

MASTEROPPGAVE

Emnekode: B305E
Navn på Kandidat: Signe Kilskar

Aksjeutvelgelse ved bruk av Random Forest: - en maskinlæringstilnærming til meravkastning -

«Kan aktivavalg ved bruk av maskinlæringsteknikker slå avkastningen til OSEBX?»

Dato: 27.05.2019

Totalt antall sider: 61

Abstract

This study implements the machine learning method Random Forest (RF) for stock selection in the Norwegian stock market. The RF model is trained on a combination of technical and fundamental factors, as well as a pure momentum space, and the purpose has thus been to investigate whether the method is capable of generating excess return in the Norwegian market based on the constructed feature spaces. The stock selection strategy is implemented in the period 14.12.2010-30.04.2019, and stocks are selected for an equally weighted portfolio based on probability rankings from the RF model. At each rebalancing date, the 10 stocks with the highest probability of being in the top class based on excess return beyond OSEBX is selected and held throughout the holding period.

In total, three portfolios are constructed to examine how robust the strategy is for different holding periods. P_{RF} has a long holding period of one month, while P_{komb} and P_{mom} has a short-term holding period of one day. The portfolios are trained on a combined feature space consisting of technical and fundamental features, a combined feature space refined to fit a shorter holding period, and a pure momentum space, respectively. All three portfolios achieve high returns before transaction costs, with Sharpe ratios of 2.44, 5.13 and 5.55 respectively. The portfolio performance is thus very high, but in line with previous research using the same methods and feature spaces on different stock markets. For the portfolios with a one day holding period, the performance is heavily reduced once transaction costs are taken into account, and how profitable this strategy is will therefore depend on the level of transaction costs this sort of portfolio can get.

All portfolios show a decrease in performance over time, possibly because the potential for generating excess returns using machine learning is reduced as the popularity of machine learning methods increase. Regardless of this, the results must be said to pose a challenge to both the weak and semi-strong form of market efficiency. During the trading period of approximately 9.5 years, the model mainly select stocks that contribute positively to portfolio performance, thus leading to the conclusion that the study's results are reliable, and that the RF model is able to detect patterns that are of importance for excess returns, and should therefore be of interest to traders and portfolio managers.

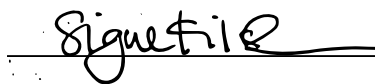
Forord

Denne masteroppgaven er skrevet som en avsluttende del av min siviløkonomutdanning ved Handelshøgskolen Nord. Oppgaven utgjør 30 studiepoeng, og er skrevet innenfor profileringen finansiering og investering. Oppgaven er skrevet ved bruk av Rmarkdown, som gir en helhetlig integrasjon av skriving og analytisk bearbeiding av datamaterialet. På bakgrunn av dette er enkelte figurer på engelsk, da de inngår i pakker uten mulighet for endring av språk. Arbeidet med oppgaven har tidvis vært svært krevende, da jeg har vært nødt til å sette meg inn i programvaren R, som jeg hadde begrenset kjennskap til fra før, samt at jeg har måttet lære hvordan prosessen med maskinlæring fungerer fra start til slutt. Læringskurven har altså vært bratt, men prosessen har vært både spennende og lærerik. Å benytte masteroppgaven for å fordype meg i et spennende tema som jeg hadde liten kjennskap til fra før av gjør at jeg sitter igjen med masse ny kunnskap som jeg ikke ville vært foruten.

Arbeidet med oppgaven hadde ikke vært mulig uten støtte og hjelp. Først og fremst ønsker jeg å rette en stor takk til min veileder, Thomas Leirvik, som har svart på smått og stort, og bidratt med oppfølging og gode innspill, veiledninger og grundige tilbakemeldinger gjennom hele prosessen. I tillegg ønsker jeg å takke Menghan Yuan for rask hjelp hver gang jeg har stått fast med koding, R og maskinlæring. Venner og familie som har korrekturlest og gitt tilbakemeldinger på oppgaven fortjener en takk her også, samt alle mine nære som har støttet, tilrettelagt og tatt hensyn til en stresset student under siste innpurt av studietiden.

Til sist vil jeg takke for fem flotte år ved Nord Universitet og Handelshøgskolen Nord.

Bodø, 27.mai 2020



Signe Tangevold Kilskar

Sammendrag

Dette studiet benytter seg av maskinlæringsmetoden Random Forest (RF) for aksjeutvelgelse på det norske aksjemarkedet. RF-modellen trenes både på en kombinasjon av tekniske og fundamentale faktorer, samt et rent momentumsområde, og formålet har dermed vært å undersøke hvorvidt metoden er i stand å skape meravkastning i det norske aksjemarkedet på bakgrunn av de konstruerte funksjonsområdene. Strategien for aksjeutvelgelse implementeres i perioden 14.12.2010 til 30.04.2019, ved at aksjer velges til en likevektet portefølje basert på sannsynlighetsrangeringer fra RF-modellen. Ved hver rebalanseringsdag velges de 10 aksjene med høyest sannsynlighet for å være i beste klasse basert på fremtidig meravkastning ut over OSEBX, og holdes ut holdeperioden.

Totalt konstrueres tre porteføljer for å undersøke hvor robust strategien er for ulike fremtidsperioder, hvor P_{RF} har en langsiktig holdeperiode på en måned, mens P_{komb} og P_{mom} har en kortsiktig holdeperiode på en dag. Porteføljene er trent på henholdsvis et kombinert funksjonsområde bestående av tekniske og fundamentale faktorer, er videreutviklet kombinert funksjonsområde tilpasset en kortere holdeperiode, og et funksjonsområde bestående av kun momentumsfaktorer med ulik tidshorisont. Porteføljene oppnår Sharpe-rater på henholdsvis 2.44 , 5.13 og 5.55 før transaksjonskostnader. Resultatene er svært høye, men i tråd med tidligere forskning som benytter seg av samme metode og funksjonsområder på andre markeder. Prestasjonen for porteføljene med kort holdeperiode reduseres kraftig etter transaksjonskostnader, og hvor lønnsom denne strategien er vil dermed avhenge av hvor lave transaksjonskostnader det er mulig å få for en slik portefølje.

For alle porteføljene viser avkastningen en avtagende trend over tid, men uavhengig av dette må resultatene sies å utfordre både den svake og halvsterke formen for markedseffisiens. For den lange fremtidsperioden viser både langsiktige tekniske faktorer og fundamentale faktorer å være av relevans, mens det i den korte fremtidsperioden hovedsakelig er tekniske faktorer som forklarer avkastning. Over en tradingperiode på omtrent 9.5 år viser modellen å stort sett velge ut aksjer som bidrar positivt til porteføljeprestasjonen, og det konkluderes dermed med at studiets resultater er pålitelige og at RF-modellen er i stand til å oppdage mønstre som er av betydning for meravkastning, og burde dermed være av interesse for tradere og porteføljeforvaltere.

Innholdsfortegnelse

Abstract	i
Forord	ii
Sammendrag	iii
1 Introduksjon	1
1.1 Problemstilling	3
2 Økonomisk teori	4
2.1 Markedseffisiens	4
2.1.1 Grader av effisiens	4
2.2 Porteføljeteori	5
2.2.1 Moderne porteføljeteori	6
2.3 Faktormodeller	7
2.3.1 Kapitalverdimodellen	7
2.3.2 Arbitrasjeprisingsteorien	8
2.3.3 Carhart 4-faktormodell	9
2.4 Aktivavurdering	10
2.4.1 Fundamental analyse	10
2.4.2 Teknisk analyse	10
2.5 Prestasjonsvurdering	11
2.5.1 Treynor-rate	11
2.5.2 Sharpe-rate	11
2.5.3 Sortino-rate	12
3 Maskinlæring	13
3.1 Introduksjon til maskinlæring	13
3.2 Metoder: veiledet og ikke-veiledet maskinlæring	14
3.2.1 Måling og modelltilpasning	15
3.3 Beslutningstrær	16
3.3.1 Bagging	16
3.3.2 Random Forest	17
4 Data og metode	19
4.1 Data	19
4.1.1 Oppdeling av datasettet	20
4.1.2 Programmering	20
4.2 Konstruksjon av variabler og funksjonsområder	21
4.2.1 Fundamentale og tekniske faktorer	22
4.2.2 Videreutviklet funksjonsområde for kort holdeperiode	24
4.2.3 Momentumsfaktorer	25
4.2.4 Manglende verdier i datasett	26
4.3 Random Forest modellering	26

4.3.1	Prediksjon, rangering og porteføljekonstruksjon	27
4.4	Metodedrøfting og studiets begrensninger	29
5	Analyse og resultater	30
5.1	Modell-spesifikasjoner	30
5.1.1	Antall klasser	30
5.1.2	Treningsperioden	32
5.2	Analyse av variabler	34
5.3	Porteføljeanalyse	35
5.3.1	Etter transaksjonskostnader	36
5.3.2	Aksjeutvelgelse	40
5.4	Porteføljeanalyse: Kort holdeperiode	42
5.4.1	Variabelviktighet	44
5.4.2	Aksjeutvelgelse	45
6	Konklusjon	47
	Kilder	48
	Appendiks	53
	Appendiks A	53
	Appendiks B	53

Oversikt over figurer

2.1 Effisiensfronten	5
2.2 Diversifisering	7
4.1 Glidende trenings- og tradingperioder	20
4.2 Tidsbruk ved forskning på store datamaterialer (Forbes 2016)	21
4.3 Random Forest algoritme	27
5.1 Antall klassers påvirkning på porteføljeprestasjon	31
5.2 Treningsperiodens påvirkning på porteføljeprestasjon	33
5.3 Variabelviktighet for ulike tidsperioder	34
5.4 Rullerende porteføljeprestasjon	38
5.5 Rullerende annualisert avkastning for porteføljer med kort holdeperiode	44
6.1 Appendiks: Variabelviktighet for den korte holdeperioden: kombinert funksjonsområde	53
6.2 Appendiks: Variabelviktighet for den korte holdeperioden: momentumsområde	54

Oversikt over tabeller

1.1 Litteratursøk - Aksjeutvelgelse	3
4.1 Fundamentale faktorer	22
4.2 Tekniske faktorer	24
4.3 Utvidelse av tekniske faktorer	25
5.1 Prestasjonsvurdering basert på ulikt antall klasser	32
5.2 Prestasjonsvurdering basert på ulike treningsperioder	33
5.3 Sluttporteføljen, P_{RF} , før transaksjonskostnader	36
5.4 Prestasjonsvurdering: P_{RF} før og etter transaksjonskostnader & OSEBX	37
5.5 Månedlig statistikk for porteføljen	39
5.6 Prestasjonstall for ulike perioder	39
5.7 Topp 10 holdte aksjer for P_{RF}	40
5.8 Prestasjon for porteføljer med kort holdeperiode	42
5.9 Topp 10 holdte aksjer for P_{komb}	45
5.10 Topp 10 holdte aksjer for P_{mom}	46
6.1 Appendiks: Statistikker for datamaterialet	53

1 Introduksjon

Driverne av aksjeavkastning er av stor betydning for aktører i aksjemarkedet. Gjennom subjektive valg og bruk av ulike metoder velges aksjer som antas å prestere bedre enn markedet i et forsøk på å slå markedsavkastningen. Aktivvalg har dermed lenge vært identifisert som et viktig, men utfordrende, tema innenfor analyse av finansielle markeder, og er svært avhengig av pålitelig prediksjon av aksjers utvikling og vellykket porteføljekonstruksjon. Mens det av enkelte hevdes at aktivaallokering er av størst betydning for en porteføljes avkastning (Brinson et al., 1986, 1991; Shukla og Bogle, 1994), fokuserer porteføljevaltere ofte på å finne aksjer som kan gi bedre resultater enn markedets tverrsnittsmedian (Tan et al., 2019). Flere artikler understreker i den sammenheng viktigheten av aktivvalg for tverrsnittlig porteføljeavkastning (Brown et al., 2010; Ibbotson og Kaplan, 2000; Kritzman og Page, 2002), og tydeliggjør med det aktivvalgs rolle for varierende meravkastning på tvers av porteføljer.

Klassiske modeller som CAPM, FAMA trefaktormodell og Carhart firefaktormodell hevder at aksjeavkastning kan knyttes til underliggende faktorer som blant annet markedsrisiko, markeds kapital og momentum (Carhart, 1997; Fama og French, 1993; Sharpe, 1964). Disse modellene har til felles at de forutsetter linearitet mellom avkastning og forklarende faktorer, noe som har hatt stor praktisk betydning og har ført til at disse regresjonsmodellene og -analysene utgjør det primære fokuset i akademisk sammenheng. Den lineære kombinasjonen av faktorer kan derimot sees på som en forenkling som ikke er i stand til å reflektere det komplekse aksjemarkedet, og dermed ikke er i stand til å fullt ut fange den prediktive kraften faktorene innehar (Zhu et al., 2012).

De siste årene har en rekke forskningsfelt, inkludert finans, begynt å legge stadig større vekt på avanserte statistiske metoder, som for eksempel maskinlæringsteknikker, fordi de muliggjør simulering og modellering av komplekse problemer, som tidligere har vært krevende å utføre. Gjennom kraftige modeller som blant annet Artificial Neural Networks (Guresen et al., 2011; Qiu et al., 2016), Support Vector Machines (Huang et al., 2005; Tay og Cao, 2001) og Random Forest (Krauss et al., 2017) har forklarings- og prediksjonsevnenene relatert til aksjeavkastning signifikant forbedret seg. Utviklingen innenfor maskinlæringsteknikker har ført til alternative metoder for illustrering av forholdet mellom aksjepris og relevante faktorer, og bidrar dermed til en høyere grad av modelldiversifisering sammenlignet med de tradisjonelle tilnærmingene (Hajjami og Amin, 2018).

Bruk av maskinlæringsteknikker innenfor finans er fremdeles ikke spesielt utbredt i det akademiske miljøet, og det er få artikler publisert i finansielle tidsskrifter. Det er, derimot, mange artikler publisert i tidsskrifter relatert til informatikk, programmering og datavitenskap. Et litteratursøk blant forskningsartikler relatert til aksjeprediksjon viser at blant de 20 tidsskriftene med flest relevante publikasjoner, er det kun tidsskrift nummer 20 på listen som har økonomisk tilknytning (Henrique et al., 2019). Varian (2014), sjefsøkonom i Google, understreker dette ytterligere og mener at maskinlæringsteknikker burde vært mer utbredt blant økonomer. Utviklingen relatert til maskinlæring kan se ut til å lede til et gap mellom akademisk finans på en side, og finansindustrien på den andre siden, hvor det forventes at mulighetene for samarbeid mellom dataforskere og økonomer vil fortsette å øke.

Selv om det eksisterer et stort volum av litteratur relatert til prediksjon av aksjekurser via maskinlæring, er det få artikler som illustrerer forholdet mellom aksjeutvalgelse og underliggende faktorer ved bruk av maskinlæring.

