t + \sin t) \cdot u(t-\pi)$$

Her brukte vi vårt kjennskap til de periodiske forløpene til sinus og cosinus. Alternativt kunne vi brukt de trigonometriske formlene $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$ og $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$.

Du har kanskje registrert at enhetsfunksjonen $u(t)$ ikke har noen innvirkning på Laplace-transformen. Det spiller derfor ingen rolle om vi skriver $\sin t \cdot u(t)$ eller bare $\sin t$. Den enkleste skrivemåten er vanligvis helt OK, men i oppgaver der tidsforsinkelse inngår bør $u(t)$ tas med. Grunnen til dette er at det er lett å glemme enhetsfunksjonen når vi legger på en tidsforsinkelse. Det er stor forskjell på $\sin(t - \pi) \cdot u(t - \pi)$ og bare $\sin(t - \pi)$!

Eksempel 4.8:

Finn Laplace-transformen til funksjonene $f(t) = t \cdot u(t)$ og $g(t) = (t - 2) \cdot u(t - 2)$, som er en tidsforsinket utgave av $f(t)$.

Løsning: Vi finner fra tabellen på side 47 at $F(s) = L\{f(t)\} = L\{t \cdot u(t)\} = L\{t\} = \frac{1}{s^2}$.

Når det gjelder $G(s) = L\{(t - 2) \cdot u(t - 2)\}$ blir vi nødt til å bruke definisjonen:

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot g(t) dt = \int_2^{\infty} e^{-st} \cdot (t - 2) dt$$

Prøver delvis integrasjon: $g = t - 2 \Rightarrow D(g) = 1$ og $D(h) = e^{-st} \Rightarrow h = -\frac{1}{s} e^{-st}$

$$\text{Nå blir } \int e^{-st} \cdot (t - 2) dt = -\frac{t-2}{s} e^{-st} - \int \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt = -\frac{t-2}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} + C$$

Da er det bare å sette inn grensene:

$$\int_2^{\infty} e^{-st} \cdot (t - 2) dt = \left[-\frac{t-2}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_2^{\infty} = (0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{s^2} e^{-2s} \right) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

I dette eksemplet fant vi først Laplace-transformen av $f(t) \cdot u(t)$ og deretter av den tidsforsinkete funksjonen $g(t) = f(t - 2) \cdot u(t - 2)$. Resultatene ble henholdsvis $F(s) = \frac{1}{s^2}$ og

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2} = e^{-2s} \cdot F(s).$$

På bakgrunn av dette kan vi driste oss til å framsette en generell formel som kan benyttes når vi skal finne Laplace-transformen av tidsforsinkete funksjoner.

Vi kaller tidsforsinkelsen for τ og får:

$$\boxed{L\{f(t - \tau) \cdot u(t - \tau)\} = e^{-\tau s} \cdot F(s)}$$

Eksempel 4.9:

Benytt formelen $L\{f(t - \tau) \cdot u(t - \tau)\} = e^{-\tau s} \cdot F(s)$ til å finne Laplace-transformen til

$$\text{a) } r(t) = (t^2 + 2t - 3) \cdot u(t - 1) \qquad \text{b) } s(t) = \tan t \cdot \sin 2t \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Løsning: a) Vi ser at $\tau = 1$ og $f(t - 1) = t^2 + 2t - 3$. Men hvordan finner vi da $f(t)$?

Det er ikke så veldig vanskelig. Vi må bare gå motsatt vei av det vi gjorde da vi tidsforsinket funksjonene i eksempel 4.7. Ved å bytte ut t -en i $f(t - 1)$ med $t + 1$ kommer vi selvfølgelig direkte til $f(t)$!

Vi får altså:

$$f(t + 1 - 1) = (t + 1)^2 + 2(t + 1) - 3 = t^2 + 2t + 1 + 2t + 2 - 3 = t^2 + 4t$$

Da blir $F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} = \frac{4s + 2}{s^3}$ (fra tabell), og svaret blir da:

$$\text{Da blir } R(s) = L\{(t^2 + 2t - 3) \cdot u(t - 1)\} = \frac{(4s + 2)e^{-s}}{s^3}$$

b) Vi kan først undersøke om uttrykket $\tan t \cdot \sin 2t$ kan forenkles:

$$\tan t \cdot \sin 2t = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot 2 \sin t \cos t = 2 \sin^2 t$$

Her er $\tau = \frac{\pi}{2}$ og $f\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin^2 t$. Da får vi $f\left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Da må vi bare finne ut hva $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ er for noe:

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin t \cos \frac{\pi}{2} + \cos t \sin \frac{\pi}{2} = \cos t$$

Da er altså $f(t) = 2 \cos^2 t = 1 + \cos 2t$ (denne siste omskrivingen er nødvendig for å få en enkel Laplace-transform).

$$\text{Dermed får vi: } F(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{s^2 + 4 + s^2}{s(s^2 + 4)} = \frac{2s^2 + 4}{s(s^2 + 4)}$$

$$\text{Konklusjonen må da bli at } S(s) = L\left\{\tan t \cdot \sin 2t \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{(2s^2 + 4) \cdot e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s(s^2 + 4)}$$

Invers Laplace-transform

Når vi benytter Laplace-transformen (for eksempel til løsning av diff-likninger) må vi kunne transformere begge veier. Vi har nylig lært en del regler for transformering fra tidsplanet til s -planet, og nå skal vi se hvordan vi kan gå den andre veien.

Vi skal altså lære oss å finne $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$, der L^{-1} er den inverse Laplace-operatoren. Vi skal ikke bruke noen definisjonslikning til dette. Vi tar i stedet utgangspunkt i tabellen på side 47 og lager oss en ny tabell skreddersydd for invers Laplace-transform:

$F(s)$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$

Eksempel 4.10:

Bruk tabellen over til å finne den inverse Laplace-transformen av følgende funksjoner av s :

a) $F(s) = \frac{12}{s^5}$

b) $G(s) = \frac{5}{s+2}$

c) $H(s) = \frac{6}{s^2+9}$

Løsning: a) Den nest øverste linjen i tabellen gir $f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = 12 \cdot \frac{t^4}{4!} = \frac{12t^4}{24} = \frac{1}{2}t^4$

b) Den tredje linjen gir $g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = 5 \cdot e^{-2t}$

c) Siden det ikke forekommer noen s i telleren må det være nest nederste linje som skal benyttes her. Vi får da: $h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = 6 \cdot \frac{1}{3} \sin 3t = 2 \sin 3t$

For å greie å finne den inverse Laplace-transformen til litt mer innfløkte funksjoner av s , må vi ha noen generelle formler i tillegg til tabellen på forrige side. Hvis vi tar utgangspunkt i formelen på side 48: $L\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s - a)$, kan vi enkelt skrive om denne til å gjelde for invers Laplace-transform. Den blir da seende slik ut:

$$L^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} \cdot f(t)$$

Eksempel 4.11:

Bruk formelen over til å finne den inverse Laplace-transformen til

$$\text{a) } G(s) = \frac{14}{(s + 1)^3}$$

$$\text{b) } H(s) = \frac{2s - 5}{s^2 + 4s + 20}$$

Løsning: a) Når vi skal benytte formelen $L^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} \cdot f(t)$ må vi ta utgangspunkt i at

$$a = -1 \text{ og da blir } F(s + 1) = \frac{14}{(s + 1)^3} \text{ slik at } F(s) = \frac{14}{s^3}.$$

$$\text{Vi invers-transformerer } F(s) \text{ og finner } f(t) = 14 \cdot \frac{t^2}{2!} = 7t^2$$

$$\text{Formelen gir oss da at } g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = e^{-t} \cdot 7t^2 = 7t^2 e^{-t}$$

b) Denne oppgaven er litt mer uoversiktlig, men vi er nødt til å starte med nevneren. Den kan ikke faktoriseres, men vi kan skrive den som summen av et kvadrat og et tall. Vi får da

$$H(s) = \frac{2s - 5}{s^2 + 4s + 20} = \frac{2s - 5}{(s + 2)^2 + 16}, \text{ og vi begynner å ane at } a = -2.$$

For å greie å invers-transformere dette uttrykket må vi kunne skrive det som $F(s + 2)$. Vi må derfor ordne oss slik at også telleren inneholder $s + 2$; Vi tåler ikke en eneste "normal" s som slenger omkring!

$$\text{Vi får da: } H(s) = \frac{2s - 5}{(s + 2)^2 + 16} = \frac{2(s + 2) - 9}{(s + 2)^2 + 16} = F(s + 2)$$

$$\text{Da har vi naturligvis at } F(s) = \frac{2s - 9}{s^2 + 16} = \frac{2s}{s^2 + 16} - \frac{9}{s^2 + 16}$$

Invers-transform gir $f(t) = 2 \cos 4t - 9 \cdot \frac{1}{4} \sin 4t = 2 \cos 4t - \frac{9}{4} \sin 4t$, og vi får da:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = e^{-2t} \cdot \left(2 \cos 4t - \frac{9}{4} \sin 4t\right) = \frac{e^{-2t}}{4} (8 \cos 4t - 9 \sin 4t)$$

Når en Laplace-transform inneholder en eller flere faktorer av typen $e^{-\tau s}$ har vi selvfølgelig med tidsforsinkelse å gjøre. Vi kan da enkelt snu om formelen på side 53 til å gjelde invers Laplace-transform. Vi får da

$$L^{-1}\{e^{-\tau s} \cdot F(s)\} = f(t - \tau) \cdot u(t - \tau)$$

Eksempel 4.12:

Bruk formelen over til å invers-transformere følgende funksjoner av s :

$$\text{a) } G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$\text{b) } H(s) = \frac{2se^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+1)}$$

Løsning: a) Når vi sammenligner med formelen som skal benyttes, ser vi at $\tau = 2$ og at $F(s) = \frac{1}{s^2}$.

Da finner vi lett at $f(t) = t$ slik at $L^{-1}\{G(s)\} = g(t) = (t-2) \cdot u(t-2)$

b) Her blir vi nødt til å foreta en delbrøksoppspalting før vi kan komme i gang. Vi holder faktoren

$$e^{-\pi s} \text{ utenfor og delbrøksoppspalter bare } F(s) = \frac{2s}{(s+1)(s^2+1)}.$$

Vi kan bruke kjappmetoden på førstegradsleddet, og får da:

$$F(s) = \frac{2s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{-1}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} =$$

$$\frac{-s^2 - 1 + Bs^2 + Bs + Cs + C}{(s+1)(s^2+1)}. \text{ Likningssettet blir slik: } \begin{cases} -1 + B = 0 \\ B + C = 2 \\ -1 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Da har vi funnet ut at $F(s) = \frac{2s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+1}$, noe som gir

$$f(t) = -e^{-t} + \cos t + \sin t$$

Da er det bare å innføre tidsforsinkelsen:

$$f(t-\pi) = -e^{-(t-\pi)} + \cos(t-\pi) + \sin(t-\pi) = -e^{-(t-\pi)} - \cos t - \sin t$$

Svaret blir da: $L^{-1}\{H(s)\} = h(t) = (-e^{-(t-\pi)} - \cos t - \sin t) \cdot u(t-\pi) =$

$$-(e^{-(t-\pi)} + \cos t + \sin t) \cdot u(t-\pi)$$

Differensiallikninger

Vi skal til slutt i dette kapitlet kikke på et viktig anvendelsesområde for Laplace-transformen, nemlig løsning av differensiallikninger. Det viser seg at Laplace er meget godt egnet for dette formålet, spesielt om vi har gitt konkrete startbetingelser ($x(0)$ og eventuelt $x'(0)$).

Grunnen til akkurat dette skjønner vi når vi tar en titt på formlene for Laplace-transformen til de deriverte av en tidsfunksjon $x(t)$. Utgangspunktet vårt her er at $L\{x(t)\} = X(s)$. Vi får da følgende formler for Laplace-transformen til de deriverte av $x(t)$:

$$L\{x'(t)\} = sX(s) - x(0)$$

$$L\{x''(t)\} = s^2X(s) - s \cdot x(0) - x'(0)$$

Hvis en har bruk for $L\{x'''(t)\}$ osv er det bare å bygge videre på disse formlene.

Eksempel 4.13:

Benytt Laplace-transformen til å løse den førsteordens differensiallikningen

$$\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t} \quad x(0) = 3$$

Løsning: Starter med å Laplace-transformere hele differensiallikningen og må da benytte formelen for

$$L\{x'(t)\} \text{ på det første leddet: } sX(s) - 3 + 2X(s) = \frac{1}{s+1}$$

Nå gjelder det å finne et uttrykk for $X(s)$:

$$sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s+1} + 3 \Rightarrow (s+2)X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{3s+3}{s+1} = \frac{3s+4}{s+1}$$

Da blir $X(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$ som kan delbrøksoppspaltes ved hjelp av kjappmetoden:

$$\text{Vi får da: } X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \Rightarrow x(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Det er ganske enkelt å sjekke at dette svaret er riktig ved å sette prøve på likningen.

Dersom ingen startbetingelser er gitt, kan en for eksempel sette $x(0) = a$ og regne videre ut fra det. I eksemplet over vil en da komme ut med følgende svar: $x(t) = e^{-t} + (a-1)e^{-2t}$.

Løsning av tilsvarende lineære diff-likning uten bruk av Laplace vil gi $x(t) = e^{-t} + Ce^{-2t}$, som i praksis er det samme.

Eksempel 4.14:

Bruk Laplace til å løse den andreordens differensiallikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 1 \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 1$$

Løsning: Vi starter med å Laplace-transformere hele differensial-likningen:

$$s^2X(s) - s \cdot 0 - 1 + 2(sX(s) - 0) + 5X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{Vi rydder opp og får: } s^2X(s) + 2sX(s) + 5X(s) = \frac{1}{s} + 1 \Rightarrow$$

$$(s^2 + 2s + 5) \cdot X(s) = \frac{s+1}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{s+1}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

$$\text{Her må det delbrøksoppspaltes. } \frac{s+1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}$$

$$\text{Vi benytter kjappmetoden for å finne } A \text{ og finner da } A = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Det blir litt tyngre å finne de to siste: } \frac{1}{5} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5} = \frac{\frac{1}{5}s^2 + \frac{2}{5}s + 1 + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

$$\text{Likningene blir nå slik: } \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + B = 0 \\ \frac{2}{5} + C = 1 \\ 1 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B = -\frac{1}{5} \\ C = \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Vi har nå at

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5} + \frac{-\frac{1}{5}s + \frac{3}{5}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s-3}{(s+1)^2 + 4} =$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} - \frac{4}{(s+1)^2 + 4} \right]$$

Invers Laplace gir nå:

$$x(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot e^{-t}(\cos 2t - 2 \sin 2t) = \frac{1 - e^{-t}(\cos 2t - 2 \sin 2t)}{5}$$

Eksempel 4.15:

Løs differensiallikningen $\frac{dx}{dt} + 2x = g(t)$ $x(0) = 0$, når $g(t) = \begin{cases} 5 \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$

Løsning: Likningen må Laplace-transformeres, og da må vi først og fremst finne Laplace-transformen til $g(t)$. Vi starter med å skrive om $g(t)$ ved hjelp av enhetsfunksjoner:

$$g(t) = 5 \sin t \cdot u(t) - 5 \sin t \cdot u(t - \pi)$$

Det første leddet er enkelt å transformere. Det andre trenger litt omskriving først. Her er

$$\tau = \pi \text{ slik at } -5 \sin t = f(t - \pi). \text{ Da er}$$

$$f(t) = f(t + \pi - \pi) = -5 \sin(t + \pi) = -5(\sin t \cos \pi + \cos t \sin \pi) = 5 \sin t$$

Vi får da $g(t) = 5 \sin t \cdot u(t) + 5 \sin(t - \pi) \cdot u(t - \pi)$, og Laplace-transformen blir da

$$L\{g(t)\} = \frac{5}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \cdot \frac{5}{s^2 + 1} = \frac{5 + 5e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

Da kan vi prøve å løse diff-likningen på "vanlig" måte:

$$sX(s) + 2X(s) = \frac{5 + 5e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \Rightarrow X(s) = \frac{5 + 5e^{-\pi s}}{(s + 2)(s^2 + 1)}$$

$$\text{Delbrøksoppspalting: } \frac{5}{(s + 2)(s^2 + 1)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} = \frac{1}{s + 2} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} =$$

$$\frac{s^2 + 1 + Bs^2 + 2Bs + Cs + 2C}{(s + 2)(s^2 + 1)}$$

$$\text{Likningene blir: } \begin{cases} 1 + B = 0 \\ 2B + C = 0 \\ 1 + 2C = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vi har nå at } X(s) = \frac{1}{s + 2} + \frac{-s + 2}{s^2 + 1} + \frac{e^{-\pi s}}{s + 2} + \frac{(-s + 2)e^{-\pi s}}{s^2 + 1}. \text{ Da blir}$$

$$x(t) = e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t + [e^{-2(t-\pi)} - \cos(t-\pi) + 2 \sin(t-\pi)] \cdot u(t-\pi) =$$

$$e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t + [e^{-2(t-\pi)} + \cos t - 2 \sin t] \cdot u(t-\pi)$$

$$\text{Eller som delt funksjonsforskrift: } x(t) = \begin{cases} e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t & 0 < t < \pi \\ e^{-2t} + e^{-2(t-\pi)} & t \geq \pi \end{cases}$$

Oppgaver

24. Finn Laplace-transformen til følgende tidsfunksjoner:

$$\text{a) } x(t) = 1 - 2e^{-2t} \quad \text{b) } x(t) = 3 \cos 2t - 2 \sin 2t \quad \text{c) } x(t) = e^{-2t} \sin 3t$$

$$\text{d) } x(t) = e^{-3t} \cos 2t \quad \text{e) } x(t) = t \sin 3t \quad \text{f) } x(t) = t^2 \sin t$$

$$\text{g) } x(t) = te^{-t} \cdot u(t-1) \quad \text{h) } x(t) = \left(t - \frac{\pi}{2} + \cos t\right) \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

25. Finn den inverse Laplace-transformen til følgende funksjoner av s :

$$\text{a) } X(s) = \frac{3}{s^5} \quad \text{b) } X(s) = \frac{3}{2s-1} \quad \text{c) } X(s) = \frac{2s-1}{s^2+4}$$

$$\text{d) } X(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} \quad \text{e) } X(s) = \frac{1}{(s-1)^3}$$

$$\text{f) } X(s) = \frac{2s+1}{s^2-2s+2} \quad \text{g) } X(s) = \frac{e^{-2s}}{s+3} \quad \text{h) } X(s) = \frac{se^{-s}}{(s+1)(s+2)}$$

26. Løs differensiallikningene ved hjelp av Laplace:

$$\text{a) } x'' + 3x' + 2x = 0 \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 1$$

$$\text{b) } x'' + 2x' + 5x = 0 \quad x(0) = 3 \quad x'(0) = -3$$

$$\text{c) } x'' + x = 3 \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 1$$

$$\text{d) } x'' - x = e^{2t} \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 1$$

$$\text{e) } x'' + x = f(t) \quad f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{matrix}$$

5 Fourier-rekker

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) gikk i skole i Paris og ble her lært opp av Laplace og andre framstående franske matematikere. Hans viktigste bidrag til dagens matematikk er teorien om Fourier-rekkene som ble publisert i 1822.

Fourier fant ut at enhver periodisk funksjon kan skrives som summen av et konstantledd og en uendelig lang rekke av sinus- og cosinus-funksjoner med ulik amplitude og frekvens. Både Fourier-rekkene og Fourier-transformen (som blir behandlet i neste kapittel) er svært mye brukt i forbindelse med signalbehandling.

Definisjon

Vi tar utgangspunkt i en tidsfunksjon $f(t)$ som har periodetida T . Denne funksjonen kan i følge Fourier skrives som

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \text{ der } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Formlene for beregning av Fourier-koeffisientene a_0 , a_n og b_n ser slik ut:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$$

Integrasjonsområdet fra t_0 til $t_0 + T$ forteller oss at vi skal integrere over nøyaktig en periode av $f(t)$. Hvor vi starter og slutter er fullstendig opp til oss selv, fordi verdien av integralet blir uavhengig av t_0 !

Hvis vi kikker litt nærmere på definisjonen av Fourier-koeffisienten a_0 ser vi at denne rett og slett er middelverdien til $f(t)$. Dette er for såvidt ikke urimelig fordi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \text{ og middelverdien til alle cosinus- og sinus-ledd er}$$

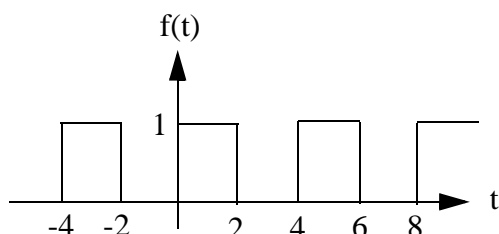
som kjent lik 0.