Andriyashin et al. (2008) benyttet seg av beslutningstrær for å gjøre en aksjeutvelgelse blant DAX-aksjer. Ved bruk av fundamentale og tekniske faktorer, ble aksjene klassifisert i grupper som indikerte hvilken posisjon som burde tas i aksjene: lang, kort eller nøytral. Modellen oppnådde en årlig avkastning på 25.55% og en Sharpe-rate på 1.59, som antyder at avkastningen tilstrekkelig kan forutsies av de valgte faktorene.

Sorensen et al. (2007) undersøkte hva som er gode variabler for aksjeutvelgelse, og ved bruk av CART (classification and regression trees) gjorde de et utvalg av teknologiaksjer. Zhu et al. (2011) og (2012) undersøkte bruk av CART for aksjeutvelgelse i Nord-Amerika, og sammenlignet modellen mot tradisjonelle lineære modeller. Beslutningstre-modellene vurderes i begge tilfeller som signifikante i forhold til de tradisjonelle, lineære modellene både når det kommer til risikodiversifiserte porteføljer, og å illustrere forholdet mellom avkastning og underliggende variabler.

Yu et al. (2014) konstruerte en modell for aksjeutvelgelse bestående av support vector machines kombinert med principal component analysis for å redusere sensitiviteten til kvaliteten på treningssettet. Metoden forbedret treningsnøyaktigheten og bevarer egenskapene ved de opprinnelige dataene. Modellen ga en treningsnøyaktighet på 75.4% og testnøyaktighet på 61.8%, og porteføljen av utvalgte aksjer ga signifikant bedre resultater enn referanseindeksen på Shanghai Stock Exchange.

Nylig har Tan et al. (2019) gjennomført en aksjeutvelgelse på det kinesiske markedet ved bruk av Random Forest. Ved å trene modellen på både fundamentale og tekniske faktorer ga multifaktor-strategien en årlig avkastning på 101% og en Sharpe-rate på 2.75. Videre konkluderer de med at observasjonene antyder at maskinlæring bidrar til å oppdage mønstre på basis av daglig data, og dermed antakelig er nyttig for kvantitative tradere som ønsker å utvikle lønnsomme strategier. Studiet til Tan et al. (2019) er videre inspirert av forskningen til Krauss et al. (2017) som benyttet seg av flere maskinlæringsmetoder, inkludert Random Forest, på et utvalg av S&P500-konstituentene. Ved bruk av faktorer kun basert på avkastning oppnår ensemblet deres basert på en kombinasjon av metoder en daglig avkastning på 0.45% før transaksjonskostnader, og viser at det selv for mer modne og hyppig analyserte aksjemarkeder er mulig å skape meravkastning på bakgrunn av maskinlæringsmetoder. Ved å konstruere et lignende funksjonsområde som Krauss et al. (2017) oppnår Tan et al. (2019) en Sharpe-rate på 5, og en årlig avkastning på 186% for sin modell. I begge studiene svekkes prestasjonen over tid, og det antas at dette kan være et resultat av maskinlæringsteknikkers økende popularitet og økningen i datakraft. For Tan et al. (2019) foreslås det også at svekkelsen kan være et resultat av et mer modent marked.

Yang et al. (2019) oppsummerer i sin forskning flere nylige forskningsartikler relatert til aksjeutvelgelse. Et relevant utvalg av disse, samt annen relatert forskning er presentert i tabell 1.1.

Tabellen består av studier som inkluderer både fundamentale og tekniske faktorer, og viser landene studiet har tilknytning til. De fundamentale faktorene, som Return On Equity (ROE), Current Ratio (CR) og Return On Assets (ROA), brukes for å reflektere virksomhetens natur, økonomi og konkurranseevnen til en aksje (Bhatia og Madaan, 2018; Fu et al., 2018; Zhang et al., 2018). Tekniske faktorer, som Relative Strength Index(RSI), Moving Average(MA), volatilitet og momentum reflekterer markedstilstanden til en aksje (Fu et al., 2018; Liu og Yeh, 2017; Zhang et al., 2018).

Forfattere	Metode	Faktorer		Land
		Fundamentale	Tekniske	
Tan et al., 2019	Random Forest	E/P, B/P, ROE etc.	Volatilitet, momentum etc.	Kina
Fu et al., 2018	Lineær Regresjon, Deep Neural Network, Random Forest	ROE, ROA, P/B etc.	RSI, MA, volum etc.	Kina
Zhang et al., 2018	SVM	Vekst og finansiell kvalitet	Aksjepris, volatilitet, turnover rate etc.	Kina
Hajjami og Amin, 2018	Ordered Weighted Averaging	EPS, ROE, CF etc.	Størrelsesrate	Iran
Bhatia et al., 2018	Random Forest, SVM, ANN etc.	B/P, S/P, ROE	Avkastningsrate, markedsverdi, systematisk risiko	USA
Liu et al., 2017	ANN	E/P, B/P, S/P	Markedskapital og momentum	USA
Yu et al., 2016	DE, PSO, GA etc.	CR, ITR, QR etc	RSI, RSV	Kina

Note: Tabellen viser nylig forskning relatert til aksjeutvelgelse, og hvilke tekniske og fundamentale faktorer som er benyttet. E/P er kort for Fortjeneste-Pris raten, B/P er kort for Bok-Pris raten, ROE for Return On Equity, ROA for Return On Assets, EPS for for Earnings Per Share, S/P for Salg-Pris raten, CR for current ratio, ITR for Inventory Turnover Rate, QR for Quick Rate, RSI for Relative Strength Index, MA for Moving Average, RSV for Raw Stochastic Value.

Tabell 1.1: Litteratursøk - Aksjeutvelgelse

1.1 Problemstilling

I lys av introduksjonen vil dette studiet ta for seg maskinlæringsteknikker som et alternativ til tradisjonelle tilnærminger for å forklare forholdet mellom aksjepris og relevante faktorer. Videre vil dette forholdet benyttes for å gjennomføre aktivvalg, og hovedfokuset er dermed å undersøke hvorvidt denne tilnærmingen til aktivvalg, ved bruk av tekniske og fundamentale faktorer, vil kunne gi meravkastning ut over hovedindeksen.

Problemstillingen er dermed formulert som følger:

Kan aktivvalg ved bruk av maskinlæringsteknikker slå avkastningen til OSEBX?

Metode og fremgangsmåte for denne oppgaven er i stor grad inspirert av forskningen til Tan et al. (2019), og studiets formål er dermed å gi innsikt i hvorvidt maskinlæringsmetoder, spesifikt Random Forest, kan benyttes for å finne mønstre basert på tekniske og fundamentale faktorer for å forbedre tradingstrategier, og dermed porteføljeprestasjon på det norske aksjemarkedet. Av problemstillingen følger det at studiet vil bli gjennomført ved bruk av aksjer listet på Oslo Børs, og med OSEBX som benchmark. I forhold til store og hyppig fulgte markeder som det amerikanske markedet, spesielt aksjene på S&P500, og det hurtig voksende kinesiske aksjemarkedet, kan det norske aksjemarkedet sies å være både mindre likvid og fulgt av færre analytikere. Studiet vil dermed bygge videre på og supplere tidligere forskning, som ofte benytter de nevnte markedene, ved å teste hvor robust metoden er når den anvendes på et mindre marked. Videre er det også interessant å se hvorvidt det er forskjeller i prestasjon, og om modellen presterer jevnt over tid.

Den relevante teorien for studiet vil være todelt. Grunnleggende økonomisk teori presenteres i kapittel 2, mens kapittel 3 inneholder en introduksjon av maskinlæring, samt relevant teori relatert til metoden som vil bli brukt i oppgaven. Videre vil kapittel 4 presentere oppgavens data, metodikk og fremgangsmåte for porteføljekonstruksjon. Kapittel 5 analyserer og presenterer studiets resultater. Til sist gir kapittel 6 en konklusjon i henhold til problemstillingen.

2 Økonomisk teori

I følgende kapittel vil den økonomiske teorien som ligger til grunn for oppgaven presenteres.

2.1 Markedseffisiens

Analyse av tidsserier for å identifisere mønstre var en av de tidlige brukene av data innenfor økonomi. Gjennom en analyse for å forsøke å finne systematisk sammenheng i bevegelsene til verdipapirer, fant Kendall og Hill (1953) ut at prisene på verdipapirer så ut til å utvikle seg helt tilfeldig. Dette studiet dannet grunnlaget for teorien om markedseffisiens, gjennom å etablere forståelsen av at tilfeldige priser indikerer et velfungerende, eller effektivt, marked (Bodie et al., 2018).

Fama (1970) introduserte antagelsen om effisiente markeder i sin artikkel. Her ble det effisiente markedet definert som “et marked med et betydelig antall rasjonelle, profittmaksimerende deltakere som aktivt konkurrerer om å forutsi fremtidige markedsverdier på individuelle verdipapirer, og hvor nåværende viktig informasjon omtrent er fritt tilgjengelig for alle deltakere”. Teorien hevder dermed at prisen på verdipapirer til enhver tid reflekterer all nåværende informasjon om verdipapiret og forventningene om de fremtidige inntektene, og at det kun er ny informasjon som kan endre aksjekursen. Ettersom den nye informasjonen og når den presenteres ikke er kjent, regnes den som uforutsigbar, og fører derfor til uforutsigbare og tilfeldige endringer i aksjekursen. Dette gjør at det i henhold til hypotesen om markedseffisiens ikke vil være mulig å forutsi fremtidige aksjekursbevegelser verken gjennom teknisk eller fundamental analyse (Bodie et al., 2018).

2.1.1 Grader av effisiens

Det er vanlig å skille mellom tre former for markedseffisiens: svak, halvsterk og sterk effisiens.

Svak markedseffisiens innebærer at prisen på verdipapirer reflekterer all tilgjengelig markedsinformasjon, som historiske priser, handelsvolum eller interesse for shorting (Bodie et al., 2018). Denne versjonen impliserer at teknisk analyse, eller analyse med hensikt å finne mønstre i tilgjengelig markedsdata, ikke vil kunne gi meravkastning, da denne informasjonen allerede er reflektert i prisen.

Halvsterk markedseffisiens bygger videre på svak markedseffisiens, og legger til at all offentlig tilgjengelig informasjon også reflekteres i prisen på verdipapirer. Dette omfatter blant annet selskapets produktportefølje, kvalitet på ledelsen, sammensetning av balansen, patenter, resultatprognoser og regnskapspraksis (Bodie et al., 2018). Dersom denne formen for markedseffisiens er gjeldende, vil også fundamental analyse, blant annet gjennom å analysere regnskapsinformasjon og børsmeldinger, være lite hensiktsmessig.

Under sterk markedseffisiens reflekterer aksjeprisen absolutt all informasjon relatert til selskapet, også inkludert informasjon som kun er tilgjengelig for selskapets insidere. Denne versjonen av markedseffisiensen innebærer dermed at ingen investor vil kunne oppnå meravkastning (Bodie et al., 2018).

Teorien om effisiente markeder fra 1970 er kontroversiell, og har mottatt en del kritikk. Som svar på dette publiserte Fama en ny teori, som forklarte at forutsetningene for den sterke formen for effisiente markeder er at summen av informasjon og transaksjonskostnader er lik null. Den svakere, og mer fornuftige, versjon av effisienshypotesen hevder dermed at priser reflekterer informasjon fram til punktet hvor de marginale fordelene ved å få informasjon ikke overskrider marginalkostnadene (Fama, 1991).

2.2 Porteføljeteori

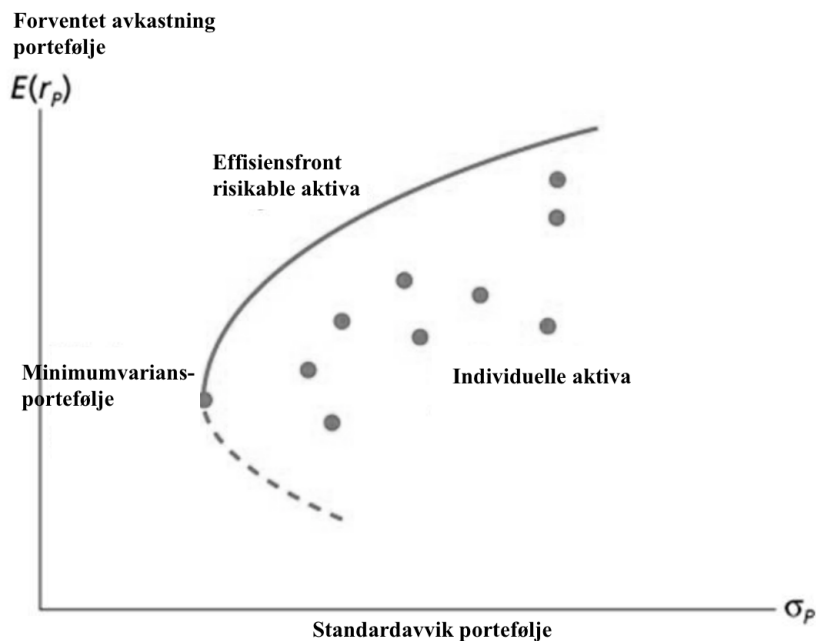
Aktivaallokering står for en stor del av variabiliteten i avkastning for en typisk investors portefølje. Den optimale kapitalfordelingen er dermed en av de viktigste avgjørelsene innenfor porteføljekonstruksjon og kapitalforvaltning (Sharpe, 1992), og går ut på å justere andelen i porteføljens underliggende aktiva for å minimere volatilitet og maksimere avkastning. I den sammenheng kan investeringsavgjørelsen sees på som en tre-steps prosess (Bodie et al., 2018):

1. Kapitalallokering mellom risikofri aktiva som statsobligasjoner og den risikofylte porteføljen.
2. Aktivaallokering innenfor den risikofylte porteføljen på tvers av brede aktivaklasser, som norske aksjer, internasjonale aksjer og langsiktige obligasjoner.
3. Aktivavalg, altså valg av individuelle aktiva innen hver aktivaklasse.

Den optimale kapitalallokeringen avhenger dermed av kompromisset mellom risiko-avkastning gitt av den risikofylte porteføljen, samt investorens holdning til risiko.

Denne oppgaven fokuserer på steg 3, aktivavalg, innenfor aksjer listet på Oslo Børs. I prinsippet kan aktivaallokering og aktivavalg sees på som identiske operasjoner. Begge stegene søker å identifisere den optimale risikofylte porteføljen, spesifikt kombinasjonen av risikofylte aktiva som gir den beste avveiningen mellom avkastning og risiko, ofte bestemt ved bruk av Sharpe-raten (Bodie et al., 2018).

Effisiensfronten er den grafiske representasjonen av et sett av porteføljer som maksimerer forventet avkastning for hvert nivå av porteføljerisiko. Rasjonelle investorer vil dermed velge en portefølje representert på fronten.



Figur 2.1: Effisiensfronten

2.2.1 Moderne porteføljeteori

Moderne porteføljeteori (MPT) tar for seg hvordan risikoaverse investorer kan konstruere porteføljer som optimaliserer eller maksimerer forventet avkastning basert på et gitt nivå markedsrisiko, og anvendelsen av dette er kjent som “*mean-variance optimization*”. Teorien om moderne porteføljer ble introdusert av Markowitz (1952).