På neste side skal vi prøve å beregne alle Fourier-koeffisientene og utlede Fourier-rekka til en enkel periodisk funksjon $f(t)$. Det er vanlig å oppgi funksjonsforløpet over en hel periode $[t_0, t_0 + T]$ og etterpå føye til $f(t + T) = f(t)$ som spesifiserer at periodetida er T .

Eksempel 5.1:

Finn Fourier-rekka til den periodiske funksjonen $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 2 \\ 0 & 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad f(t+4) = f(t)$

Løsning: Vi starter med å tegne opp funksjonen så vi ser hva det er snakk om:



Vi finner først $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$, og ut fra grafen gjetter vi at middelveiden må være $a_0 = \frac{1}{2}$.

Så var det a_n . Vi velger $t_0 = 0$ og får:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt + \int_2^4 0 \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right]_0^2 = \frac{\sin n\pi - \sin 0}{n\pi}. \text{ Siden } \sin n\pi = 0, \text{ blir } a_n = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right]_0^2 =$$

$$\frac{-(\cos(n\pi) - \cos 0)}{n\pi} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}. \text{ Uttrykket } \cos(n\pi) \text{ kommer til å gå igjen mye}$$

under arbeidet med Fourier-rekker. Siden $\cos \pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\cos 3\pi = -1$,

osv. kan vi gjette oss til at $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Det er like greit å lære seg dette med en

$$\text{gang!! Nå blir } b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}.$$

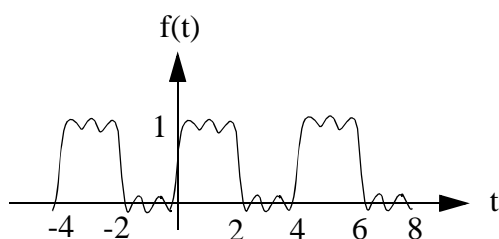
Her er det fornuftig å skille mellom partall og oddetall. Vi ser at $b_n = 0$ når n er partall og at

$b_n = \frac{2}{n\pi}$ når n er oddetall. Fordi alle oddetall kan representeres som $2n - 1$, blir Fourier-

$$\text{rekka til } f(t) \text{ lik } \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \cdot \sin\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi t}{2n-1}$$

Når vi kikker nærmere på resultatet fra eksempel 5.1 ser vi at den uendelig lange Fourier-rekka

begynner slik: $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{2} + \dots \right)$ Dette gir følgende forløp:

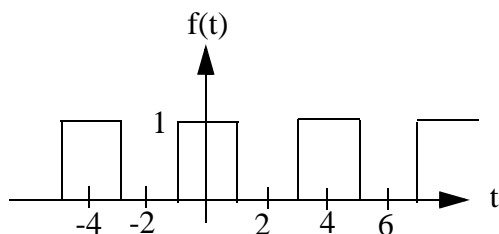


Jo flere ledd vi tar med, jo nærmere kommer vi den ideelle firkantpulsen. I dette eksemplet inneholdt ikke Fourier-rekka et eneste cosinus-ledd. Hva var årsaken til dette? Vi kan besvare dette spørsmålet ved å se på et lignende eksempel.

Eksempel 5.2:

Finn Fourier-koeffisientene til funksjonen $f(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t \leq 1 \\ 0 & 1 < t \leq 3 \end{cases}$ $f(t+4) = f(t)$

Løsning: Denne funksjonen ser slik ut:



Her er fortsatt $\omega = \frac{\pi}{2}$ og $a_0 = \frac{1}{2}$. Denne gangen velger vi $t_0 = -1$ som gir

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^3 f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right] \Bigg|_{-1}^1 =$$

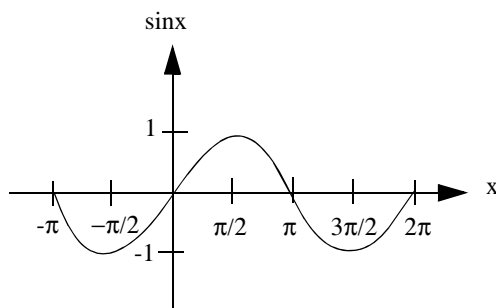
$$\frac{1}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^3 f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right] \Bigg|_{-1}^1 =$$

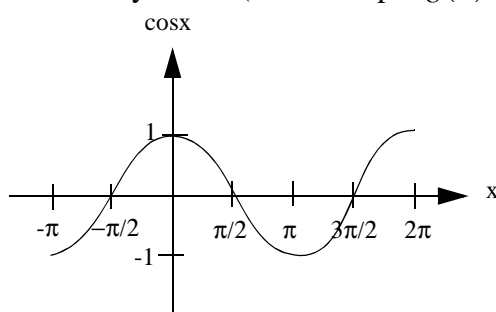
$$-\frac{1}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right] = 0 \Rightarrow \text{Rekka inneholder ikke et eneste sinus-ledd!}$$

Odde og jamne funksjoner

En odde funksjon er en funksjon som er symmetrisk om origo (for eksempel $f(x) = \sin x$):

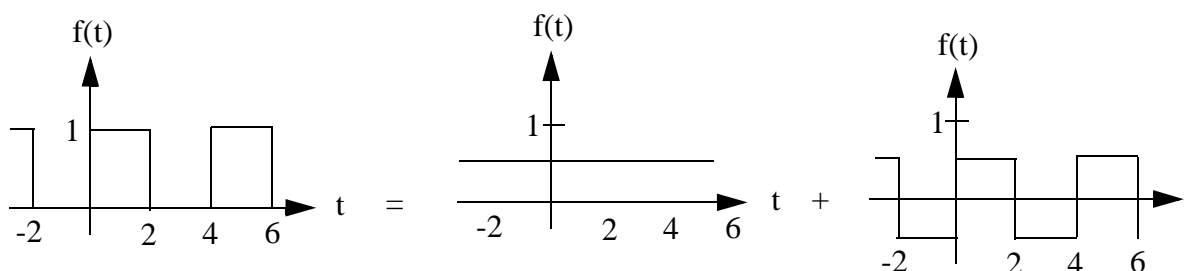


En jamn funksjon er symmetrisk om y-aksen (for eksempel $g(x) = \cos x$):



Under arbeid med Fourier-rekker vil vi oppdage at enhver odde funksjon er sammensatt av bare sinus-funksjoner, mens enhver jamn funksjon er sammensatt av bare cosinus-funksjoner.

I eksempel 5.1 fant vi en Fourier-rekke helt uten cosinus-ledd ($a_n = 0$). Dette kom av at funksjonen i dette tilfellet bare var sammensatt av en konstant og en odde funksjon (se figur):

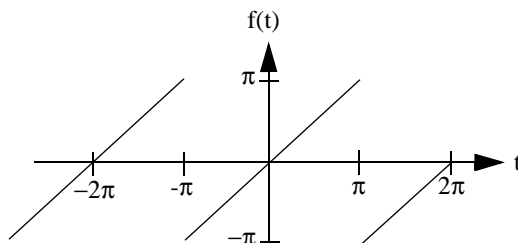


I eksempel 5.2 fant vi derimot $b_n = 0$ (altså ingen sinus-ledd), og dette kom selvfølgelig av at funksjonen i dette eksemplet var sammensatt av en konstant og en jamn funksjon.

Konklusjonen på dette må bli: Dersom vi ser at vi har en odde funksjon kan vi uten videre sette $a_n = 0$. Har vi derimot en jamn funksjon kan vi sette $b_n = 0$. På denne måten kan vi redusere regnearbeidet med Fourier-koeffisientene til omlag halvparten.

Eksempel 5.3:

Finn Fourier-rekka til følgende periodiske tidsfunksjon:



Løsning: En periode av funksjonen kan skrives $f(t) = t \quad -\pi < t \leq \pi$, slik at $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$.

Vi ser også at middelverdien $a_0 = 0$ og at alle $a_n = 0$ (odde funksjon).

$$\text{Vi velger } t_0 = -\pi \text{ og får: } b_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin(nt) dt$$

Her må vi benytte delvis integrasjon: $g = t \Rightarrow D(g) = 1$ og

$$D(h) = \sin(nt) \Rightarrow h = -\frac{1}{n} \cos(nt)$$

$$\text{Da blir } \int t \cdot \sin(nt) dt = t \cdot \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \right] - \int 1 \cdot \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \right] dt =$$

$$-\frac{t}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n} \int \cos(nt) dt = -\frac{t}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n^2} \sin(nt) + C$$

$$\text{Dette gir } b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n^2} \sin(nt) \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(n\pi) \right] - \left[\frac{\pi}{n} \cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(-n\pi) \right] \right\} =$$

$$\frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) \right\} = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = -\frac{2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$$

Fourier-rekka blir da slik:

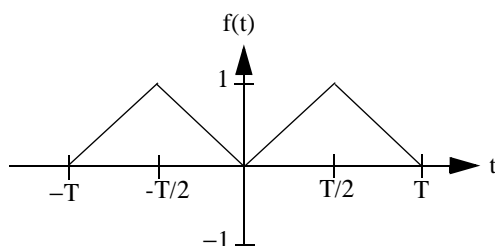
$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nt) = 2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \dots \right)$$

Symmetri

I tillegg til det vi nå har lært om odde og jamne funksjoner, kan vi også spare oss noe arbeid ved å utnytte funksjonenes symmetri. Dersom vi skal integrere en funksjon som er symmetrisk om y-aksen (altså en jamn funksjon), kan vi utnytte symmetrien for å få mindre regning.

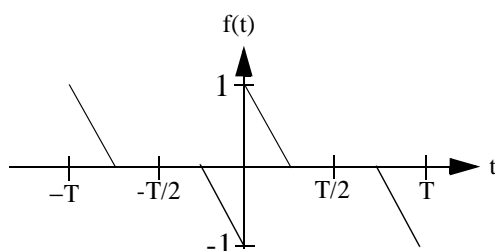
Vi kjenner forhåpentligvis til at $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt$? Nå skal vi se at dette relativt enkle

trikset kan spare oss for en del jobb når vi skal utlede Fourier-rekker. Se bare her:



Her blir $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$ fordi at produktet

$f(t) \cdot \cos(n\omega t)$ må være en jamn funksjon når begge faktorene er jamne funksjoner.



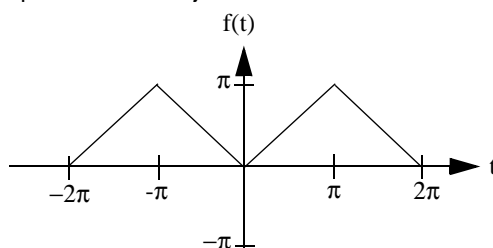
Her kan vi også bruke symmetri selv om funksjonen er odde:

$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$

Grunnen til dette er at produktet $f(t) \cdot \sin(n\omega t)$ er en jamn funksjon fordi begge faktorene er odde funksjoner! Produktet av to odde funksjoner gir altså en jamn funksjon!