MPT argumenterer for at en investerings risiko og avkastning ikke skal sees på separat, men evalueres ut ifra hvordan investeringen påvirker den totale porteføljens risiko og avkastning. MPT viser dermed at en investor kan konstruere en portefølje bestående av flere aktiva som maksimerer avkastning for et gitt nivå risiko. På samme måte kan en investor konstruere en portefølje med lavest mulig risiko, gitt et ønsket nivå av forventet avkastning.

Avkastningen til en portefølje er gitt ved:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i) \quad (1)$$

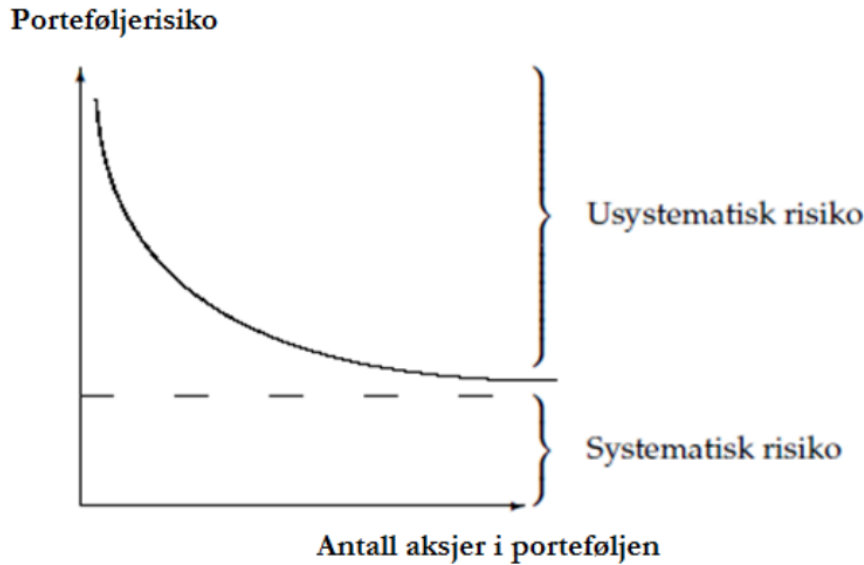
Hvor $E(r_p)$ er den forventede avkastningen til porteføljen, w_i er andelen av aktiva i i porteføljen, og $E(r_i)$ er den forventede avkastningen til aktiva i .

Videre gis risikoen til porteføljen ved variansen til porteføljen:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \sigma_i \cdot w_j \sigma_j \cdot \rho_{r_i r_j} \quad (2)$$

Hvor σ_p^2 er variansen til porteføljens forventede avkastningen i perioden, w_i og w_j er vektning i henholdsvis aktiva i og j , σ_i og σ_j er standardavviket til henholdsvis aktiva i og j , og $\rho_{r_i r_j}$ er korrelasjonen mellom aktivaene.

Porteføljens risiko, bestemt ved variansen, avgjøres dermed av korrelasjonen mellom aktivaene i porteføljen. Korrelasjonskoeffisienter varierer mellom -1 og 1. En korrelasjonskoeffisient på 1 indikerer at aktivaene er perfekt korrelert, slik at aktivaene beveger seg likt i samme retning. En koeffisient på -1 indikerer at aktivaene er perfekt negativt korrelert, og beveger seg likt i motsatt retning. Aktivaer med høy korrelasjon vil dermed kunne øke risikoen i porteføljen, mens aktivaer med lav korrelasjon vil kunne bidra til redusert risiko.



Figur 2.2: Diversifisering

Figur 2.2 illustrerer viktigheten av korrelasjon mellom aktivaer for diversifisering av porteføljerisiko. Når antallet aktiva, representert ved x-aksen i figuren, øker, vil graden av korrelasjon mellom aksjene kunne redusere risikoen slik at all usystematisk risiko elimineres, og kun den systematiske risikoen gjenstår. Diversifisering står dermed sentralt i moderne porteføljet teori, og går ut på at den usystematiske risikoen til porteføljen kan fjernes gjennom aktivavalg. Dette innebærer at risikofaktorer er driverne til avkastning, siden moderne porteføljet teori impliserer at meravkastning i aksjemarkedet krever at man påtar seg ytterligere risiko.

2.3 Faktormodeller

Moderne porteføljet teori danner grunnlaget for utviklingen av faktormodeller gjennom antakelsen om at ulike risikofaktorer driver avkastning. En faktormodell er dermed en representasjon av en, eller flere, typer risiko, og søker å forklare forventet avkastning for et aktiva eller en portefølje. Etter introduksjonen fra kapittel 1 bygger studiet videre på prinsippet om at det eksisterer faktorer som kan forklare meravkastning, og tidligere forklarte forhold mellom avkastning og underliggende faktorer er dermed en viktig byggesten for studiet.

2.3.1 Kapitalverdimodellen

Kapitalverdimodellen, ofte referert til som CAPM, er en av de mest sentrale modellene innen finansiell økonomi. CAPM er en én-faktormodell hvor all systematisk risiko er representert ved markedet. Harry Markowitz' moderne porteføljet teori la grunnlaget for modellen, som senere ble utledet og publisert av Sharpe (1964), Lintner (1965) og Mossin (1966). Hensikten med kapitalverdimodellen er å gi investor en forståelse av sammenhengen mellom aktivumets avkastning og risikoen i markedet. Kapitalverdimodellen baserer seg på to sett med forutsetninger (Bodie et al., 2018):

1. *Investors atferd* - Investorer er rasjonelle individer med planleggingshorisont lik en enkelt periode, og har homogene forventninger til avkastning og varians.

2. *Markedets struktur* - Alle aktivum kan handles på offentlige børser, og investeringer i aktivum er en kostnadsfri prosess. Investorer har både mulighet til å låne og låne ut til risikofri rente, og kan ta korte posisjoner på omsatte aktivum.

Kapitalverdimodellen er gitt ved:

$$E(r_i) - r_f = \alpha + \beta_i(E(r_m) - r_f) \quad (3)$$

Hvor:

$E(r_i)$ er forventet avkastning

r_f er risikofri rente

α er unormal avkastning

β_i er sensitiviteten av forventet avkastning for aktivum relativ til markedet

$E(r_m)$ er forventet markedsavkastning

Betakoeffisienten hensyntar den systematiske risikoen til aktivumet, altså den delen av risikoen som ikke kan diversifiseres bort, og gir uttrykk for hvor sensitiv et aktivum er relativ til markedet. Betakoeffisienten er gitt ved:

$$\beta_i = \frac{\sigma_i \cdot \rho_{i,m}}{\sigma_m} \quad (4)$$

Hvor:

β_i er betakoeffisienten for aktivum i

σ_i er variansen til aktivum i

$\rho_{i,m}$ er korrelasjonen mellom aktivum i og markedsporteføljen m

σ_m er variansen til markedsporteføljen m

Dersom et aktivum har en betakoeffisient lik 1 vil forventet avkastning for aktivumet være lik forventet avkastning for markedsporteføljen. En betakoeffisient over 1 impliserer dermed høyere risiko enn markedsporteføljen, og dermed høyere forventet avkastning, mens en betakoeffisient under 1 impliserer lavere risiko enn markedsporteføljen (Bodie et al., 2018).

2.3.2 Arbitrasjeringsteorien

Ross (1976) utviklet arbitrasjeringsteorien (APT) som en videreutvikling av kapitalverdimodellen. I likhet med kapitalverdimodellen ser arbitrasjeringsteorien på forventet avkastning relativ til systematisk risiko, men de skiller seg fra hverandre når det kommer til hvordan den systematiske risikoen defineres. CAPM benytter seg av en enkelt risikofaktor for hele markedet, mens risikoen i markedet etter APT kan deles opp i flere faktorer. APT forklarer altså forventet avkastning for et aktiva som en lineær funksjon av risikoen til aktivaet med hensyn til et sett faktorer (Ross, 1976). Arbitrasjeringsteorien avhenger av følgende forhold (Bodie et al., 2018):

1. Avkastningen kan forklares ved en faktormodell
2. Det eksisterer tilstrekkelig aktivaer til å kunne diversifisere vekk usystematisk risiko
3. Markedet er velfungerende slik at arbitrasjemuligheter ikke vedvarer

I et tilfelle hvor det kun eksisterer en enkelt faktor for markedet, vil APT og CAPM gi samme resultat.

Etter APT er et aktivas forventede avkastning gitt ved:

$$E(r_i) - r_f = \beta_0 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n \quad (5)$$

Hvor:

$E(r_i)$ er forventet avkastning for aktivum i

β_0 også kan benevnes α er den unormale avkastningen β_n er sensitiviteten til aktivum i med hensyn til faktor n

f_k er risikopremien til faktor k

APT definerer ikke faktorene, og investoren er dermed nødt til å oppfatte risikokildene eller estimere faktorsensitivitene selv. APT antyder at investorer diversifiserer porteføljene sine, men at de velger individuelle risikoprofiler og avkastninger basert på risikopremium og sensitivitet til faktorene.

2.3.3 Carhart 4-faktormodell

Carhart introduserte sin 4-faktormodell i (1997), som en videreutvikling av 3-faktormodellen fra Fama og French (1993). Den opprinnelige 3-faktormodellen baserer seg på at beta fra CAPM ikke er et fullverdig risikomål, og at regresjonsligningen får høyere forklaringsgrad og forklarer uregelmessigheter i priser bedre enn CAPM ved å legge til ekstra forklaringsvariabler (Fama og French, 1993). Modellen bruker dermed firmakarakteristikker som representasjon for eksponering mot systematisk risiko, og er en hjørnestein innenfor empirisk forskning på aktivaavkastning og moderne faktorinvestering.

Carhart 4-faktormodell beskriver avkastningen til et aktiva ved bruk av firmakarakteristikkene fra Fama og French, samt momentumfaktoren oppdaget av Jegadeesh og Titman (1993a), ut fra følgende ligning (Bodie et al., 2018):

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_{iM} R_{Mt} + \beta_{iSMB} SMB_t + \beta_{iHML} HML_t + \beta_{iMOM} MOM_t + \varepsilon_{it} \quad (6)$$

Hvor:

$R_{i,t}$ er merakvastning

SMB viser til “Small Minus Big”, det vil si gjennomsnittlig avkastning for en portefølje bestående av små aksjer minus gjennomsnittlig avkastning for en portefølje bestående av store aksjer.

HML viser til “High Minus Low”, det vil si gjennomsnittlig avkastning for en portefølje bestående av aksjer med høy bok/marked-verdi minus gjennomsnittlig avkastning for en portefølje av aksjer med lav bok/marked-verdi.

MOM viser til momentum, og sier at aksjer som presterer bra(dårlig) i en periode, vil fortsette å prestere bra(dårlig) i neste periode.

Ved å sette $\beta_{iMOM} = 0$ vil modellen tilsvare Fama og French 3-faktormodell.

Faktorene SMB og HML er ikke åpenbare faktorer for risiko i seg selv, men representerer andre underliggende variabler som er vanskeligere å måle. Fama og French peker på at selskaper med høyt bok/marked-forhold har høyere sannsynlighet for økonomisk trøbbel, og at små selskaper er mer sensitive til endringer i forretningsforhold (Bodie et al., 2018).

Pastor og Stambaugh (2003) introduserte en videre utvidelse på modellen gjennom inklusjon av en likviditetsfaktor. Denne faktoren tar hensyn til at investorer krever kompensasjon, i form av avkastning, for å investere i aksjer som er mindre likvide (Bodie et al., 2018). Fra deres studie viste det seg at gjennomsnittlig avkastning for aksjer med høy sensitivitet til likviditet overgikk aksjer med lav sensitivitet med hele 7,5% per år, etter justering for eksponering mot de tidligere etablerte faktorene. Fama og French har selv videreutviklet sin opprinnelige 3-faktormodell med introduksjonen av en 5-faktormodell som inkluderer faktorer for lønnsomhet og investeringer (2015). Lønnsomhetsfaktoren baserer seg på at selskaper som rapporterer høyere fremtidig inntjening har høyere avkastning, mens investeringsfaktoren foreslår at selskaper som i større grad investerer profitt vil oppleve lavere avkastning i aksjemarkedet.

Faktorene fra modellen til Carhart, og andre videreutviklede modeller, har vist seg å kunne forklare avkastning i ulik grad, og det er dermed videre i studiet interessant å se hvordan faktorer basert på blant annet lønnsomhet, momentum og likviditet fungerer i en modell som ikke baserer seg på en lineært forhold mellom faktor og avkastning.

2.4 Aktivavurdering

Aktivavurdering er en viktig del av investeringsprosessen, og hjelper investorer med å ta beslutninger angående hvilke aktiva som skal kjøpes eller selges. De to mest vanlige formene for aktivavurdering er kjent som fundamental og teknisk analyse, og danner utgangspunktet for de fundamentale og tekniske faktorene som benyttes i forbindelse med studiets aksjeutvelgelse.

2.4.1 Fundamental analyse

Fundamental analyse baserer seg på analyse av selskapets prestasjon gjennom finansregnskap og andre relaterte økonomiske og finansielle faktorer for å kunne avgjøre dets fundamentale verdi, eller verdien på aksjen i lys av utsikter for inntjening og dividender, forventninger til fremtidig rente, og risikoevaluering av selskapet. Fundamentale analytikere ser dermed på faktorer som kan påvirke en aksjes verdi, inkludert makroøkonomiske faktorer som økonomiens tilstand og industrielle forhold, og mikroøkonomiske faktorer som effektiviteten til selskapets ledelse. Logikken bak fundamentale analyser er at selskaper som presterer godt, vil fortsette å prestere godt i fremtiden, og dermed drive aksjeprisen opp på grunn av økt etterspørsel. Til syvende og sist forsøker fundamentale analytikere dermed å avgjøre nåverdien av alle innbetalinger en aksjeeier vil motta for hver aksjeandel. Generelt sett vil aksjer med høyere fundamental verdi enn nåværende aksjekurs generere økt etterspørsel (Bodie et al., 2018).

For studiets formål er fundamental analyse gjennom regnskapstall av størst relevans, og informasjonen fra denne formen for fundamental analyse uttrykkes normalt i form av ratioer, som blant annet *price to earnings* (P/E), *price to book* (P/B) og *return on equity* (ROE).

2.4.2 Teknisk analyse

Moderne teknisk analyse har sitt utspring fra Dow Theory basert på en serie av artikler av Charles Dow, senere videreutviklet av blant annet Hamilton (1922) og Rhea (1932). Artikkene baserte seg på to grunnleggende forutsetninger:

1. Markeder viser effektivt verdien som representerer faktorer som påvirker et verdipapirs pris, men
2. Markedets prisbevegelser er ikke rent tilfeldige

Tekniske analytikere tror at et verdipapirs tidligere aktivitet og prisendringer kan være verdifulle indikatorer på fremtidige prisbevegelser, og forsøker å forstå markedssentimentet bak pristrender. Gjennom teknisk analyse forsøker investorer å oppdage tilbakevendende og forutsigbare mønstre i aksjekurser. Den grunnleggende forutsetningen for teknisk analyse er at alle kjente fundamentale faktorer er tatt med i prisen, og at det dermed ikke er behov for å legge vekt på disse. Tekniske analytikere forsøker i så måte ikke å måle et verdipapirs fundamentale verdi, men forsøker heller å identifisere mønstre og trender som antyder hva verdipapiret vil gjøre i fremtiden (Bodie et al., 2018).

Blant former for teknisk analyse som er relevant videre i studiet finner vi glidende gjennomsnitt, trendlinjer og momentumbaserte indikatorer.

2.5 Prestasjonsvurdering

For å avgjøre hvorvidt det er mulig å slå hovedindeksen ved bruk av aktivvalg, må risiko og avkastning vurderes opp mot hverandre. Dette er et av hovedpoengene fra moderne porteføljeteori, presentert i kapittel 2.3.1. Det er dermed ikke tilstrekkelig å sammenligne prestasjon basert på avkastning alene, da høy avkastning ofte sees i sammenheng med høy risiko. Av denne grunn brukes ulike risikojusterte prestasjonsmål for å vurdere i hvor stor grad avkastningen er et resultat av risiko, eller hvorvidt risikoen kompenseres tilstrekkelig i form av ekstra avkastning. Ved å benytte tilsvarende prestasjonsmål som relatert forskning forsterkes reliabiliteten til studiets resultater.

2.5.1 Treynor-rate

Treynor-raten baserer seg på kapitalverdimodellen, og måler meravkastning per enhet systematisk risiko, β . Treynor hevder at den systematiske risikoen er det relevante risikomålet, da det ikke kan forventes kompensasjon for usystematisk risiko som kan elimineres gjennom diversifisering (Treynor, 1965).

Treynor-raten er gitt ved:

$$T_p = \frac{r_p - r_f}{\beta_p} \quad (7)$$

Hvor

T_p er Treynor-raten til portefølje p

r_p er porteføljens avkastning

r_f er risikofri rente

β_p er porteføljens beta, definert i ligning 4

En høy Treynor-rate impliserer at porteføljen har en høy risikojustert avkastning relativ til en portefølje med lav Treynor-rate. Raten benyttes dermed ofte som en demonstrasjon på en porteføljes ytelse sammenlignet med andre porteføljer, og er på grunn av sin antakelse om relevant risiko best egnet for en veldiversifisert investor.

2.5.2 Sharpe-rate

Sharpe-raten ble introdusert av Sharpe (1966), og tar i motsetning til Treynor-raten for seg både systematisk og usystematisk risiko. Raten er dermed et forholdstall som gir uttrykk for hvor høy avkastningen for en portefølje er relativ til dens totale risiko.

Sharpe-raten er gitt ved:

$$S_p = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \quad (8)$$

Hvor

S_p er Sharpe-raten til portefølje p

r_p er porteføljens avkastning

r_f er risikofri avkastning

σ_p er porteføljens standardavvik

En høy rate indikerer at porteføljen presterer godt relativt til risikoeksponeringen, og Sharpe-raten egner seg godt for en udiversifisert investor, der en risikabel totalportefølje kan kombineres med et risikofritt aktivum.

2.5.3 Sortino-rate

Sortino-raten er en videreutvikling av Sharpe-raten som skiller negativ volatilitet fra total volatilitet ved å kun benytte seg av standardavviket til negativ porteføljeavkastning, også kalt nedsideavvik. Sortinoraten kan dermed sees på som en forbedring av Sharpe-raten, som setter en straff på investeringen også for positiv risiko.

Sortino-raten er gitt ved (Sortino og Price, 1994):

$$Sortino_p = \frac{r_p - r_f}{\sigma_d} \quad (9)$$

Hvor

r_p er porteføljens avkastning

r_f er risikofri rente

σ_d er standardavviket til nedside, også kalt nedsideavvik

Siden Sortino-raten kun ser på de negative avvikene fra porteføljens gjennomsnittlige avkastning anser enkelte den som et bedre mål på porteføljeprestasjon, da oppsideavvik genererer positive avkastninger, og dermed er fordelaktig for investorer.

3 Maskinlæring

Prediksjon og analyse av data fra det finansielle markedet er utfordrende på grunn av dataens ikke-stasjonære natur, altså at de endrer gjennomsnitt, varians og kovarians over tid. Dataene er gjerne kaotiske, ikke-lineære og inneholder støy (Henrique et al., 2019). Teknologiske fremskritt har gjort det mulig å analysere store mengder historisk data ved bruk av datasystemer, og samtidig finne sammenhenger som mennesker har vanskeligheter for å se. Denne bruken av intelligente modeller studeres ofte under tittelen maskinlæring. Maskinlæringsteknikker integrerer datasystemer med kunstig intelligens, og forsøker å trekke ut mønstre fra historiske data. Denne prosessen er kjent som trening eller læring, for   i ettertid kunne komme med prediksjoner om ny data.

Empiriske studier ved bruk av maskinlæring har normalt to faser. Den første fasen tar for seg valget av relevante variabler og modeller, og deler dataene opp i et treningssett og et valideringssett, eller testsett, for å optimalisere modellene. Fase to anvender de optimaliserte modellene på dataene satt av til testing, og måler hvor godt modellene presterer (Henrique et al., 2019).

3.1 Introduksjon til maskinlæring

Maskinlæring bygger på statistisk læring. Fra statistisk læring har vi inputvariabler, heretter referert til som inngangsverdier eller prediktorer, og outputvariabler, heretter referert til som utgangsverdier eller responsverdi. Inngangsverdiene betegnes av en matrise X bestående av p vektorer X_1, X_2, \dots, X_p . Utgangsverdiene betegnes normalt ved Y . På generell form kan dette uttrykkes som

$$Y = f(X) + \varepsilon, \varepsilon \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1) \quad (10)$$

Hvor f er en funksjon av X_1, X_2, \dots, X_p og ε er et tilfeldig feilledd som er uavhengig av X og har gjennomsnitt lik null. I denne formelen er f den systematiske informasjonen X gir om Y . Statistisk læring kan dermed i hovedsak sies å referere til et sett av tilnærminger for å estimere f (James et al., 2017). Det er to grunner til hvorfor man ønsker å estimere f : prediksjon eller inferens.

Prediksjon

I mange situasjoner er inngangsverdiene lett tilgjengelige, mens utgangsverdiene ikke kan skaffes enkelt. I slike settinger, siden feilleddet har gjennomsnitt null, kan vi predikere Y ved

$$\hat{Y} = \hat{f}(X) \quad (11)$$

Hvor \hat{f} representerer estimatet for f , og \hat{Y} representerer den resulterende prediksjonen av Y . Nøyaktigheten til \hat{Y} som en prediksjon for Y avhenger av to faktorer: reduserbar feil og ikke-reduserbar feil. Reduserbar feil oppstår på grunn av unøyaktighet relatert til at \hat{f} generelt ikke vil være et perfekt estimat for f . Denne feilen kan reduseres ved å forbedre nøyaktigheten til \hat{f} gjennom bruk av den mest passende statistiske læringsmetoden. Ikke-reduserbar feil vil likevel eksistere, da selv et perfekt estimat for f , slik at estimatet tar formen $\hat{Y} = f(X)$, også vil være et resultat av feilleddet ε . Dette leddet kan ikke predikeres ved bruk av X , slik at feilen gitt ved ε ikke reduseres uansett hvor godt estimatet for f er (James et al., 2017).

Grunnen til at feilleddet ε er ulikt null er fordi dette leddet kan inneholde informasjon eller variabler som er

nyttige for å forklare Y , eller fordi leddet inneholder informasjon som ikke lar seg måle. Feilene i prediksjonen kan gis ved:

$$\begin{aligned} E(Y - \hat{Y})^2 &= E[f(X) + \varepsilon - E(\hat{f})]^2 \\ &= \underbrace{[f(X) - \hat{f}(X)]^2}_{\text{Reduserbar}} + \underbrace{Var(\varepsilon)}_{\text{Ikke-reduserbar}} \end{aligned} \quad (12)$$

Hvor $E(Y - \hat{Y})$ representerer forventet verdi av de kvadrerte forskjellene mellom predikert og faktisk Y , og $Var(\varepsilon)$ representerer variansen assosiert med ε . Fokuset innenfor statistisk læring er dermed å bruke teknikker for å estimere f slik at den reduserbare feilen minimeres, for å mest mulig nøyaktig kunne predikere Y (James et al., 2017).

Inferens

I situasjoner hvor vi ønsker å estimere f , men ikke nødvendigvis å predikere Y , er målet ofte å forstå hvordan Y påvirkes av endringer i X -variablene, altså hvordan Y endres som en funksjon av X_1, \dots, X_p . I motsetning til ved prediksjon, hvor formen på f ikke er av betydning, så lenge den gir nøyaktige prediksjoner, har formen på f her stor betydning for å forstå bevegelsene i Y . I en slik setting kan formålet være å forstå hvilke variabler som påvirker Y , hva som er forholdet mellom hver enkelt variabel og Y , og om forholdet kan formuleres lineært, eller om det er mer komplekst (James et al., 2017).

3.2 Metoder: veiledet og ikke-veiledet maskinlæring

Maskinlæring refererer altså til et sett av verktøy brukt for å forstå data. Disse verktøyene kan klassifiseres som enten veiledet (“supervised”) eller ikke-veiledet (“unsupervised”). Generelt sett innebærer veiledet læring å bygge statistiske modeller for å predikere, eller estimere, utgangsverdier basert på en eller flere inngangsverdier. Altså har veiledet læring en utgangsverdi som veileder læringsprosessen. Vi har dermed at for hver observasjon av predikatoren verdi x_i , $i = 1, \dots, n$ er det en tilhørende responsverdi y_i . Med veiledet læring ønsker vi altså å tilpasse en modell som relaterer responsverdien til predikatoren verdi (James et al., 2017).

I ikke-veiledet læring, derimot, har man tilgang på inngangsverdier, men det er ingen utgangsverdier som veileder resultatet. Altså, observeres kun inngangsverdiene, men det er ingen mål på utgangsverdien. Vi har dermed at for hver vektor $i = 1, \dots, n$, observerer vi en vektor av mål, men ingen tilhørende respons y_i . Modellene i ikke-veiledet læring forsøker å gjenkjenne mønster i dataen, og man snakker gjerne om klynger (“clustering”) for ikke-veiledet maskinlæring, for eksempel å gruppere selskap basert på regnskapsnummer. Det er dermed ikke mulig å tilpasse en lineær regresjonsmodell til denne dataen (Hinton og Sejnowski, 1999; Roman, 2019).

Studiet baserer seg på veiledet læring, og veiledede maskinlæringsproblemer kan videre klassifiseres som regresjon eller klassifiseringsproblemer. Klassifiseringen for veiledet maskinlæring skjer på bakgrunn av responsvariablene. Problemer med en kvantitativ respons refereres ofte til som regresjonsproblemer. Kvantitative variabler tar numeriske verdier, slik som pris eller høyde. Klassifiseringsproblemer, derimot, er problemer som har kvalitative responsvariabler. De kvalitative variablene tar verdier i en av K forskjellige klasser eller kategorier, som for eksempel “sykdom” og “ikke sykdom” relatert til en pasient, eller “opp” og “ned” relatert til aksjepriser (James et al., 2017; Mohri et al., 2012). Med hensyn til studiets tema og problemstilling, er et klassifiseringsproblem foretrukket, da klassifiseringsproblemer har vist seg å føre til bedre resultater enn

regresjonsproblemer på finansielle problemstillinger (Enke og Thawornwong, 2005; Leung et al., 2000).

Avhengig av om formålet er å predikere eller forstå Y , er det ulike teknikker som egner seg best for å estimere f . Jo mer kompleks en teknikk er, desto vanskeligere er det å forklare og forstå resultatene. Når inferens er målet, er det dermed klare fordeler ved å bruke de enklere, men mindre fleksible metodene, da disse er enklere å tolke. Når man kun er interessert i prediksjon, derimot, er ikke fortolkningen av modellen av interesse, og dermed kan mer fleksible modeller gi gode resultater. Dette er likevel ikke alltid tilfellet, da de mer fleksible modellene har større sannsynlighet for overtilpassing, som oppstår når mønstre i data forårsaket av støy plukkes opp av modellen. Ved overtilpassing vil ikke modellen være nøyaktig for observasjoner som ikke var en del av det opprinnelige treningssettet.

3.2.1 Måling og modelltilpasning

Det er ikke én metode som dominerer de andre metodene, så en viktig del av prosessen er dermed å bestemme hvilken metode som gir best resultat for den valgte dataen. For å måle hvor godt en modell presterer må man måle hvor godt prediksjonene matcher den observerte dataen. I forbindelse med måling og modelltilpasning introduseres begrepene trenings- og testdata, eller trenings- og testobservasjoner. Treningsdata er observasjonene som brukes under tilpasningen av modellen, gjerne kalt trening av modellen, mens testdata består av de observasjonene som holdes ute ved tilpasning av modellen. Testdata benyttes dermed for å undersøke hvordan modellen presterer når den anvendes på ukjent data. For modeller har man dermed uttrykk for nøyaktighet både med hensyn til treningsdata og testdata.

Dersom vi ønsker å estimere f på bakgrunn av treningsobservasjonene $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, hvor y_1, \dots, y_n er kvalitative variabler, er den mest vanlige formen for å tallfeste nøyaktigheten til estimatet \hat{f} treningsfeilraten, altså andelen feil dersom vi benytter estimatet \hat{f} på treningsobservasjonene:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(y_i \neq \hat{y}_i) \quad (13)$$

Hvor \hat{y}_i er den predikerte klassen for observasjon nummer i ved bruk av \hat{f} , og $I(y_i \neq \hat{y}_i)$ er en indikatorvariabel som er lik 1 dersom $y_i \neq \hat{y}_i$ og 0 dersom $y_i = \hat{y}_i$. Dersom indikatorvariabelen tar verdien 0 for observasjon nummer i ble observasjon klassifisert korrekt, mens 1 tilsier en misklassifisering. Ligning 13 beregner dermed andelen misklassifiseringer, og refereres til som feilraten til treningsobservasjonene da den beregnes på bakgrunn av data benyttet i treningen.

Da feilraten fra ligning 13 kun gir et tall på treningsnøyaktigheten, er man gjerne mer interessert i å teste nøyaktigheten av prediksjonene når vi bruker metoden på ubrukt testdata. Feilraten for testobservasjoner av formen (x_0, y_0) er dermed gitt ved:

$$Ave(I(y_0 \neq \hat{y}_0)) \quad (14)$$

Hvor \hat{y}_0 er den predikerte klassen ved å benytte \hat{f} på den tidligere ubrukte predikatoren x_0 .

Et godt estimat på f må dermed utformes slik at testfeilen blir lavest mulig. For å minimere forventet feilrate for testobservasjoner er det viktig å velge en modell som både gir lav varians og lav skjevhet.

Varians refererer til hvor mye \hat{f} endrer seg dersom den estimeres ved bruk av et annet datasett for treningen. En høy varians betyr at små endringer i treningsdata kan føre til store endringer i \hat{f} . Generelt sett har mer

flexible metoder høyere varians. *Skjevhet* refererer til feilen som inntreffer ved å forsøke å lage en tilnærming til et komplisert virkelig problem ved bruk av en mindre kompleks modell. For eksempel antas det i lineær regresjon at det eksisterer et lineær forhold mellom variablene. Det er derimot lite sannsynlig at et forhold på denne enkle, lineære formen eksisterer i et virkelig problem, slik at lineær regresjon vil resultere i skjevhet i estimatet av f (Munro et al., 2011).