Eksempel 5.4:

Finn Fourier-rekka til følgende periodiske funksjon:



Løsning: Vi ser at periodetida er $T = 2\pi$, slik at $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Videre er middelveiden

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ mens } b_n = 0 \text{ fordi vi har en jamn funksjon.}$$

$$\text{Vi velger } t_0 = -\pi \text{ og får } a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt$$

Men her er begge faktorene i integralet jamne funksjoner slik at produktet også må bli en jamn funksjon. Vi kan da gjøre slik:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \cos(nt) dt$$

$$\text{Delvis integrasjon: } g = t \Rightarrow D(g) = 1 \text{ og } D(h) = \cos(nt) \Rightarrow h = \frac{1}{n} \sin(nt)$$

Dette gir:

$$\int t \cdot \cos(nt) dt = t \cdot \frac{1}{n} \sin(nt) - \int 1 \cdot \frac{1}{n} \sin(nt) dt = \frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) + C$$

$$\text{Da blir } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right] \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{n} \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cos(n\pi) \right] - \left[0 + \frac{1}{n^2} \right] \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}$$

Her skiller vi mellom partall og oddetall. Partall gir $a_n = 0$ mens oddetall gir $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$.

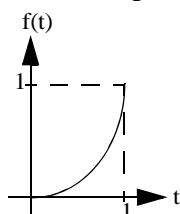
Vi kan da sette opp Fourier-rekka til funksjonen:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t + \dots \right)$$

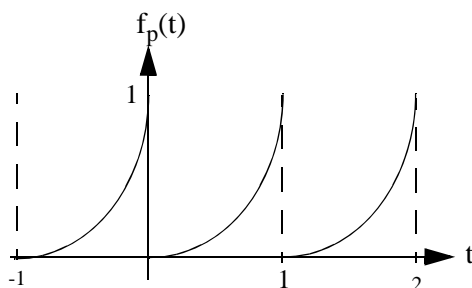
Hel- og halv-periodiske utvidelser

Dersom vi har en ikke-periodisk funksjon som er definert over et begrenset område, kan vi likevel finne en Fourier-rekke for funksjonen. Vi må da bestemme oss for om vi vil foreta en hel- eller halv-periodisk utvidelse og deretter beregne Fourier-koeffisientene på vanlig måte.

Hva legger vi så i disse nye begrepene? Vi kan se på funksjonen $f(t) = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1$:

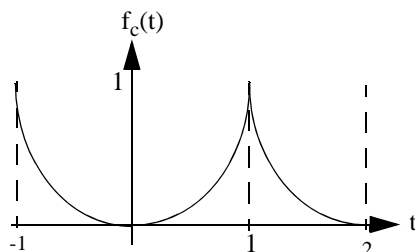


Med hel-periodisk utvidelse mener vi at funksjonens definisjonsmengde (her $[0, 1]$) blir en hel periode i den nye periodiske funksjonen $f_p(t)$. Periodeida for $f_p(t)$ blir altså her $T = 1$:



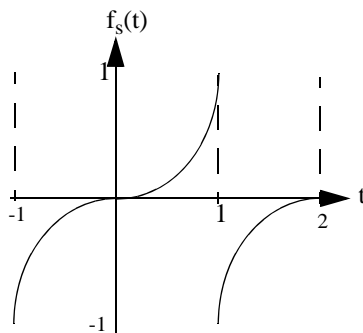
Med halv-periodisk utvidelse mener vi at funksjonens definisjonsmengde (fortsatt $[0, 1]$) blir en halv periode i den nye utvidete funksjonen. Her blir altså periodeida for den nye funksjonen $T = 2$. Det er to måter å foreta en halvperiodisk utvidelse på:

i) Vi kan foreta en jamn halvperiodisk utvidelse slik at den nye funksjonen $f_c(t)$ blir en jamn periodisk funksjon:



Når vi foretar en jamn halvperiodisk utvidelse blir alltid alle $b_n = 0$. Når vi beregner Fourier-rekka til $f_c(t)$ sier vi at vi finner cosinus-rekka til den opprinnelige funksjonen $f(t)$.

ii) Vi kan foreta en odde halvperiodisk utvidelse slik at den nye funksjonen $f_s(t)$ blir en odde periodisk funksjon:

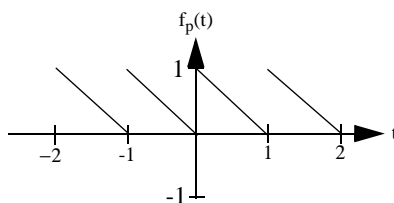


Når vi foretar en odde halvperiodisk utvidelse blir både $a_0 = 0$ og alle $a_n = 0$. Når vi beregner Fourier-rekka til $f_s(t)$ sier vi at vi finner sinus-rekka til den opprinnelige funksjonen $f(t)$.

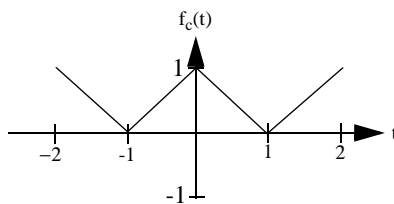
Eksempel 5.5:

Skissér funksjonene $f_p(t)$, $f_c(t)$ og $f_s(t)$ når $f(t) = 1 - t$ $0 < t \leq 1$

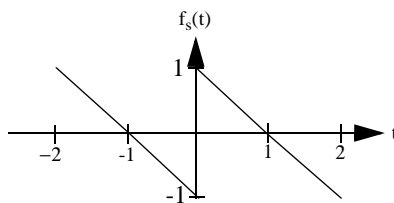
Løsning: En helperiodisk utvidelse gir $f_p(t)$:



En jamn halvperiodisk utvidelse gir $f_c(t)$:

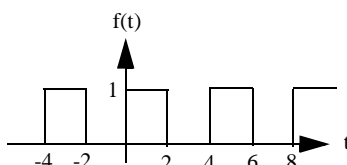


Og en odde halvperiodisk utvidelse gir $f_s(t)$:



Summen av Fourier-rekker

Summen av en Fourier-rekke skal selvfølgelig være lik funksjonsverdien til den opprinnelige funksjonen i ethvert punkt. Det eneste unntaket fra denne regelen er punkter der funksjonen ikke er kontinuert. I slike punkter er summen av rekka alltid lik middelverdien av funksjonsverdiene på hver side av punktet. Vi kan ta funksjonen i eksempel 5.1 som eksempel:



I følge det som er nevnt ovenfor vil summen av Fourier-rekka for $t = 2$ bli middelverdien av de to funksjonsverdiene 1 og 0 (som er funksjonsverdiene på hver side av $t = 2$).

Eksempel 5.6:

Bruk resultatene fra tidligere eksempler til å finne summen av rekkene:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \quad (\text{bruk eksempel 5.4})$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (\text{bruk eksempel 5.3})$$

Løsning: a) I eksempel 5.4 fant vi $f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t + \dots \right)$

Vi setter $t = 0$ og får

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

b) I eksempel 5.3 fant vi

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nt) = 2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \dots \right).$$

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ gir nå: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) - \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 1 - \dots \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Vi får da at } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Komplekse Fourier-rekker

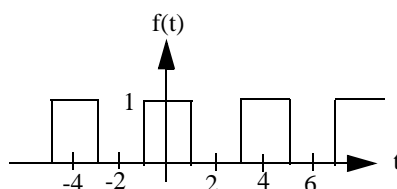
I forbindelse med signalbehandling benyttes ofte komplekse Fourier-rekker i stedet for de vanlige trigonometriske som vi har lært om til nå. Fordelene er flere, blant annet reduseres antall Fourier-koeffisienter fra tre til én! I stedet for a_0 , a_n og b_n får vi nå bare c_k (heltallsvariabelen n er erstattet av k). c_k er vanligvis en kompleks størrelse. Formlene ser slik ut:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t}, \text{ der } c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$$

Eksempel 5.7:

Finn koeffisienten c_k og sett opp den komplekse Fourier-rekka for funksjonen $f(t)$ fra eksempel 5.2.

Løsning:



Her er $T = 4$ som gir $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Videre kan vi velge $t_0 = -1$ som gir

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^3 f(t) \cdot e^{-j\frac{k\pi t}{2}} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-j\frac{k\pi t}{2}} dt =$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{2}{-jk\pi} e^{-j\frac{k\pi t}{2}} \right]_{-1}^1 = \frac{-1}{2jk\pi} \left[e^{-j\frac{k\pi}{2}} - e^{j\frac{k\pi}{2}} \right] = \frac{e^{j\frac{k\pi}{2}} - e^{-j\frac{k\pi}{2}}}{2jk\pi}$$

Vi husker kanskje at $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$?

Da er $\sin \frac{k\pi}{2} = \frac{e^{j\frac{k\pi}{2}} - e^{-j\frac{k\pi}{2}}}{2j}$ slik at $c_k = \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi}$. (I dette tilfellet ble altså c_k reell.)

$$\text{Da blir } f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi} \cdot e^{j\frac{k\pi t}{2}}$$

Det er ikke alltid like enkelt å se sammenhengen mellom Fourier-rekker på vanlig trigonometrisk form og Fourier-rekker på kompleks form. Vi skal nå forsøke å bevise at resultatene fra eksempel 5.2 og eksempel 5.7 er like, men dette er ikke noe vi bruker tid på til vanlig!

I eksempel 5.2 fant vi $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ og $b_n = 0$. Dette gir følgende Fourier-

$$\text{rekke: } f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} - \dots \right)$$

I eksempel 5.7 fant vi den komplekse Fourier-rekka $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi} \cdot e^{\frac{j k \pi t}{2}}$. Kan dette virkelig være samme rekke som den over? For å finne ut dette må vi kikke på de leddene som ligger rundt 0. For $k = 0$ får vi et veldig spesielt tilfelle på grunn av at vi da får $\frac{0}{0}$! Ved å

$$\text{benytte l'Hôpitals regel finner vi da at } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2}}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{2}$$

Så var det de andre leddene. Vi velger å starte med $k = -3$ og summere opp til og med

$$k = 3. \text{ Vi får da: } f(t) = \frac{\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)}{-3\pi} \cdot e^{\frac{-j3\pi t}{2}} + \frac{\sin(-\pi)}{-2\pi} \cdot e^{-j\pi t} + \frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}{-\pi} \cdot e^{\frac{-j\pi t}{2}} +$$

$$\frac{1}{2} \cdot e^0 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} \cdot e^{\frac{j\pi t}{2}} + \frac{\sin(\pi)}{2\pi} \cdot e^{j\pi t} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3\pi} \cdot e^{\frac{j3\pi t}{2}} =$$

$$\frac{1}{-3\pi} \left[\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) \right] + 0 - \frac{1}{-\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] +$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] + 0 - \frac{1}{3\pi} \left[\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + j \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) \right] =$$

$$\frac{1}{3\pi} \left[-2 \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right) \right] + \frac{1}{\pi} \left[2 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \dots \right)$$

Det ser ut som at dette kan stemme ja...

Oppgaver

27. Skissér følgende periodiske funksjoner (periodetida $T = 2\pi$) i et koordinatsystem, og bestem deretter alle Fourier-koeffisientene til funksjonen:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ t & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

28. a) Finn Fourier-rekka til funksjonen $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq \pi \end{cases}$ $f(t+2\pi) = f(t)$

b) Finn summen av den uendelige rekka $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

29. Utlede a) cosinus-rekka og b) sinus-rekka til funksjonen $f(t) = t$ $0 \leq t \leq 1$.

30. Finn den komplekse Fourier-rekka til denelperiodiske utvidelsen av funksjonen

$$x(t) = \frac{t}{T} \quad 0 < t \leq T, \text{ der } T \text{ er en konstant.}$$

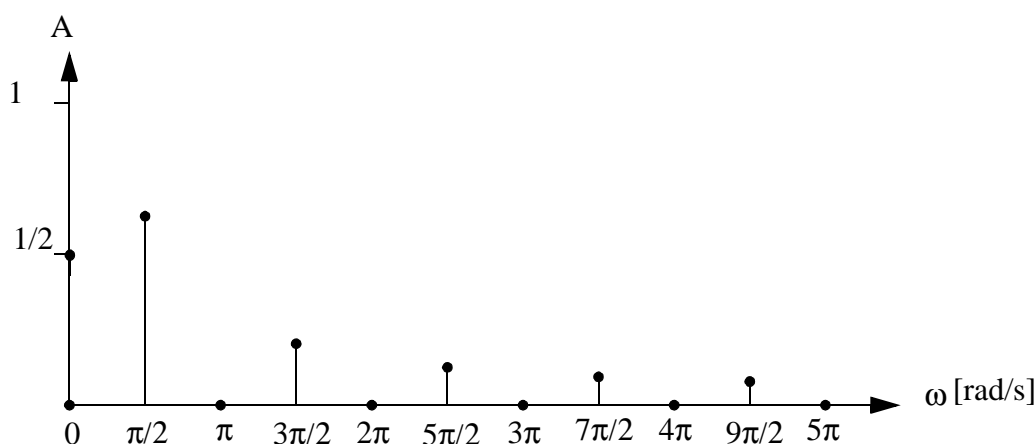
6 Fourier-transformen

Fourier-rekkeutviklingen viser oss i hvor stor grad de ulike frekvensene er representert i et periodisk signal. Vi så for eksempel at den periodiske funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \in [-2,0] \\ 1 & \text{for } t \in [0,2] \end{cases} \quad f(t+4) = f(t)$$

ga oss Fourier-rekken $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{2} + \dots \right)$

Dersom vi lar A være amplituden til hver enkelt sinus, kan vi framstille dette grafisk slik:



Her ser vi tydelig at det er frekvensen $\omega = \frac{\pi}{2}$ som gir det største bidraget til signalet, $\omega = 0$ gir det nest største, osv. Alle frekvensene som teoretisk sett kan være representert kan alltid skrives som $\omega = n \cdot \frac{2\pi}{T}$, der T er periodetida til signalet (i dette tilfellet 4).

Vi skjønner av dette at dersom T blir mindre (kort periode), blir det lengre avstand mellom de frekvensene som er representert. Har vi lang periodetid, blir det kortere avstand mellom dem. Ytterpunktet her er $T \rightarrow \infty$ (ikke-periodisk signal). I dette tilfellet kan alle mulige frekvenser være representert.

En annen ting er at de formlene vi har brukt i forbindelse med Fourier-rekkene ikke kan brukes når $T \rightarrow \infty$. Vi er derfor nødt til å modifisere disse en del. Resultatet av dette kalles Fourier-transformen.

Ettersom alle mulige frekvenser kan være representert, blir Fourier-transformen en funksjon og ikke en rekke. Fourier-transformen er faktisk et vel så viktig redskap som Fourier-rekkene fordi den kan brukes på alle mulige slags signaler (ikke bare periodiske).

Definisjon

Fourier-transformen er definert slik:

$$F\{s(t)\} = S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.1)$$

og den inverse Fourier-transformen slik:

$$F^{-1}\{S(j\omega)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Vi skal i dette faget fokusere bare på Fourier-transformen.

Den inverse Fourier-transformen får vente til dere får bruk for den i andre fag.

Eksempel 6.1:

Finn om mulig Fourier-transformen til funksjonen $s(t) = 1$.

Løsning: Bruker definisjonen (likning 6.1) og får:

$$\begin{aligned} F\{1\} = S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{j}{\omega} \cdot \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-j\omega t} - e^{j\omega t} \right] \\ &= \frac{j}{\omega} \cdot \left[\lim_{t \rightarrow \infty} (\cos \omega t - j \sin \omega t) - (\cos \omega t + j \sin \omega t) \right] \\ &= \frac{j}{\omega} \cdot \left[\lim_{t \rightarrow \infty} -2j \sin \omega t \right] = \frac{2}{\omega} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \sin \omega t \end{aligned}$$

Siden denne grenseverdien ikke eksisterer, må vi foreløpig konkludere med at funksjonen $s(t) = 1$ ikke kan Fourier-transformeres.

Eksempel 6.2:

Finn Fourier-transformen til funksjonen $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [0,1] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Løsning: Bruker likning 6.1 igjen og får:

$$\begin{aligned} F\{g(t)\} &= G(j\omega) = \int_0^1 e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_0^1 = \frac{j}{\omega} [e^{-j\omega} - 1] \\ &= \frac{j}{\omega} [\cos \omega - j \sin \omega - 1] = \frac{1}{\omega} [\sin \omega + j(\cos \omega - 1)] \end{aligned}$$

Eksempel 6.3:

Finn Fourier-transformen til funksjonen $h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$

Løsning: Vi husker at $u(t)$ er en trinnfunksjon med verdi 0 for $t < 0$ og 1 for $t \geq 0$.

Definisjonen gir da:

$$\begin{aligned} F\{h(t)\} &= H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-(1+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{1+j\omega} \cdot [0 - e^0] = \frac{1}{1+j\omega} \end{aligned}$$

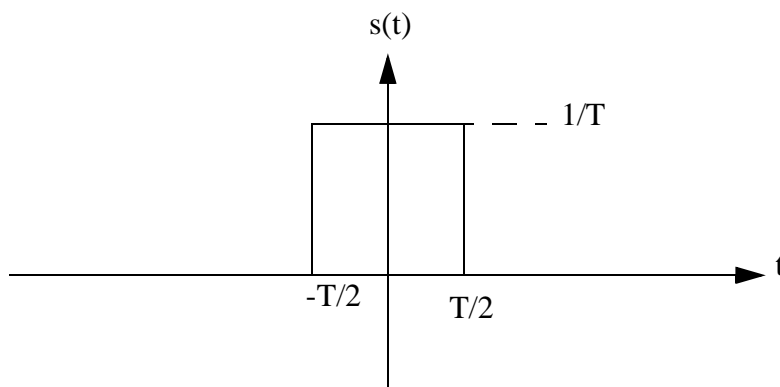
Dersom vi sammenligner definisjonene av Laplace- og Fourier-transformen (likning 6.1) ser vi at de i prinsippet er helt like med unntak av at s er erstattet med $j\omega$ og at nedre integrasjons-grense er forskjellig. I eksempel 6.3 blir Laplace-transformen $H(s) = \frac{1}{s+1}$ og Fourier-

transformen $H(f) = \frac{1}{1+j\omega}$, altså i praksis samme resultat. Vi skal imidlertid være forsiktige med å dra for mange likhetstrekk mellom de to transformene. Forskjellen i integrasjons-grensene i tillegg til at $j\omega$ er en kompleks størrelse fører til mange forskjeller som vi skal se senere.

Rect-funksjonen

Funksjonen $rect(t)$ er en firkantpuls sentrert om $t=0$ med både amplitude og lengde lik 1.

Dersom amplituden er A og lengden er T , skrives funksjonen som $A \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right)$



Funksjonen på figuren over er med andre ord $s(t) = \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right)$

Eksempel 6.4:

Finn Fourier-transformen til funksjonen ovenfor.

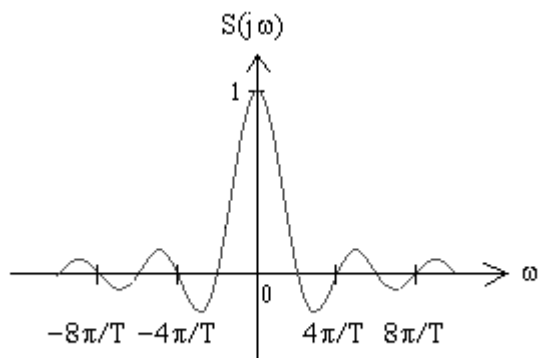
Løsning: Fourier-transformen må bli:

$$\begin{aligned} F\{s(t)\} = S(j\omega) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega T} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{j}{\omega T} \cdot \left[e^{-j\frac{\omega T}{2}} - e^{j\frac{\omega T}{2}} \right] = \frac{j}{\omega T} \cdot \left[\cos \frac{\omega T}{2} - j \sin \frac{\omega T}{2} - \cos \frac{\omega T}{2} - j \sin \frac{\omega T}{2} \right] \\ &= \frac{j}{\omega T} \cdot \left[-2j \sin \frac{\omega T}{2} \right] = \frac{2}{\omega T} \cdot \sin \frac{\omega T}{2} \end{aligned}$$

Vi ser at Fourier-transformen denne gangen ble en reell funksjon i og med at imaginærdelene forsvant helt.