Dersom en metode gir en lav trenings-feilrate, men høy test-feilrate, kan dette indikere at dataene er overtilpasset. Dette skjer ved at modellen har observert mønster som er forårsaket av tilfeldigheter og dermed ikke er egenskaper ved den ukjente funksjonen f . Ved overtilpassing av treningsdata vil derfor test-feilrate være stor på grunn av at mønstrene fra treningsdataen ikke eksisterer i testdataen. Generelt sett vil test-feilrate være større enn trenings-feilrate, men overtilpassing refererer spesifikt til tilfeller hvor mindre fleksible modeller ville ha gitt en lavere feilrate. Undertilpassing er tilfellet når en modell behandler egenskaper ved den ukjente funksjonen f som støy. Dette vil gi utslag ved at modellen gir dårlige resultater for både trenings- og testdata.

3.3 Beslutningstrær

Tre-baserte metoder involverer å stratifisere eller segmentere prediksjonsområdet i flere enkle regioner. For å kunne gjøre en prediksjon for en gitt observasjon brukes typisk gjennomsnittet eller modalverdien for treningsobservasjoner i regionen de tilhører.

3.3.1 Bagging

Bagging ble først introdusert av Breiman (1994), og er en generell prosedyre brukt for å redusere variansen til en statistisk læringsmetode. Metoden går ut på å generere flere versjoner av en predikator. Disse benyttes videre for å få en samlet predikator ved gjennomsnittet av versjonene når en numerisk utgangverdi predikeres, og bestemmes av flertallet når den predikerer tilhørighet til en klasse.

Bagging er en forkortelse for bootstrap aggregation, da de ulike versjonene dannes ved å lage bootstrap-replikasjoner av treningssettet, og benytte disse som nye treningssett. Metoden bootstrapping ble først introdusert av Efron (1979) og videre utviklet i en senere publisering (1987). Ideen bak metoden er at et utvalg av en populasjon inneholder all tilgjengelig informasjon om den underliggende distribusjonen. Videre vil gjentatt trekking med tilbakelegging fra utvalget dermed være den beste tilnærmingen til å trekke gjentatte utvalg fra distribusjonen.

Gitt et sett av n uavhengige observasjoner Z_1, \dots, Z_n , hver med varians σ^2 , så vil variansen til gjennomsnittet \bar{Z} av observasjonene være gitt som σ^2/n . Med andre ord vil man ved å bruke gjennomsnitt av et sett observasjoner kunne redusere varians. En naturlig metode for å redusere varians og dermed øke prediksjonsnøyaktigheten for en modell er dermed å ta mange treningssett fra populasjonen, bygge separate prediksjonsmodeller for hvert sett, og beregne gjennomsnittet av de resulterende prediksjonene (James et al., 2017).

Med andre ord kan vi beregne $\hat{f}^1(x), \hat{f}^2(x), \dots, \hat{f}^B(x)$ ved bruk av B ulike treningssett, og beregne gjennomsnittet av dem for å få en statistisk modell med lav varians gitt ved

$$\hat{f}_{avg} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{f}^b(x) \quad (15)$$

Siden man gjerne ikke har tilgang på flere treningssett kan bootstrap benyttes, altså trekking med tilbakelegging, for å ta gjentatte utvalg fra treningsdatasettet. Ved denne tilnærmingen genereres dermed B ulike bootstrapped treningssett, slik at vi får

$$\hat{f}_{bag} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{f}^{*b}(x) \quad (16)$$

Bagging kan forbedre prediksjoner for mange ulike regresjonsmetoder, men er spesielt nyttig for beslutnings-trær, og har vist seg å gi forbedringer i nøyaktighet ved å kombinere hundrevis, eller tusenvis, av trær i en enkelt prosedyre.

3.3.2 Random Forest

Den første algoritmen for “random decision forest” ble presentert av Ho (1995), som senere har skrevet flere artikler om metoden “the random subspace” som utfører tilfeldig utvelgelse fra et utvalg faktorer brukt for dyrke hvert tre (Ho, 1998). En utvidelse ble presentert av Breiman (2001), også inspirert av Amit og Geman (1997) som introduserte ideen om å søke gjennom et tilfeldig utvalg av tilgjengelige beslutninger ved splitting av beslutningstrær. I denne utvidelsen fremkommer det at Random Forest benytter seg av bagging til å kombinere en gruppe av beslutningstrær for å redusere varians og effekten av støy (Breiman, 2001).

Metoden er en forbedring av bagging gjennom endringer som *dekorrelerer* trærne. Som i bagging bygges modellen ved å generere et antall beslutningstrær på bootstrapped treningsutvalg. Forskjellen kommer av at når disse beslutningstrærne bygges vil et tilfeldig utvalg av m prediktorer bli valgt som splittkandidater fra det fulle utvalget av p prediktorer hver gang splitting vurderes. Splittingen kan videre kun benytte seg av en av disse m predikatorene. En nytt utvalg av m prediktorer velges dermed ved hver splitting, og m velges typisk slik at $m \approx \sqrt{p}$. Altså er antallet prediktorer ved hver splitting omtrent lik kvadratroten av det totale antallet prediktorer.

Med andre ord; når en Random Forest bygges har ikke algoritmen mulighet til å vurdere størsteparten av de tilgjengelige predikatorene. Dette har den fordel at en veldig sterk prediktor ikke vil kunne bli valgt i alle trærne, slik at man ikke får flere veldig like trær som dermed vil gi høyt korrelerte prediksjoner. Gjennomsnittet av mange høyt korrelerte kvantiteter vil ikke gi en like stor reduksjon i variasjon som det gjennomsnittet av mange kvantiteter som ikke er korrelerte gjør. Ved at Random Forest tvinger hver splitt til kun å vurdere et utvalg av prediktorene unngås problemer med korrelasjon. I gjennomsnittet vil $(p - m)/p$ av splittene ikke engang vurdere den sterke predikatoren, slik at andre, svakere, prediktorer har en sjans. Denne prosessen kan tenkes på som en «dekorrelering» av trærne, som dermed gjør gjennomsnittet av de resulterende trærne mindre variable og derav mer troverdige.

Forskjellen mellom bagging og Random Forest er dermed valget av størrelsen på utvalget prediktorer, m . Det vil si at dersom en random forest bygges med $m = p$ vil resultatet være likt som ved bagging.

3.3.2.1 Splittkriteriet

For random forest vurderes utvalget m prediktorer ved hver splitting av et enkelt beslutningstre. Når flere enn en prediktor tar del i beslutningsprosessen er det nødvendig å avgjøre hver prediktors relevans og viktighet, for å best mulig kunne komme frem til hvilken klasse observasjoner tilhører.

Beslutningstrær dyrkes altså ved å avgjøre spørsmålene, kalt splitter eller noder, som ved å besvares fører til en sikrere klassifisering. For å avgjøre hvilke av de m tilgjengelige predikatorene som skal benyttes i splittingsen brukes splittkriteriet *Gini Impurity*, som er et mål på sannsynligheten for en ukorrekt klassifisering dersom en tilfeldig observasjon i datasettet klassifiseres i henhold til datasettets klassedistribusjon.

Gini impurity for splitt k er gitt ved

$$I_G(k) = \sum_{i=1}^C P(i) \cdot (1 - P(i)) = 1 - \sum_{i=1}^C (P_i)^2 \quad (17)$$

Hvor C er antallet klasser, og $P(i)$ er sannsynligheten for at den tilfeldig valgte observasjon er av klasse i og $\sum_{i=1}^C P(i) = 1$.

Ved hver splitt søkes det etter den tilgjengelige predikatoren som fører til den største reduksjonen i Gini Impurity, slik at nivået av Gini Impurity må reduseres for hvert nivå av beslutningstreet. Denne prosessen fortsetter til beslutningstreet når maks dybde, altså til det ikke er flere variabler igjen som reduserer Gini Impurity, eller til hver splitt kun inneholder en klasse. Gini Impurity anser dermed et utvalg som "rent" dersom alle observasjonene i utvalget tilhører samme klasse. I et slikt tilfelle når Gini Impurity sitt minimumsnivå på 0. For et beslutningstre beregnes Gini Impurity for hver splitt, og treet når dermed beste splitt dersom hvert alternativ fra splitten er av samme klasse.

4 Data og metode

Dette kapitlet redegjør for studiets datamateriale og datainnsamling, og beskriver videre den metodiske fremgangsmåten for studiet. Som nevnt innledningsvis vil studiets metode i stor grad følge de metodiske rammene gitt ved forskningen til Tan et al. (2019).

Studiets metode består av fem deler:

1. Dataen for studiet må først samles inn, kombineres og ryddes.
2. Datasettet splittes i flere delperioder, bestående av trening- og tradingsett. Treningssettene benyttes i konstruksjonen av modellen, mens tradingsettene benyttes for å teste modellen på ukjent data.
3. Funksjonsområdene og responsvariabelen for modellen konstrueres. Funksjonsområdene består av inngangsverdier som behøves i konstruksjonen av modellen og for videre prediksjoner. For å undersøke hvor robust RF-modellen er i det norske aksjemarkedet, konstrueres det totalt tre funksjonsområder for å kunne undersøke resultater for både kort og lang fremtidsperiode.
4. Modellen trenes ved bruk av treningssettene.
5. Den trente modellen brukes for å predikere ved bruk av de korresponderende tradingsettene, og prediksjonene benyttes videre for å konstruere porteføljer.

Videre vil stegene skissert ovenfor utdypes.

4.1 Data

For å bygge videre på tidligere forskning relatert til aksjeutvelgelse og prisprediksjon, som i stor grad baserer seg på likvide og effisiente markeder, og særlig aksjer på S&P500-indeksen, tar studiet for seg det norske aksjemarkedet. Oslo Børs er til sammenligning et mindre likvid marked, og antas dermed å kunne være mindre effisient.

Studiet dekker alle selskap listet på Oslo Børs, og daglig aksjedata hentes fra databasen Titlon. Det nedlastede datasettet inneholder prisnoteringer, handelsvolum, totalt antall aksjer og markeds kapital for alle aksjer som er, eller har vært, på børsen, slik at datasettet ikke innehar survivorship bias. I tillegg til aksjedata, lastes også regnskapsdata for selskapene ned fra Titlon. Ved kombinerings av aksjedata og regnskapsdata skiftes regnskapsdataen slik at datasettet reflekterer den informasjon som er tilgjengelig for investorer på tidspunktet, altså vil regnskapsdata for år 20XX knyttes til aksjepriser for år 20XX+1. Med bakgrunn i valgt datamateriale er Oslo Børs hovedindeks, OSEBX, valgt som referansepunkt, da indeksen skal inneholde et representativt utvalg av alle noterte aksjer på Oslo Børs. Prisinformasjon for indeksen hentes fra Titlon, og inneholder daglige sluttprisnoteringer.

Studiets datamateriale begrenses slik at aksjer som handles til under 5NOK ikke vurderes i modellen, da disse aksjene i større grad påvirkes av mikrostrukturellt støy, og små endringer i aksjens pris vil kunne gi store utslag. Dette steget vil dermed begrense potensielt ekstrem avkastning. For datasettet innebærer dette at alle aksjer som til enhver tid faller under 5NOK, vil fjernes for perioden hvor prisen er under minimumsnivået.

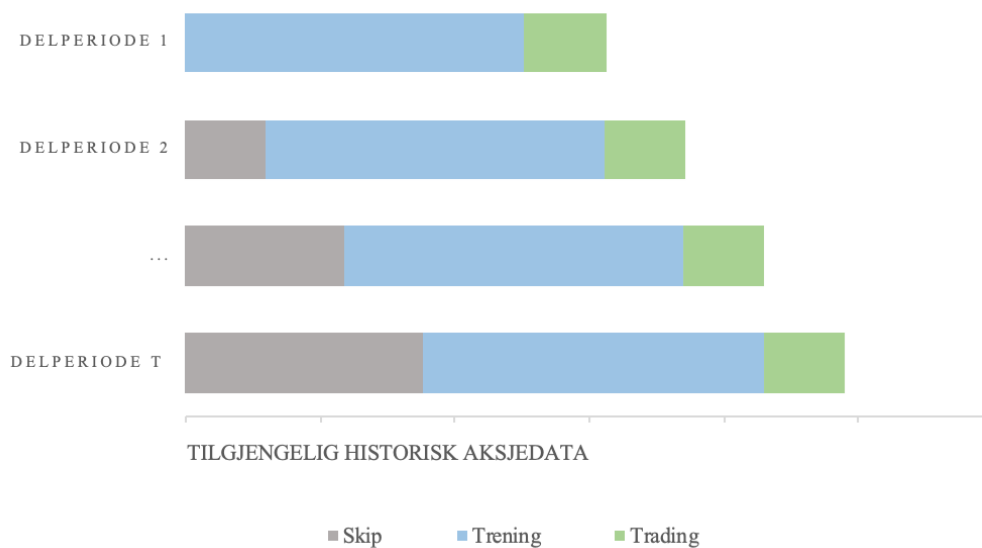
For beregninger som krever risikofri rente, anvendes renten på norske statsobligasjoner med 10 års løpetid. Ved årlige gjennomsnittsberegninger vil den gjennomsnittlige renten for den relevante perioden beregnes.

4.1.1 Oppdeling av datasettet

Det totale datasettet består av data for perioden 02.01.2009 - 28.06.2019, altså i overkant av 10 år. Datasettet deles videre inn i delperioder for trening og trading, normalt kalt testing når formålet er å avgjøre hvor nøyaktig modellen predikerer. Oppdelingen av datasettet sørger for at modellen trenes på tidsperioder i tilknytning til tradingperioden, da markedsf forholdene ikke kan antas å være tilsvarende over hele perioden.

Maskinlæringsproblemer benytter tradisjonelt former for dataoppdeling hvor datasettet splittes tilfeldig i deler for trening og testing. Denne formen for datasplitting forutsetter at det ikke eksisterer et forhold mellom ulike observasjoner, altså at de ulike observasjonene er uavhengige av hverandre. For å hensynta at aksjedata er tidsseriedata, og dermed avhenger av observasjonenes tidsdimensjon, må dataen splittes på en slik måte at den tidsmessige rekkefølgen hensyntas.

Evaluering og trening av tidsseriedata gjennomføres ved bruk av en form for backtesting, hvor datasettet deles i glidende perioder, som illustrert i figur 4.1. Modellen vil for hver delperiode trenes på 252 sammenhengende observasjoner, ca ett år, etterfulgt av en 60 dagers tradingperiode. Deretter forflyttes neste treningsperiode, slik at ingen av tradingperiodene har overlappende data og dataene fra tradingperioden dermed er ukjent for den trente modellen. En periode bestående av trening og trading inneholder dermed 312 børsdager, slik at det etter konstruksjon av variabler og første treningsperiode trades i perioden 14.12.2010 til 30.04.2019.