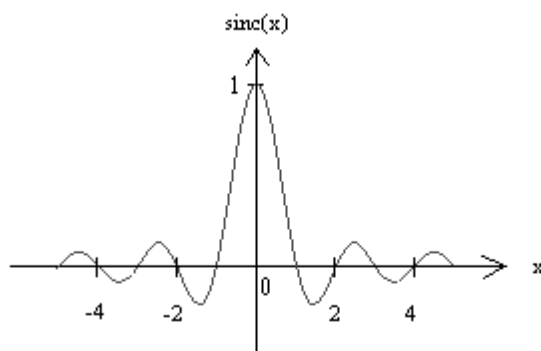
Sinc-funksjonen

Ettersom Fourier-transformen i eksempel 6.4 ble reell, kan vi skissere den i et koordinatsystem. Vi får da denne kurven:



Denne typen funksjoner er svært viktige ettersom de er Fourier-transformen til helt vanlige firkantpulser (rect-funksjoner). Derfor er det definert en egen matematisk funksjon, sinc-funksjonen, for dette formålet:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



Sinc-funksjonen har blant annet den egenskapen at den er null når x er et heltall. Eneste unntak fra denne regelen er $x = 0$ som gir $\text{sinc}(0) = 1$.

Det skulle nå være mulig for oss å skrive Fourier-transformen fra eksempel 6.4 som en sinc-funksjon:

$$\frac{2}{\omega T} \cdot \sin \frac{\omega T}{2} = \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

Dirac's deltapuls

Vi skal fortsatt dvele litt ved eksempel 6.4. Dersom vi lar $T \rightarrow 0$ får vi en puls som er uendelig høy og uendelig smal. Denne pulsen kalles Dirac's delta-puls og skrives $\delta(t)$. Legg merke

til at forholdet mellom amplitude og lengde er slik at $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

Eksempel 6.5:

Finn Fourier-transformen til $\delta(t)$.

Løsning: I eksempel 6.4 fant vi at Fourier-transformen til en rect-funksjon med lengde T og amplitude 1/T

$$\text{var } S(j\omega) = \frac{2}{\omega T} \cdot \sin \frac{\omega T}{2} = \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right)$$

Dirac's delta-puls er nettopp en sånn rect-funksjon der $T \rightarrow 0$.

$$\text{Derfor kan vi sette } F\{\delta(t)\} = \lim_{T \rightarrow 0} \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) = \mathbf{1}$$

Denne egenskapen gjør deltapulsen svært viktig i arbeidet med Fourier-transformen.

Eksempel 6.6:

Finn Fourier-transformen til funksjonen $g(t) = 5 \cdot \text{rect} \left(\frac{t}{6} \right)$

Løsning:

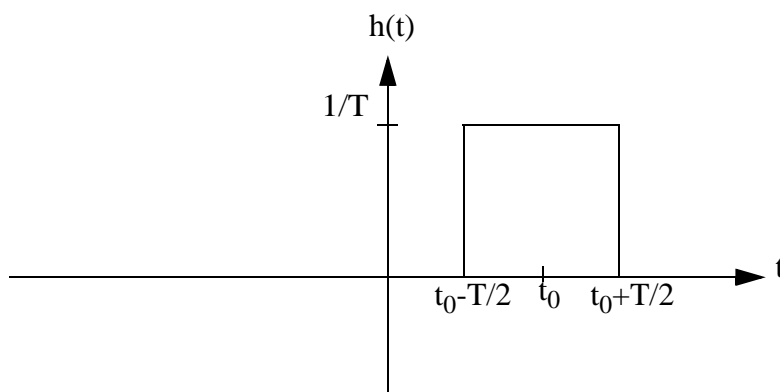
$$\begin{aligned} F\{g(t)\} &= G(j\omega) = \int_{-3}^3 5 \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{5}{j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-3}^3 \\ &= \frac{5j}{\omega} \cdot [e^{-j3\omega} - e^{j3\omega}] = \frac{5j}{\omega} \cdot [\cos 3\omega - j \sin 3\omega - \cos 3\omega - j \sin 3\omega] \\ &= \frac{5j}{\omega} \cdot [-2j \sin 3\omega] = \frac{10 \sin 3\omega}{\omega} = \frac{30 \sin 3\omega}{3\omega} = \mathbf{30 \text{sinc} \left(\frac{3\omega}{\pi} \right)} \end{aligned}$$

Vi ser at når vi Fourier-transformerer en rect-funksjon som er sentrert om $t=0$, vil vi alltid få en sinc-funksjon til svar. Tallet 30 angir nå arealet under rect-funksjonen, mens tallet 3 angir halve lengden.

Eksempel 6.7:

Finn Fourier-transformen til en deltapuls som er tidsforsinket med tiden t_0 .

Løsning: For å greie å sette opp Fourier-transformen riktig, tegner vi først opp delta-pulsen som vi vet har lengde T og amplitude $1/T$:



Denne funksjonen kan skrives $h(t) = \frac{1}{T} \cdot \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$

Fourier-transformen blir nå:

$$\begin{aligned} F\{h(t)\} &= H(j\omega) = \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} \frac{1}{T} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega T} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} \\ &= \frac{j}{\omega T} \left[e^{-j\omega\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)} - e^{-j\omega\left(t_0 - \frac{T}{2}\right)} \right] = \frac{j e^{-j\omega t_0}}{\omega T} \left[e^{-j\frac{\omega T}{2}} - e^{j\frac{\omega T}{2}} \right] \\ &= \frac{j e^{-j\omega t_0}}{\omega T} \left[-2j \sin \frac{\omega T}{2} \right] = \frac{2 e^{-j\omega t_0} \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} = e^{-j\omega t_0} \cdot \text{sinc} \frac{\omega T}{2\pi} \end{aligned}$$

Dette er altså Fourier-transformen til en rect-funksjon med amplitude $1/T$ og lengde T som er tidsforsinket med tiden t_0 . Dersom vi nå lar $T \rightarrow 0$, får vi Fourier-transformen til en deltapuls som er tidsforsinket med t_0 :

$$F\{h(t)\} = H(j\omega) = \lim_{T \rightarrow 0} e^{-j\omega t_0} \cdot \text{sinc} \frac{\omega T}{2\pi} = e^{-j\omega t_0}$$

Vi kan nå sette opp en tabell over de viktigste Fourier-transformene:

	$s(t)$	$F\{s(t)\}$
Dirac's deltapuls	$\delta(t)$	1
Tidsforsinket Dirac's deltapuls	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
Rect-funksjon	$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \text{sinc} \frac{\omega T}{2\pi}$
Tidsforsinket rect-funksjon	$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$	$AT e^{-j\omega t_0} \cdot \text{sinc} \frac{\omega T}{2\pi}$
Konstant funksjon	1	$\delta(\omega)$
Cosinus	$\cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
Sinus	$\sin \omega_0 t$	$\frac{1}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
Ekspontialfunksjon for $t > 0$	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
Ekspontialfunksjon for $t < 0$	$e^{at} \cdot [1 - u(t)]$	$\frac{1}{a - j\omega}$
Symmetrisk eksponentialfunksjon	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Her ser vi at Fourier-transformen til en konstant funksjon også er tatt med. Det var denne vi mislyktes med å beregne i eksempel 6.1. Egentlig er denne enklest å finne ved å benytte invers Fourier-transform av delta-funksjonen $\delta(\omega)$ og vise at dette blir 1. Regningen blir da tilsvarende som da vi fant Fourier-transformen til $\delta(t)$ i eksempel 6.4 og 6.5.

Videre ser vi at Fourier-transformene til $\cos \omega_0 t$ og $\sin \omega_0 t$ er tatt med. Hvordan disse er beregnet, kommer vi tilbake til i neste kapittel. Resultatene er imidlertid verdt å merke seg: To deltapulser (en for vinkelhastigheten ω_0 og en for $-\omega_0$), og ellers ingenting. Dette er på grunn av at de to funksjonene består av bare én vinkelhastighet, nemlig ω_0 ($-\omega_0$ kommer med på grunn av de to funksjonenes symmetriegenskaper). Her begynner vi å se klare forskjeller mellom Laplace- og Fourier-transform. Mens $L\{\cos \omega_0 t\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$ er

$$F\{\cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \text{ Forstå det den som kan!}$$

Forskyvning langs tidsaksen

Vi lærte at forskyvning langs tidsaksen (tidsforsinkelse) spilte en stor rolle i arbeidet med Laplace-transformen. Laplace-transformen til en funksjon tidsforsinket med a var Laplace-transformen til den ikke tidsforsinkete funksjonen multiplisert med faktoren e^{-as} .

Vi skal nå se at det samme gjelder for Fourier-transformen. I tabellen på side 82 forekommer to tidsforsinkete funksjoner. Fourier-transformen til disse to er Fourier-transformen til den ikke tidsforsinkete funksjonen multiplisert med faktoren $e^{-j\omega t_0}$. Dette kan vi formulere som en generell regel:

Vi vet at $F\{s(t)\} = S(j\omega)$. Da er Fourier-transformen til den tidsforsinkete funksjonen:

$$\boxed{F\{s(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \cdot S(j\omega)} \quad (6.2)$$

Eksempel 6.8:

Bruk likning 6.2 til å finne Fourier-transformen til funksjonen $r(t) = e^{-(t-1)} \cdot u(t-1)$

Løsning: Vi ser at $r(t)$ er en tidsforsinket utgave av funksjonen $s(t) = e^{-t} \cdot u(t)$. Tidsforsinkelsen er $t_0 = 1$.

$$\text{Siden } F\{s(t)\} = S(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}, \text{ blir } F\{r(t)\} = R(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{1+j\omega}$$

Eksempel 6.9:

Finn Fourier-transformen til funksjonen $r(t) = e^{-(t-1)} \cdot u(t-2)$

Løsning: Her er det ikke samsvar mellom de to "tidsforsinkelsene".

Men det ordner vi lett ved å skrive $r(t) = e^{-1} \cdot e^{-(t-2)} \cdot u(t-2)$

$$\text{Fourier-transformen skulle da bli: } F\{r(t)\} = R(j\omega) = e^{-1} \cdot \frac{e^{-j\omega \cdot 2}}{1+j\omega} = \frac{e^{-(1+j2\omega)}}{1+j\omega}$$

Eksempel 6.10:

Vi vet at $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Vis ved hjelp av likning 6.2 at $F\{\sin \omega_0 t\} = F\left\{\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

Løsning: Fra tabellen på s. 82 har vi at $F\{\sin \omega_0 t\} = \frac{1}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

På høyresiden kan vi skrive $\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right]$

Vi har altså en cosinus-funksjon som er tidsforsinket med $\frac{\pi}{2\omega_0}$.

Fourier-transformen blir da:

$$\begin{aligned} F\left\{\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right]\right\} &= e^{-j\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega_0}} \cdot \frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi\omega}{2\omega_0}} \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi\omega}{2\omega_0}} \cdot \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

For å komme oss videre må vi innse at det første leddet er null for alle andre ω enn ω_0 , og at det andre leddet er null for alle andre ω enn $-\omega_0$. Vi får da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(\omega + \omega_0) &= -\frac{j}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \frac{j}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) \\ &= \frac{1}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \text{ som var akkurat det vi skulle vise.} \end{aligned}$$

Forskyvning langs frekvensaksen

Forskyvning langs frekvensaksen er en spesielt anvendelig egenskap til Fourier-transformen. Frekvensforskyvning oppstår når vi multipliserer en tidsfunksjon med en kompleks eksponentialfunksjon. Vi vet at $F\{s(t)\} = S(j\omega)$. Da er:

$$F\{e^{j\omega_c t} \cdot s(t)\} = S(\omega - \omega_c) \quad (6.3)$$

Eksempel 6.11:

Bruk likning 6.3 til å finne Fourier-transformen til funksjonen $g(t) = e^{j6t} \cdot e^{-2|t|}$

Løsning: Fra tabellen har vi at $F\{e^{-2|t|}\} = \frac{4}{4 + \omega^2}$

Nå kan vi bruke likning 6.3 med $\omega_c = 6$:

$$F\{g(t)\} = G(j\omega) = \frac{4}{4 + (\omega - 6)^2} = \frac{4}{4 + \omega^2 - 12\omega + 36} = \frac{4}{\omega^2 - 12\omega + 40}$$

Nå er det kanskje enkelte som finner det lite meningsfylt å sitte og regne ut Fourier-transformen til komplekse funksjoner av tiden. Til trøst for dere skal vi nå vende tilbake til reelle funksjoner igjen, men vi skal stadig benytte oss av likning 6.3.

Det er nå på tide å minne om Eulers formler:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Eksempel 6.12:

Vis at Fourier-transformen til funksjonen $\cos \omega_0 t$ er $\frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ (jfr. tabell)

Løsning: Vi er nå i stand til å vise dette ved hjelp av frekvensforskyvning.

$\cos \omega_0 t$ er produktet av de to funksjonene $\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$ og en konstant funksjon 1 som har Fourier-transform lik $\delta(\omega)$. Ettersom ω_c her er hhv. ω_0 og $-\omega_0$, blir:

$$F\{\cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Eksempel 6.13:

Finn Fourier-transformen til funksjonen $h(t) = \sin 20t \cdot \text{rect}(t)$

Løsning: $h(t)$ er produktet av de to funksjonene $\sin 20t = \frac{e^{j20t} - e^{-j20t}}{2j}$ og en rect-funksjon som har

Fourier-transform lik $\text{sinc} \frac{\omega}{2\pi}$.

Ettersom ω_c her er hhv. 20 og -20 , blir:

$$F\{h(t)\} = H(j\omega) = \frac{1}{2j} \left[\text{sinc} \left(\frac{\omega - 20}{2\pi} \right) - \text{sinc} \left(\frac{\omega + 20}{2\pi} \right) \right]$$

Eksempel 6.14:

Finn Fourier-transformen til funksjonen $s(t) = \sin t \cdot \cos t$

Løsning: $r(t)$ er produktet av de to funksjonene $\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$ (dvs. $\omega_c = 1$ og $\omega_c = -1$) og

en sin-funksjon som har Fourier-transform lik $\frac{1}{2j}[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$.

$$F\{s(t)\} = S(j\omega) = \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{2}[\delta(\omega - 1 - 1) - \delta(\omega)] + \frac{1}{2}[\delta(\omega) - \delta(\omega + 1 + 1)] \right\}$$

$$= \frac{1}{4j}[\delta(\omega - 2) - \delta(\omega + 2)]$$

(Dette kunne vi funnet langt enklere ved hjelp av omskrivingen $\sin t \cdot \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$)

Amplitude og fasevinkel

Fourier-transformen til en tidsfunksjon kan som vi har sett være kompleks. Den kan derfor ikke skissères i et koordinatsystem som reelle funksjoner. Men siden et komplekst tall har både tallverdi og fasevinkel, kan vi skissere tallverdien (amplituden) i et koordinatsystem og fasevinkelen i et annet.

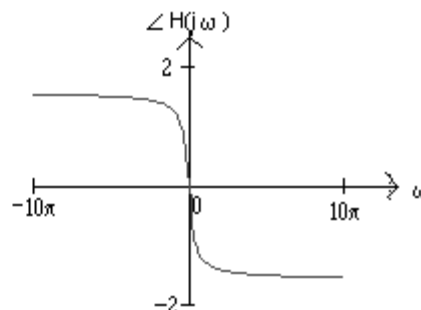
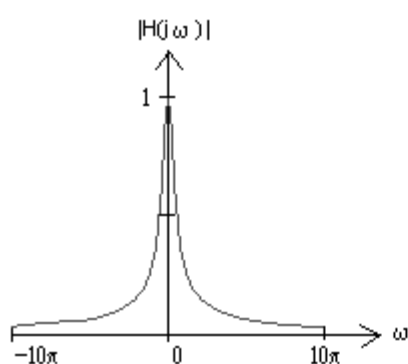
Eksempel 6.15:

Skissér amplitude og fasevinkel til Fourier-transformen vi fant i eksempel 6.3.

Løsning: Fourier-transformen i eksempel 6.3 ble $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$

$$\text{Amplituden blir: } |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

$$\text{og fasevinkelen blir: } \angle H(j\omega) = -\arctan \omega$$



Noen vil kanskje finne det merkelig at negative frekvenser ($\omega < 0$) er tatt med i disse kurvene. Negative frekvenser kan jo ikke opptre rent fysisk.

Grunnen til at de likevel skal være med, er at det kan bli bruk for dem i matematiske beregninger i forbindelse med frekvensforskyvning. Dette vil dere komme tilbake til i andre fag. Her skal vi bare venne oss til å ta med også den negative delen av frekvensaksen når vi skissører kurver.

Eksempel 6.16:

Sett $T=1$ og skissør amplitude og fasevinkel til Fourier-transformen vi fant i eksempel 6.4.

Løsning: Fourier-transformen i eksempel 6.4 ble $S(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

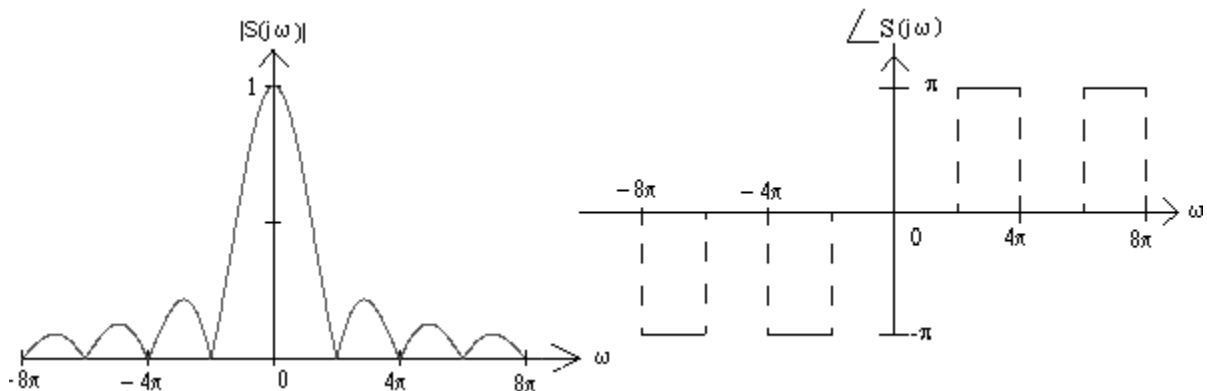
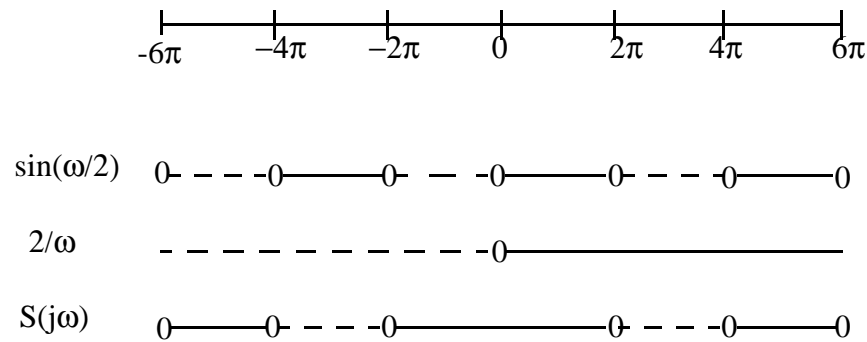
Vi setter $T=1$ og får: $S(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

Amplituden blir: $|S(j\omega)| = \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \right|$

Ettersom $S(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{2}{\omega} \text{sin}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ er en reell funksjon, kan fasevinkelen ha

bare to (tre) verdier: $\begin{cases} 0 \text{ for } S(j\omega) \geq 0 \\ \pm\pi \text{ for } S(j\omega) < 0 \end{cases}$

Fortegnsskjema for $S(j\omega)$:



Det er likegyldig om man velger π eller $-\pi$ som fasevinkel for negativ $S(j\omega)$. Grunnen til at det ble valgt slik her, er at det skal bli enklere å se sammenhengen med neste eksempel.

Vi har i de to foregående eksemplene sett hvordan vi skissører amplitude og fasevinkel for noen vanlige Fourier-transformer. I eksemplet nedenfor skal vi ta for oss en Fourier-transform som inneholder tidsforsinkelsesfaktoren $e^{-j\omega t_0}$.

Amplituden til denne faktoren blir:

$$|e^{-j\omega t_0}| = |\cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0| = \sqrt{(\cos \omega t_0)^2 + (\sin \omega t_0)^2} = 1$$

Tidsforsinkelsen har altså ingen innvirkning på Fourier-transformens amplitude.

Fasevinkelen blir:

$$\arctan\left(\frac{-\sin \omega t_0}{\cos \omega t_0}\right) = -\arctan(\tan \omega t_0) = -\omega t_0$$

Tidsforsinkelsen gir altså et lineært negativt bidrag til Fourier-transformens fasevinkel.