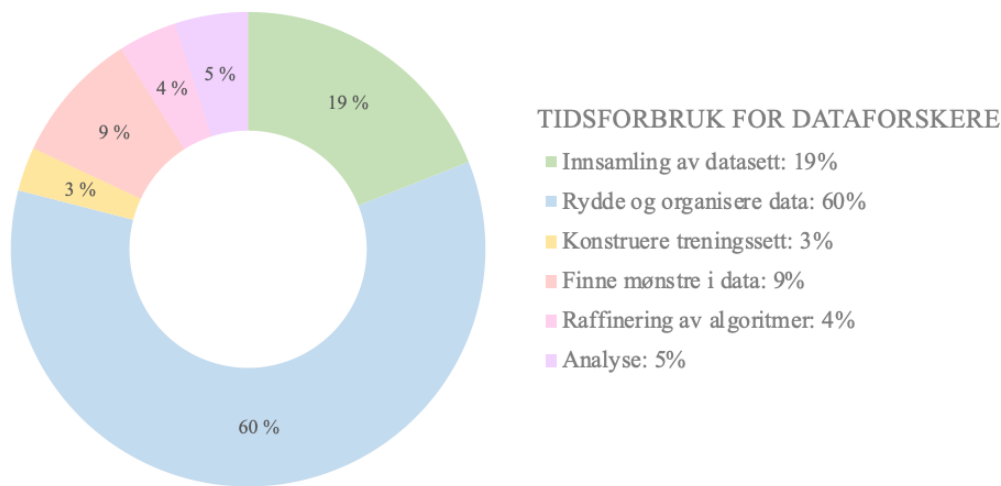


Figur 4.1: Glidende trenings- og tradingperioder

4.1.2 Programmering

Preprosessering og datahåndtering gjennomføres ved bruk av programvaren R, som er et programmeringsspråk for statistisk databehandling (R Development Core Team 3.0.1., 2013). Språket R er mye brukt av statistikere og datautviklere for utvikling av statistisk programvare og dataanalyse.

Innsamling og kombinerende av ulike datasett, rydding og dataforberedelser utgjør en tidsmessig stor andel av studiets omfang. Den største delen av tid går dermed til å omstrukturere og tilpasse nedlastet data, slik at dataen er tilpasset studiets formål og dermed er mulig å benytte for modelltilpasning og videre analyse. I løpet av datatilpasningen går dataens størrelse fra 32.8 millioner datapunkter, til et sluttdatasett bestående av 15.2 millioner datapunkter. En undersøkelse blant dataforskere utført av CrowdFlower og publisert i Forbes (2016) understreker at databehandling står for omtrent 80% av arbeidsmengden for forskning på store datasett, med 60% av tiden brukt på rydding og organisering av data, og 19% på innsamling av data. Resultatene fra undersøkelsen er oppsummert i Figur 4.2.



Figur 4.2: Tidsbruk ved forskning på store datamaterialer (Forbes 2016)

Etter at den innsamlede dataen er klargjort, implementeres modellen benyttet i studiet, *Random Forest*, ved bruk av pakken *caret*, som tilbyr funksjoner for å effektivisere maskinlæringsprosessen (Kuhn, 2019). For evaluering av porteføljeprestasjon brukes flere funksjoner fra pakken *PerformanceAnalytics* av Peterson og Carl (2018).

4.2 Konstruksjon av variabler og funksjonsområder

Variablene for bruk i modellen konstrueres ved bruk av nedlastet data.

Responsvariabelen konstrueres som en klassifiseringvariabel på bakgrunn av litteratur som antyder at klassifiseringsproblemer presterer bedre enn regresjonsproblemer på prediksjon av data fra finansielle markeder (Enke og Thawornwong, 2005; Leung et al., 2000). Videre baseres responsvariabelen på aksjenes fremtidige meravkastning, som i henhold til problemstillingen defineres som avkastningen ut over hovedindeksens avkastning. Studiet predikerer dermed sannsynligheten $Prob_{t+m|t}^s$ for at hver aksje s slår avkastningen til benchmarken ved enden av holdeperioden, $t+m$.

For å konstruere responsvariabelen lar vi $P^s = (P_t^s)_{t \in T}$ betegne sluttkursprosessen for aksje s hvor $s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ved tid t kan dermed fremtidig avkastning for hver aksje, $R_{t,m}^s$, og OSEBX, $R_{t,m}^I$, over de påfølgende m holdedagene beregnes, illustrert i ligning 18 og 19.

$$R_{t,m}^s = \log\left(\frac{P_{t+m}^s}{P_t^s}\right) \quad (18)$$

$$R_{t,m}^I = \log\left(\frac{P_{t+m}^I}{P_t^I}\right) \quad (19)$$

Vi får da at fremtidig meravkastning, $ER^S = (ER_t^s)_{t \in T}$, er forskjellen mellom aksjeavkastning og indeksavkastning, som vist i ligning 20.

$$ER_{t,m}^s = R_{t,m}^s - R_{t,m}^I \quad (20)$$

På bakgrunn av fremtidig meravkastning rangeres aksjene i fallende rekkefølge, og splittes i N klasser basert på rangeringen. Klassene $\{1, \dots, n\}$ fungerer dermed som responsvariabler i treningsmodellen.

For å undersøke lønnsomheten ved en faktorbasert aksjeutvelgelse i det norske markedet konstrueres funksjonsområder som består av faktorer som antas å kunne ha en forklarings effekt på aksjeavkastning. Det første funksjonsområdet består av fundamentale og tekniske faktorer som kan gi langsiktig meravkastning, og tildeles en holdeperiode på 20 dager, omtrent lik en måned. Deretter videreutvikles dette funksjonsområdet for å tilpasses en kortere holdeperiode, i tillegg til at det konstrueres et rent momentumsområde, bestående av momentumfaktorer med ulik tidsforskyvning. Det videreutviklede kombinerte funksjonsområdet, samt det rene momentumsområdet, testes begge med en holdeperiode på en dag.

Funksjonsområdene konstrueres for hele datasettet, slik at vi får funksjonsområdet som input for modellen. For modellen basert på funksjonsområde med tekniske og fundamentale faktorer, lages inputverdiene som en dataramme. Datarammen kan sees på som en $u \times v$ -matrise, hvor u er utvalgsstørrelsen, gitt ved antall omsettelige aksjer multiplisert med dager med data og v er antallet faktorer. Modellen bestående av et rent momentumsområde følger samme fremgangsmåte, hvor u er utvalgsstørrelsen, og v er antallet momentumfaktorer.

4.2.1 Fundamentale og tekniske faktorer

Fundamentale faktorer

De fundamentale faktorene brukt i modellen er samlet i tabell 4.1, og utgjør det fundamentale funksjonsområdet.

Faktor	Navn	Forklaring
P/E	Rate mellom pris og fortjeneste	Avgjør om aksjer er korrekt verdsatt i relasjon til hverandre
P/B	Rate mellom pris og bokført verdi	Brukt for å sammenligne en aksjes nåværende markedsverdi med bokført verdi
ROA	Avkastning på eiendeler	Viser, i prosent, hvor lønnsomme et selskaps eiendeler er når det kommer til å skape inntekter
ROE	Avkastning på egenkapital	Brukt for å måle hvor godt et selskap bruker investeringer for å skape inntektsvekst
Market cap	Markedskapital	Reflekterer hvor mye penger som tjenes, og størrelsen på listede selskap

Tabell 4.1: Fundamentale faktorer

Faktorene er valgt basert på tidligere bevist prisseffekt i litteraturen, som utdypt i følgende forklaringer.

Pris/fortjeneste-raten (Basu, 1983), P/E, kan gi indikasjoner på forventninger og om en aksje er over- eller underpriset. Generelt vil en høy P/E kunne bety at aksjeprisen øker raskere enn inntjeningene på bakgrunn av fremtidsforventninger, men kan også være et tegn på at en aksje er overpriset. Raten er gitt ved:

$$P/E = \frac{\text{aksjepris}}{\text{fortjeneste per aksje}} \quad (21)$$

Pris/Bok-raten forteller om relasjonen mellom aksjepris, eller markedspris, og bokført verdi på en aksje (selskap). Generelt vil en lavere P/B indikere at selskapet er undervurdert (Brennan et al., 1998). Pris/bok-raten er gitt ved:

$$P/B = \frac{\text{aksjepris}}{\text{bokført verdi per aksje}} \quad (22)$$

Egenkapitalavkastningen, ROE, brukes ofte for å vurdere selskapers lønnsomhet. Generelt vil en høyere ROE indikere at selskapet er mer lønnsomt relativt til selskaper med lavere ROE, og tilsvarende vil en økende ROE indikere økende lønnsomhet (Chen et al., 2011). ROE er gitt ved:

$$ROE = \frac{\text{resultat}}{\text{egenkapital}} \quad (23)$$

Avkastning på eiendeler, ROA, brukes for å få et bilde av i hvor stor grad et selskap er i stand til å omgjøre investeringer i blant annet eiendeler og prosjekter til fortjeneste, og måler dermed, i likhet med ROE, hvor lønnsomt selskapet er. ROA er gitt ved:

$$ROA = \frac{\text{resultat}}{\text{eiendeler}} \quad (24)$$

Tekniske faktorer

Det fundamentale funksjonsområdet kombineres med det tekniske funksjonsområdet, slik at vi får et kombinert funksjonsområde for begge typer faktorer. Det tekniske funksjonsområdet består av tekniske faktorer som kan påvirke prisdynamikken i den valgte holdeperioden, og er konstruert ut ifra fremgangsmåten til Tan et al. (2019). Faktorene tar utgangspunkt i innsamlet data relatert til pris, volum og omsetning, hvor omsetning beregnes som forholdet mellom daglig handelsvolum og omsettelige aksjer. Det tekniske funksjonsområdet, med faktorene som inngår i det, er illustrert og forklart i tabell 4.2.

Faktor	Forklaring	Formel
turnover_20, turnover_40 turnover_60, turnover_120 turnover_240	Det glidende gjennomsnittet til omsetningen over en gitt periode	$rollapplyr(turnover, m, mean)$ $m \in \{20, 40, 60, 120, 240\}$
close0/close9, close0/close19, close0/close39, close0/close59, close0/close119	Viser momentum med forskjellige tidsforskyvninger, og benyttes for å identifisere trender i prisprosessen	$\frac{P_t}{P_{t-m}}$ $m \in \{9, 19, 39, 59, 119\}$
close19/close0, close39/close0, close59/close0, close119/close0	Reversering av momentum	$\frac{P_{t-m}}{P_t}$ $m \in \{19, 39, 59, 119\}$
close19/close59 close19/close119	Viser til momentum med forskjellig tidsforskyvning, med unntak av den nyligste måneden	$\frac{P_{t-19}}{P_{t-m}}$ $m \in \{59, 119\}$
vol10/vol20, vol10/vol40, vol10/vol60, vol20/vol40, vol20/vol60, vol40/vol60	Viser til akselerasjonshastigheten til en aksjes volum og benyttes for å identifisere trendlinjer for volum	$\frac{rollapplyr(volume, m1, mean)}{rollapplyr(volume, m2, mean)}$ $m1 \in \{10, 10, 10, 20, 20, 40\}$ $m2 \in \{20, 40, 60, 40, 60, 60\}$
volatility_10, volatility_20, volatility_40, volatility_60, volatility_120	Volatiliteten over de m siste tradingdagene, beregnet som standardavviket til den daglige avkastningen	$rollapplyr(return, m, sd)$ $m \in \{10, 20, 40, 60, 120\}$
std_vol10, std_vol20, std_vol40, std_vol60, std_vol120	Standardavviket til tidsserien av handelsvolum over de m siste tradingdagene	$rollapplyr(volume, m, sd)$ $m \in \{10, 20, 40, 60, 120\}$

Tabell 4.2: Tekniske faktorer

4.2.2 Videreutviklet funksjonsområde for kort holdeperiode

I tillegg til det kombinerte funksjonsområdet fra tabell 4.1 og 4.2 utvides de tekniske faktorene for å bedre kunne fange opp prisdynamikken for den korte holdeperioden. De utvidede faktorene er listet i tabell 4.3, og følger fremgangsmåten forklart i tabell 4.2.

Faktor	Utvidelse	Formel
Turnover	turnover_2, turnover_4, turnover_6 turnover_8, turnover_10	$rollapplyr(turnover, m, mean)$ $m \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$
Momentum	close0_close3, close0_close6	$\frac{P_t}{P_{t-m}}$ $m \in \{3, 6\}$
Momentumreversering	close6_close0, close3_close0	$\frac{P_{t-m}}{P_t}$ $m \in \{3, 6\}$
Volatilitet	volatility_2, volatility_4, volatility_6, volatility_8	$rollapplyr(return, m, sd)$ $m \in \{2, 4, 8\}$
Volum	vol2_vol10, vol4_vol10 vol6_vol10, vol8_vol10	$\frac{rollapplyr(volume, m1, mean)}{rollapplyr(volume, m2, mean)}$ $m1 \in \{2, 4, 6, 8\}, m2 \in \{10, 10, 10, 10\}$
Standardavvik volum	std_vol2, std_vol4, std_vol6, std_vol8	$rollapplyr(volume, m, sd)$ $m \in \{2, 4, 6, 8\}$

Tabell 4.3: Utvidelse av tekniske faktorer

4.2.3 Momentumsfaktorer

Momentum som en faktor for aksjeklassifisering og tradingstrategier har blitt omfattende dokumentert i akademisk litteratur, med bevis for vedvarende unormal meravkastning demonstrert på tvers av flere aktivaklasser, horisonter og tidsperioder (Carhart, 1997; Hou et al., 2011; Hurst et al., 2017; Jegadeesh og Titman, 1993b; Moskowitz et al., 2012). Ved bruk av avanserte maskinlæringsteknikker kan momentumbasert prestasjon forbedres ved en rekonstruksjon av momentumsområdet (Krauss et al., 2017).

Et rent momentumsområde konstrueres dermed i tillegg til det kombinerte fundamentale/tekniske funksjonsområdet. Oppbygningen av momentumområdet følger fremgangsmåten benyttet av Takeuchi og Lee (2013) og Krauss et al. (2017), som beskrevet i ligning 25:

$$Mom_{t,m}^s = \frac{P_t^s}{P_{t-m}^s} \quad (25)$$

Hvor $m \in \{\{1, \dots, 20\} \cup \{40, \dots, 240\}\}$ oppgitt i antall dager.

Momentumområdet fokuserer dermed først på prisendringene for de forrige 20 børsdagene, omtrent en børs måned, og ser deretter på prisendringene tilbake til de 11 månedene før dette. Totalt sett tar dermed momentumområdet for seg hvordan aksjeprisene endres i løpet av ett børsår, med omtrent 240 dager, og består av 31 faktorer. Med en holdeperiode på en børsdag benyttes momentumområdet for å teste den kortsiktige klassifiseringseffektiviteten i det norske aksjemarkedet.

4.2.4 Manglende verdier i datasett

Før konstruksjonen av variabler og funksjonsområder inneholder datasettet manglende verdier for enkelte av variablene som benyttes i konstruksjonen. Manglende verdier i datasettet må håndteres, da RF-algoritmen ikke er i stand til å predikere dersom det eksisterer manglende verdier i responsvariabelen eller inngangsverdiene. Der det er hensiktsmessig settes dermed manglende verdier lik forrige observerte verdi. Eventuelle manglende verdier ut over dette håndteres ved å sette verdien lik null der det ikke forstyrrer eller skaper feil i datasettet, og ellers fjernes observasjoner med manglende verdier i sin helhet.

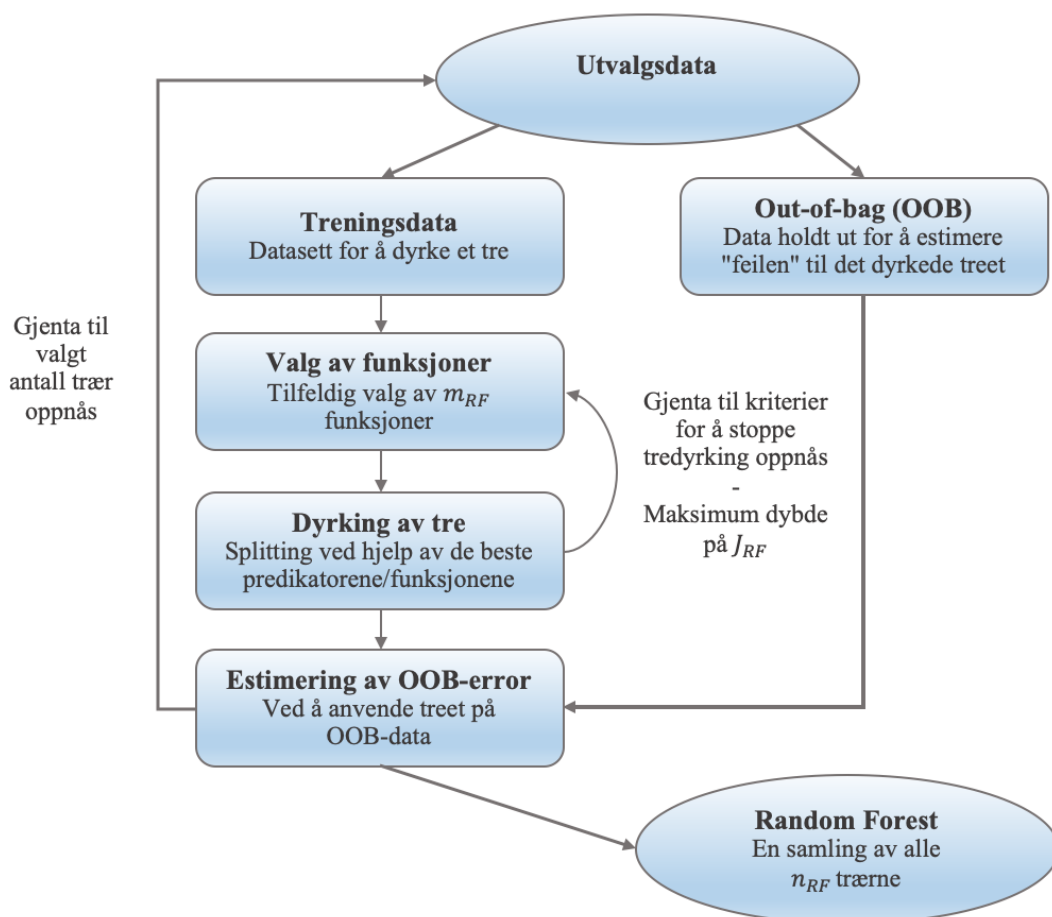
I tillegg til manglende verdier i det nedlastede datasettet mister det totale datasettet de første 240 observasjonene for hver aksje på bakgrunn av konstruksjonen av variablene i funksjonsområdene. De siste 20 observasjonene forsvinner som følge av konstruksjon av klassene som baserer seg på fremtidig meravkastning for det fundamentale/tekniske funksjonsområdet, og den siste observasjonen for det videreutviklede kombinerte funksjonsområdet og momentumsområdet.

4.3 Random Forest modellering

Konstruksjonen av Random Forest-modellen følger den originale modellen gitt ved Breiman (2001), og den tekniske utførelsen foregår ved bruk av pakken *ranger* i R. Av utviklerne beskrives *ranger* som en hurtig implementering av Random Forest for høydimensjonell data.

Fra kapittel 3.3.2 har vi at en Random Forest i prinsipp består av flere ukorrelerte beslutningstrær bygget på ulike utvalg av data. Algoritmen som benyttes for å bygge en Random Forest er illustrert i figur 4.3. Av figuren ser vi at for hvert av trærne i modellen dras først et tilfeldig utvalg fra treningsdataen. Videre dyrkes et beslutningstre for dette utvalget, hvor det tilfeldig velges m_{RF} faktorer av de p tilgjengelige faktorene ved hver splitting, og treet dyrkes til maksimum dybde på J_{RF} . Dette resulterer i et ensemble av n_{RF} Random Forest-trær som utfører klassifisering basert på en majoritetsstemme fra trærne.

En viktig funksjon ved RF er out-of-bag-feilen (OOB-feil). Det fungerer ved at hver observasjon er en OOB-observasjon for noen av trærne, altså at observasjonen ikke ble brukt for å konstruere trærne og kan dermed brukes som en form for intern validering. OOB-feilen for RF-modellen er dermed den gjennomsnittlige feilfrekvensen som oppnås når observasjoner fra datasettet predikeres ved bruk av trær hvor observasjonene er OOB, altså ikke brukt i konstruksjonen. Denne interne valideringen gjør at feilestimatene er mindre optimistiske, og dermed ofte ansett som gode estimater på forventet feil for uavhengig data(testdata).



Figur 4.3: Random Forest algoritme

Modellen består av tre parametere som kan varieres, og som dermed må bestemmes; antallet trær, n_{RF} , maksdybden på trærne, J_{RF} , og antallet faktorer ved hver splitting, m_{RF} . Den originale websiden for random forest-algoritmen antyder at Random Forest ikke overtilpasser, og at det dermed kan bygges så mange trær som ønskelig (Breiman, udatert). Det velges derfor typisk et stort antall trær, med en standardverdi på $n_{RF} = 500$ for pakken *ranger* i R. Målet med å benytte et stort antall trær er at hver funksjon/predikator skal ha muligheten til å bli benyttet i flere trær. For maksdybde på trærne følges pakkens standardinnstilling, slik at trærne kan ha ubegrenset dybde. Antallet faktorer som vurderes ved hver splitting velges normalt slik at $m_{RF} = \sqrt{p}$ ved klassifisering (James et al., 2017).

4.3.1 Prediksjon, rangering og porteføljekonstruksjon

For hver tradingperiode predikeres sannsynlighetene $\widehat{Prob}_{t+m|t}^s$ for hver aksje s til å prestere bedre enn hovedindeksen OSEBX over de følgende m holdedagene. Ved hver rebalanseringsdag velges de 10 aksjene med høyest sannsynlighet for å tilhøre den øverste klassen til en likevektet portefølje. I litteraturen har likevektede porteføljer vist seg å kunne prestere bedre enn optimaliserte porteføljer, og en likevektet portefølje velges dermed av hensyn til porteføljens hyppige rebalanseringer (DeMiguel et al., 2009). Aksjene som velges til

porteføljen holdes for den gitte perioden før porteføljen fornyes basert på neste sannsynlighetsrangering.

Porteføljeverdi før transaksjonskostnader

Ved begynnelsen av hver holdeperiode kjøpes 10 aksjer til sluttkurs første tradingdag, og porteføljen justeres tilsvarende. Aksjene velges basert på prediksjonene fra RF-modellen, slik at aksjene med høyest sannsynlighet for å kunne plasseres i høyeste klasse basert på fremtidig meravkastning velges. Basert på dette kan porteføljens verdi, sett bort fra transaksjonskostnader, beregnes som:

$$\begin{aligned} V_t &= V_{t-1} + \sum_{s=0}^{10} (V_{t-1} \cdot w_{t-1,s} \cdot r_{t,s}) \\ &= V_{t-1} \left(1 + \sum_{s=0}^{10} w_{t-1,s} \cdot r_{t,s} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Hvor:

V_t er porteføljens verdi ved holdeperiodens slutt, tid t

V_{t-1} er porteføljens verdi ved holdeperiodens begynnelse, tid $t - 1$

s refererer til en av 10 valgte aksjer

$w_{t-1,s}$ er vektingen til aksje s ved tid $t - 1$

$r_{t,s}$ er avkastningen for aksje s fra holdeperiodens start, $t - 1$, til holdeperiodens slutt, t

Vi får dermed at $V_{t-1} \cdot w_{t-1,s}$ er kapital investert i aksje s ved tid $t - 1$, slik at $r_{t,s}$ er avkastningen på den investerte kapitalen i aksje s over holdeperioden. Summen av disse avkastningene utgjør forskjellen mellom porteføljens verdi ved tid $t - 1$, og porteføljens verdi ved tid t , V_t .

Porteføljeverdi etter transaksjonskostnader

For å gi et mer realistisk estimat på porteføljens verdi, legges direkte transaksjonskostnader til i uttrykket for porteføljens verdi:

$$V_t = V_{t-1} + \sum_{s=0}^{10} (V_{t-1} \cdot w_{t-1,s} \cdot (r_{t,s} - x \cdot p_{t,s})) \quad (27)$$

Hvor x representerer direkte transaksjonskostnader for en enveishandel, altså enten kjøp eller salg, og $p_{t,s}$ representerer hvorvidt transaksjonskostnader skal trekkes fra for aksje s ved tid t . $p_{t,s}$ avgjøres av hvorvidt aksje s kjøpes ved tid $t-1$, og hvorvidt den skal selges ved tid t .

Dersom aksje s holdes ved tid $t - 1$, og skal holdes ved tid t , tar $p_{t,s}$ verdien 0.

Dersom aksje s holdes ved tid $t - 1$, og skal selges ved tid t , tar $p_{t,s}$ verdien 1.

Dersom aksje s kjøpes ved tid $t - 1$, og skal holdes ved tid t , tar $p_{t,s}$ verdien 1.

Dersom aksje s kjøpes ved tid $t - 1$, og skal selges ved tid t , tar $p_{t,s}$ verdien 2.

Hvis en aksje holdes over flere perioder, vil beholdningen av aksjen normalt måtte justeres med hensyn til økning eller nedgang i porteføljens verdi for å opprettholde en likevektet portefølje. I uttrykket for direkte transaksjonskostnader tas ikke dette hensyn til, og de direkte transaksjonskostnadene vil dermed ikke være

fullstendige. Studiets valg av transaksjonskostnader er videre en tilnærming til den reelle transaksjonskostnaden, og tar dermed heller ikke hensyn til indirekte transaksjonskostnader som for eksempel bid/ask-spread og markedspåvirkningskostnader.

Den direkte transaksjonskostnaden som benyttes er på 5 basispoeng per handel for den lange holdeperioden. Både Nordnet og DnB opererer med en standardpris på ca 0.05% (DnB, udatert; Nordnet, udatert). Hos Nordnet gis det rabatterte priser dersom det handles over 15 ganger per måned, og med en portefølje bestående av 10 aksjer med månedlig rebalansering, kan det tenkes at porteføljen vil kunne kvalifisere for dette. For å slippe å variere basert på antall handler per måned, settes likevel transaksjonskostnadene til standardpris. For den korte holdeperioden antas det at antallet transaksjoner kvalifiserer for laveste oppgitte pris på 3.5 basispoeng, og at dette dermed vil være den høyeste transaksjonskostnaden for porteføljene med daglig rebalansering.

4.4 Metodedrøfting og studiets begrensninger

Porteføljer

Et av studiets formål er å undersøke hvordan metoder som er benyttet på store og likvide markeder vil fungere på det mindre, norske aksjemarkedet. Med dette følger det at det i en reell setting kan medføre utfordringer når det gjelder kjøp og salg av aksjer, da ikke alle aksjer som velges til porteføljen vil være like omsettelige. I tillegg vil valget av en likevektet portefølje kunne medføre ytterligere vanskeligheter i forbindelse med likviditetsproblemer, da små og mindre likvide selskap vil kreve like stor andel i porteføljen som større selskaper hvor kjøp og salg vil være enklere. Dette er til dels hensyntatt ved at aksjer som omsettes for under 5NOK ikke inkluderes i porteføljene, men ut over dette antas det for studiet at alle aksjer vil kunne kjøpes og selges som ønsket.

Studiet forsøker videre ikke å optimalisere porteføljen med hensyn til risiko, og benytter ingen form for mål på korrelasjon mellom aksjene som velges for å oppnå en diversifisert portefølje.

RF-modellen

En virkelig implementering av modellen vil kreve kontinuerlig innhenting av ny data, samt mekanismer for kjøp og salg av aksjer, og gjennomføringen av dette er dermed av en slik teknisk karakter at det er utenfor studiets omfang. Studiets metode er dermed en forenkling av hvordan dette vil foregå, som forsøker å svare på hvorvidt dette kan være lønnsomt for blant annet tradere og porteføljeforvaltere. Videre er dermed enkelte av forutsetningene for modellen, som blant annet at aksjer kjøpes og selges til sluttkurs, ikke oppnåelig i en virkelig setting.

Når det kommer til utformingen av RF-modellen følger metoden de standardene som ligger i pakken *ranger*, og må dermed fra et maskinlæringsynspunkt sies å ikke ha gjennomgått en optimaliseringsprosess. En endring av parametrene vil kunne endre porteføljeprestasjon, og er særlig relevant for å forbedre nøyaktigheten til modellen.

5 Analyse og resultater

I dette kapitlet presenteres og analyseres studiets resultater. Kapitlet tar først for seg hvordan modellspesifikasjoner påvirker resultat, før viktigheten til faktorene i det kombinerte funksjonsområdet vurderes. Resultatet for den endelige porteføljen evalueres både før transaksjonskostnader, og etter direkte transaksjonskostnader. I tillegg til resultatet for porteføljen med lang holdeperiode konstruert etter fremgangsmåten til Tan et al. (2019), vurderes to porteføljer med kort holdeperiode. Porteføljene med kort holdeperiode baseres på en videreutviklet versjon av det kombinerte funksjonsområdet, presentert i kapittel 4.2.2, i tillegg til et rent momentumsområde. I tillegg til analyser av porteføljenes presentasjon, vurderes også porteføljenes aksjeutvelgelse ved å se på de mest holdte aksjene.

All evaluering av porteføljeprestasjon gjøres med utgangspunkt i prediksjoner fra tradingsett som er holdt ute ved trening av modellen. Som spesifisert i metodekapitlet trenes modellene på observasjoner tilhørende de 252 børsdagene før hver enkelt tradingperiode, slik at informasjonen fra tradingsettene er ukjent for den trente modellen. Den totale tradingperioden strekker seg over 2100 sammenhengende børsdager, fra 14.12.2010 til 30.04.2019.