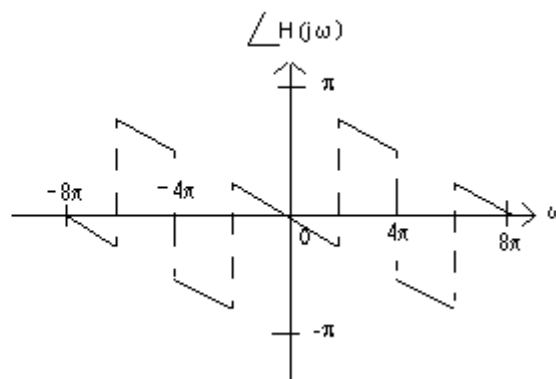
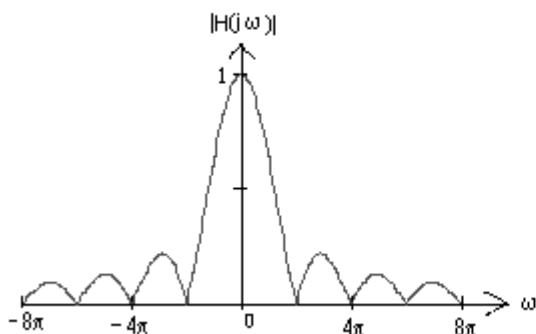
Eksempel 6.17:

Sett $t_0=1/8$ og $T=1$ og skissér amplitude og fasevinkel til Fourier-transformen vi fant for den tidsforsinkete rect-funksjonen vi regnet på i eksempel 6.7.

Løsning: Fourier-transformen til rect-funksjonen i eksempel 6.7 ble $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

Vi setter $t_0=1/8$ og $T=1$ og får: $H(j\omega) = e^{-j\frac{\omega}{8}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

Dette er nøyaktig samme Fourier-transform som i eksempel 6.16 med unntak av tidsforsinkelsen. Amplituden blir dermed uforandret, mens fasen får et bidrag på $-\frac{\omega}{8}$



Oppgaver

31. Bruk definisjonen (likning 6.1) til å finne Fourier-transformen til følgende ikke-periodiske funksjoner:

$$\text{a) } s(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{for } |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{b) } r(t) = e^t \cdot [1 - u(t)]$$

$$\text{c) } g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{for } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad \text{d) } h(t) = e^{-|t|}$$

32. Bruk tabellen på side 82 (evt. likning 6.1) til å finne Fourier-transformen til følgende funksjoner:

$$\text{a) } s(t) = 3\delta(t-2) \quad \text{b) } r(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

$$\text{c) } g(t) = \begin{cases} 3 & \text{for } t \in [4,6] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad \text{d) } h(t) = e^{-t} \cdot u(t-1)$$

33. Bruk forskyvning langs tids- og frekvens-aksen til å finne Fourier-transformen til følgende funksjoner:

$$\text{a) } p(t) = e^{-t} \cdot u(t-1) \quad \text{b) } g(t) = e^{-3|t-2|}$$

$$\text{c) } h(t) = \cos t \cdot \text{rect}(t) \quad \text{d) } y(t) = \sin 10t \cdot \sin t$$

34. Finn Fourier-transformen til følgende funksjon og skisser deretter Fourier-transformens amplitude og fasevinkel i et koordinatsystem: $s(t) = e^{t-1} \cdot [1 - u(t-1)]$

Fasit til oppgavene

Kapittel 1

1. a) i) 2π ii) $\frac{16\sqrt{2}\pi}{5}$
- b) i) $\frac{\pi^2}{4}$ ii) $2\pi(\sqrt{2} - 1)$
2. $\frac{\pi}{2}(e - 1)^2$
3. a) $\left(1, \frac{17}{5}\right)$ b) $\left(1 - \ln 2, \frac{3}{8}\right)$
4. a) $3\sqrt{10}$ b) $\frac{2e^2 - 1}{4}$
5. a) $\frac{\pi}{6}(27 - 5\sqrt{5})$ b) $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2} - 1)$

Kapittel 2

6. a) $a_n = 2n$

b) $b_n = 4n - 2$

c) $c_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$

d) $d_n = (-1)^{n-1} \cdot n^2$

7. a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

8. a) $\frac{24}{7}$

b) $\frac{1}{x}$

9. $\frac{3}{2}$

10. a) Divergerer

b) Konvergerer

c) Divergerer

d) Konvergerer

e) Konvergerer

f) Konvergerer

g) Konvergerer

11. a) $-2 < x < 2$

b) $0 \leq x < 1$

13. a) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1)x^n$

14. a) $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \quad -1 \leq x \leq 1$

b) $f(x) = e^{-2x} \quad x \in \mathbb{R}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \cdot n!}$

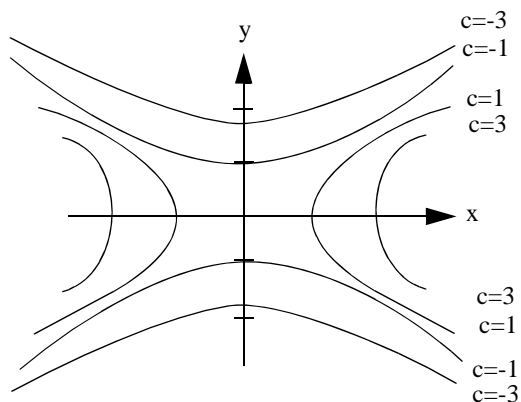
Kapittel 3

16. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 16xy + 2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 8x^2 - 5$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y \ln(xyz) + y + 5y^2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x \ln(xyz) + x + 10xy$ $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{z}$

17. $f_{xx} = \frac{-2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$ $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$ $f_{yy} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$

18.



19. a) $\frac{df}{dt} = 2t \cos(t^3) - 3t^4 \sin(t^3)$ b) $\frac{df}{dt} = (2t^2 + 1)e^{t^2}$

20. $\frac{dh}{dt} = 2\sqrt{\pi}$

21. a) (1, 2): Saltpunkt

b) $(1, \frac{1}{2})$: Min.punkt (0, 0): Saltpunkt (2, 0): Saltpunkt

22. b) $x = 1$ $y = 1$ $z = \frac{3}{2}$

23. $y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{6}$

Kapittel 4

24. a) $X(s) = \frac{2-s}{s(s+2)}$ b) $X(s) = \frac{3s-4}{s^2+4}$ c) $X(s) = \frac{3}{s^2+4s+13}$

d) $X(s) = \frac{s+3}{s^2+6s+13}$ e) $X(s) = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$ f) $X(s) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$

g) $X(s) = \frac{(s+2)e^{-(s+1)}}{(s+1)^2}$ h) $X(s) = \frac{e^{\frac{\pi s}{2}}}{s^2(s^2+1)}$

25. a) $x(t) = \frac{t^4}{8}$ b) $x(t) = \frac{3}{2}e^{\frac{t}{2}}$ c) $x(t) = 2\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$

d) $x(t) = \frac{e^t - \cos t + \sin t}{2}$ e) $x(t) = \frac{t^2 e^t}{2}$

f) $x(t) = (2\cos t + 3\sin t)e^t$ g) $x(t) = e^{-3(t-2)} \cdot u(t-2)$

h) $x(t) = [2e^{-2(t-1)} - e^{-(t-1)}] \cdot u(t-1)$

26. a) $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ b) $x(t) = 3\cos 2t \cdot e^{-t}$

c) $x(t) = 3 - 3\cos t + \sin t$ d) $x(t) = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}$

e) $x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t & 0 < t < 1 \\ \cos(t-1) - \cos t & t \geq 1 \end{cases}$

Kapittel 5

27. a) $a_0 = 0, a_n = \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ og $b_n = 0$

b) $a_0 = \frac{\pi}{4}, a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$ og $b_n = -\frac{(-1)^n}{n}$

28. a) $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right)$

b) $\frac{\pi}{4}$

29. a)

$$f_c(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left[\cos(\pi t) + \frac{1}{9} \cos(3\pi t) + \frac{1}{25} \cos(5\pi t) + \dots \right]$$

b) $f_s(t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi t)}{n} = \frac{2}{\pi} \left[\sin(\pi t) - \frac{1}{2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) - \dots \right]$

30. $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{j}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot e^{j\frac{2\pi kt}{T}}$

Kapittel 6

$$31. \quad a) \quad S(j\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega}{2} \qquad b) \quad R(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega}$$

$$c) \quad G(j\omega) = \frac{j}{\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega) \qquad d) \quad H(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$32. \quad a) \quad S(j\omega) = 3e^{-j2\omega} \qquad b) \quad R(j\omega) = \operatorname{sinc} \frac{\omega}{2}$$

$$c) \quad G(j\omega) = 6e^{-j5\omega} \cdot \operatorname{sinc} \frac{\omega}{\pi} \qquad d) \quad H(j\omega) = \frac{e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$$

$$33. \quad a) \quad P(j\omega) = \frac{e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$$

$$b) \quad G(j\omega) = \frac{6e^{-j2\omega}}{\omega^2 + 9}$$

$$c) \quad H(j\omega) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega-1}{2\pi} \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega+1}{2\pi} \right) \right]$$

$$d) \quad Y(j\omega) = -\frac{1}{4} [\delta(\omega-11) - \delta(\omega-9) - \delta(\omega+9) + \delta(\omega+11)]$$

$$34. \quad S(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{1-j\omega}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\angle S(j\omega) = \arctan \omega - \omega$$

Stikkordregister

A

absolutt konvergens 22
amplitude 87
andrederivert-testen 39
andreordens partiell-deriverte 32
areal av omdreiningsflater 11

B

betinget konvergens 22
binomialkoeffisienter 29
buelengde 9

C

cosinus hyperbolicus 12

D

delt funksjonsforskrift 51
differensiallikninger 58
Dirac's deltapuls 80
divergenstesten 17
divergere 16

E

enhetsfunksjonen 50
Eulers formler 85

F

fasevinkel 87
feilfunksjonen 43
forholdstesten 18
forskyvning langs frekvensaksen 85
forskyvning langs tidsaksen 83
Fourier, Jean-Baptiste Joseph 62
Fourier-koeffisientene 62
Fourier-rekker 62
Fourier-transformen 75
funksjoner av flere variable 31

G

geometriske rekker 15
gradient 37

H

halv-periodisk utvidelse 69
harmonisk rekke 20
hel-periodisk utvidelse 69

I

integraltesten 19
integrasjonsanvendelser 1
invers Laplace-transform 55

J

jamn funksjon 65

K

kjerneregelen 35
komplekse Fourier-rekker 72
konvergensområde 23
konvergere 16
kritiske punkter 38

L

Laplace, Pierre-Simon 46
Laplace-transformen 46

M

Maclaurin-rekka 26
minste kvadraters metode 42

N

nivåkurver 34

O

odde funksjon 65

P

Pappus 7
partiell-derivert 31
potensrekker 23

R

rect-funksjonen 78
rekker 15
retningsderivert 31

S

salpunkt 38
sammenlikningstesten 21
sinc-funksjonen 79
s-planet 46
summen av Fourier-rekker 71
symmetri 67

T

tallfølger 15

Taylor, Brook 26

Taylor-rekker 26

test for alternerende rekker 22

tidsforsinkelse 50

tidsforsinkelsesfaktor 89

tidsplanet 46

tyngdepunkt 7

V

volum av omdreiningslegemer 2