5.1 Modellspesifikasjoner

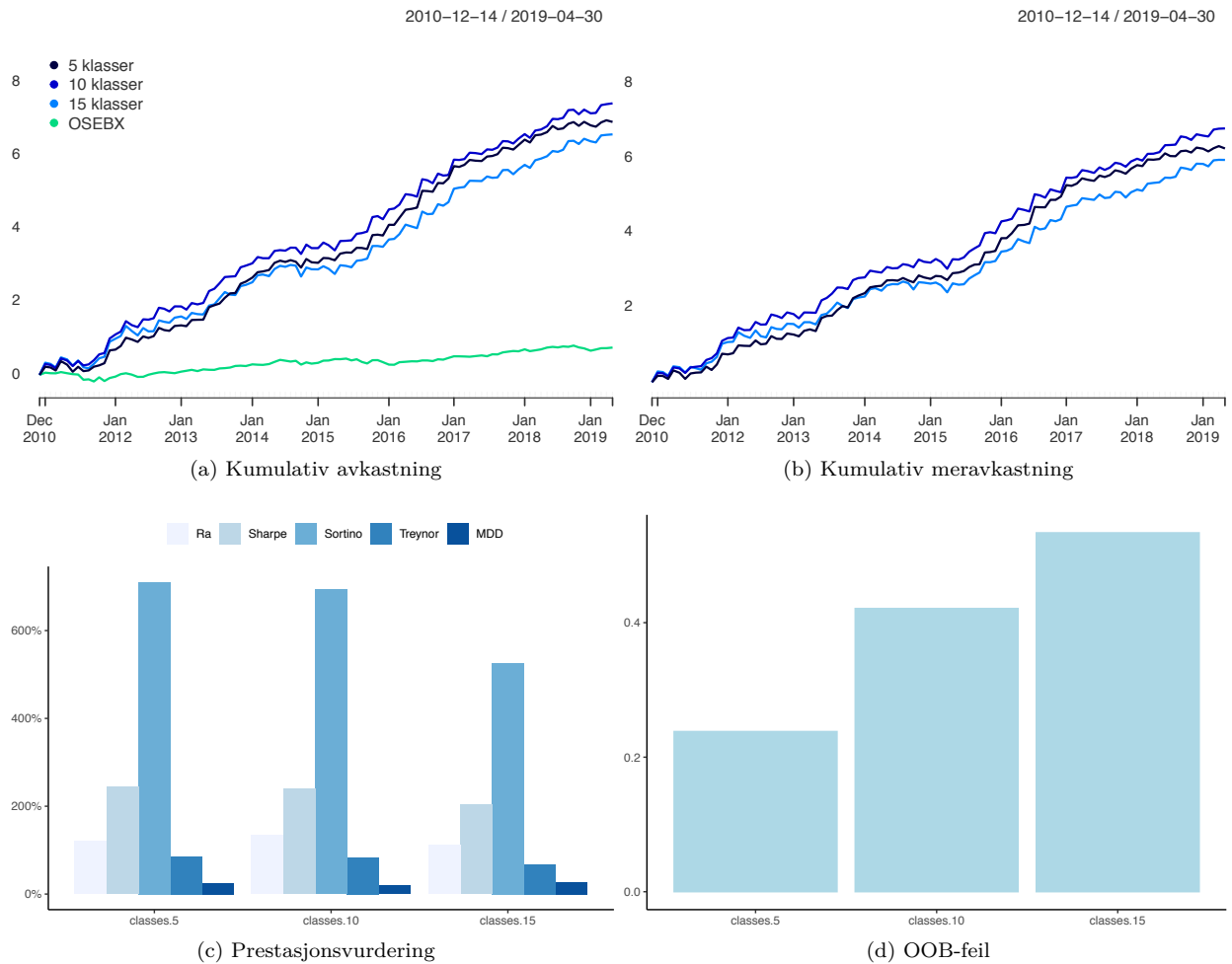
Da studiets formål er å bruke maskinlæringsmetoden Random Forest for å velge aksjer til en portefølje, er det interessant å studere hvordan prestasjonen for porteføljen basert på RF-modellen avhenger av modellspesifikasjoner. Spesifikt sees det på hvordan antallet klasser og valg av lengde på treningsperiode påvirker årlig avkastning, maksimal drawdown (MDD), Sharpe-rate, Sortino-rate og Treynor-rate. I tillegg til disse målene på prestasjonen utenfor treningssettene, vurderes også gjennomsnittsverdien av OOB-feilen for alle treningssettene for å evaluere nøyaktigheten til treningsperiodene. Analysen av modellspesifikasjoners påvirkning på resultatet gjøres ved kun å variere et parameter om gangen. De andre parameterene holdes konstant, og eventuelle kryssforhold relatert til endring i parameterene vil dermed ikke vurderes.

Resultatene basert på ulike modellspesifikasjoner analyseres ikke for seg selv, men sammenlignes og benyttes for å avgjøre hvilke modellspesifikasjoner som benyttes for studiets sluttportefølje. For denne delen av analysen vil det ikke tas hensyn til transaksjonskostnader, og studiets sluttportefølje før transaksjonskostnader bestemmes dermed ved de modellspesifikasjonene som fører til best resultat basert på parameterene som vurderes i analysen.

5.1.1 Antall klasser

For å evaluere antallet klassers påvirkning på porteføljeprestasjon vurderes klasser av størrelsen $\{5,10,15\}$, konstruert etter metodens kapittel 4.2. Av figur 5.1 panel a og b ser vi at porteføljen bestående av 10 klasser oppnår en gjennomsnittlig årlig avkastning på 136.2%, og presterer bedre enn porteføljene med 5 og 15 klasser basert på avkastning og meravkastning. Grafene i figur 5.1 panel c viser likevel en svekket prestasjon for porteføljen med hensyn til prestasjonsmålene Sharpe-rate, Sortino-rate og Treynor-rate, sammenlignet med porteføljen basert på 5 klasser.

OOB-feilen estimert gjennom treningen av modellen øker for modellene med flere klasser enn 5, som antyder at klassifiseringen er mindre nøyaktig når antallet klasser øker. Forskjellen mellom prestasjonsvurdering basert på avkastning og risikovektede prestasjonsmål kan dermed komme av at porteføljen med 10 klasser til en viss grad oppnår fordeler ved å ytterligere innskrenke klassene, men at porteføljen også opplever større variasjon på bakgrunn av feilklassifiseringer. Av grafene i figur 5.1 ser det ut til å være en signifikant negativ autokorrelasjon for porteføljens avkastning. Dette kommer først frem i grafen ved logaritmisk transformasjon av den kumulative avkastningen, og videre forskning kreves for å kunne si noe om årsaken til dette.



Figur 5.1: Antall klassers påvirkning på porteføljeprestasjon, basert på porteføljer bestående av {5, 10, 15} klasser. Grafene i panel a og b viser logaritmisk transformert kumulativ avkastning og meravkastning, for å kunne vise utviklingen for OSEBX i samme graf.

Tabell 5.1 viser tallverdiene for målene på porteføljeprestasjon fra figur 5.1 panel c. Her fremkommer det at porteføljen konstruert med 5 klasser har høyere verdi for både Sharpe-raten, Sortino-raten, og Treynor-raten. Sortino-raten når høye verdier for porteføljene da nedsideavvikene er lave i forhold til standardavviket, og viser at porteføljene har større andel positive avvik enn negative, som kan forklare de høye avkastningene som oppnås.

	5 klasser	10 klasser	15 klasser
Avkastning	1.205	1.337	1.121
MDD	0.252	0.192	0.272
Sharpe-rate	2.437	2.394	2.036
Sortino-rate	7.105	6.941	5.260
Treynor-rate	0.858	0.836	0.678

Note: Tabellen viser prestasjonstall for porteføljes basert på {5, 10, 15} klasser. Sharpe-raten er gitt ved meravkastning ut over risikofri rente over standardavviket til avkastningen. Avkastning, Sharpe-rate, Sortino-rate og Treynor-rate viser annualiserte verdier. MDD viser det maksimale tapet for porteføljen, målt som det størstedroppet fra porteføljens topp til bunn, før porteføljen når en ny topp.

* Standardavvik på henholdsvis 0.477, 0.540, 0.531

* Nedsideavvik på henholdsvis 0.129, 0.145, 0.171

Tabell 5.1: Prestasjonsvurdering basert på ulikt antall klasser

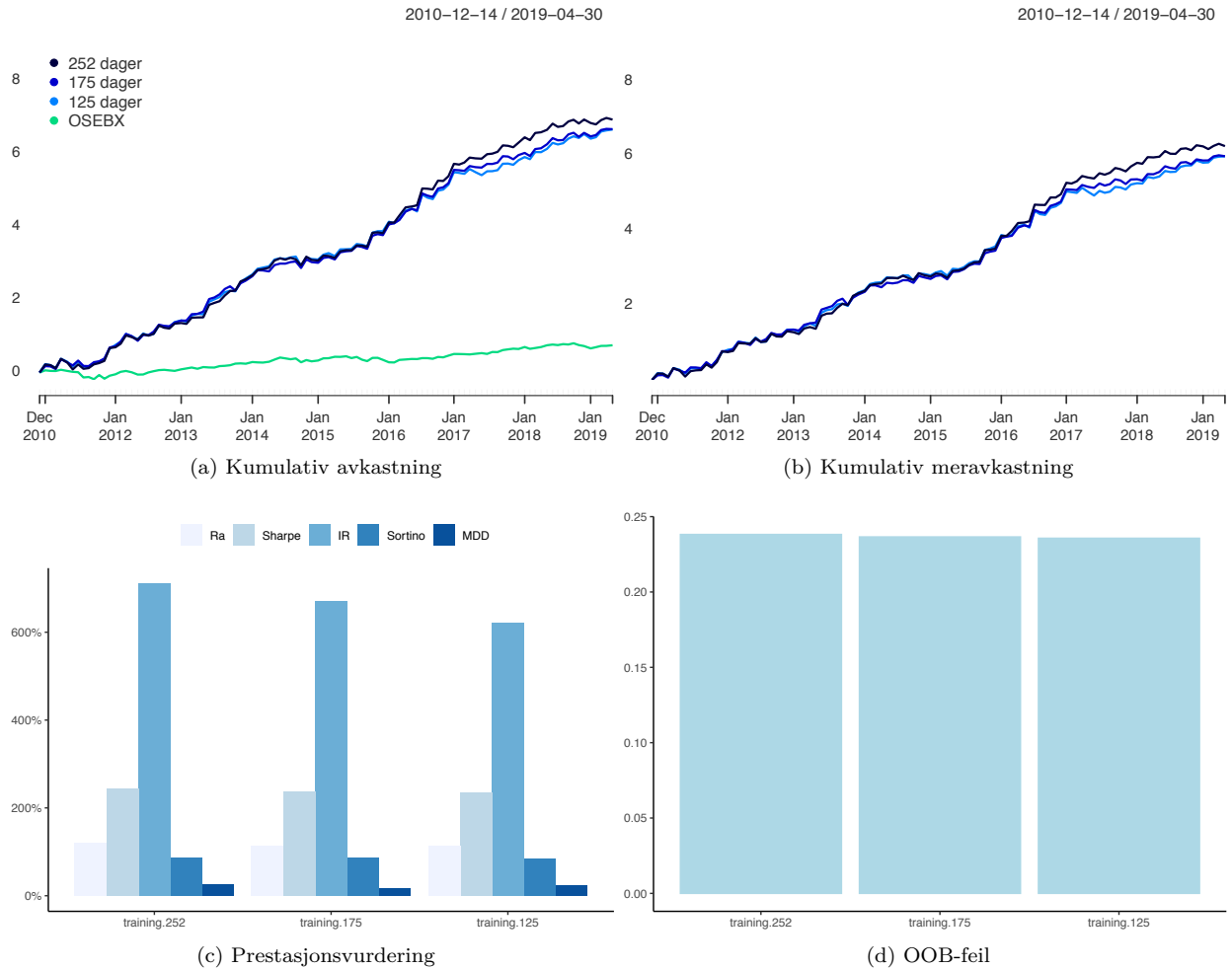
5.1.2 Treningsperioden

Treningsperiodens lengde bestemmer hvor mange observasjoner modellen skal trenes på. Det er avgjørende for modellens prestasjon utenfor treningsperiodene, og dermed porteføljeprestasjonen, at treningsperiodens lengde settes slik at den representerer viktig informasjon. Perioden må dermed være lang nok til å fange opp informasjon som er relevant for å korrekt predikere i tradingperiodene, men samtidig ikke av en slik lengde at utdatert informasjon fanges opp. For å evaluere treningsperiodens påvirkning på porteføljen vurderes dermed lengdene {125,175,252}, som medfører at treningsperiodens start skiftes med hensyn til lengden på perioden, for å sørge for at tradingperioden starter 14.12.2010 for alle porteføljene.

Figur 5.2 panel d illustrerer at OOB-feilen er tilnærmet uendret mellom porteføljene, noe som tilsvarer at klassifiseringer ser ut til å stabilisere seg på tvers av lengde på treningsperiodene, i motsetning til resultatet basert på klasser, hvor ulike verdier har stor påvirkning på OOB-feilen. Siden OOB-feilen kun gir et estimat på nøyaktighet fra treningsdataen, får vi likevel forskjeller når de trente modellene benyttes på ny data.

Av figur 5.2 panel a og b ser vi dermed at avkastning og meravkastning er betydelig høyere for modellen trent på 252 dager, noe som også reflekteres i prestasjonsvurderingene i figur 5.2 panel c og tabell 5.2. Den ettårige treningsperioden når en gjennomsnittlig årlig avkastning på 120.5%, og en Sharpe-rate på 2.44. Treynor-raten er omtrent lik for 252 og 175 dagers treningsperiode, og indikerer dermed at den ekstra avkastningen for porteføljen basert på en ettårig treningsperiode kommer av høyere markedsrisiko.

Sammenlignet med resultatene fra Tan et al. (2019) viser resultatene at det kombinerte funksjonsområdet har vesentlig informasjonseffekt ett år tilbake i tid for det norske aksjemarkedet, i motsetning til det kinesiske aksjemarkedet, hvor informasjonseffekten svekkes etter omtrent et halvt år.



Figur 5.2: Treningsperiodens påvirkning på porteføljestasjon. Figuren viser prestasjon for porteføljer basert på {125, 175, 252} treningsdager. Grafene i panel a og b viser logaritmisk transformert kumulativ avkastning og meravkastning, for å kunne vise utviklingen for OSEBX i samme graf.

	252 dager	175 dager	125 dager
Avkastning	1.205	1.140	1.138
MDD	0.252	0.172	0.226
Sharpe-rate	2.437	2.377	2.338
Sortino-rate	7.105	6.703	6.210
Treynor-rate	0.858	0.856	0.835

Note: Tabellen viser prestasjonstall for porteføljes basert på {125, 175, 252} treningsdager. Sharpe-raten er gitt ved meravkastning ut over risikofri rente over standardavviket til avkastningen. Avkastning, Sharpe-rate, Sortino-rate og Treynor-rate viser annualiserte verdier. MDD viser det maksimale tapet for porteføljen, målt som det størstedroppet fra porteføljens topp til bunn, før porteføljen når en ny topp.

* Standardavvik på henholdsvis 0.477, 0.463, 0.469

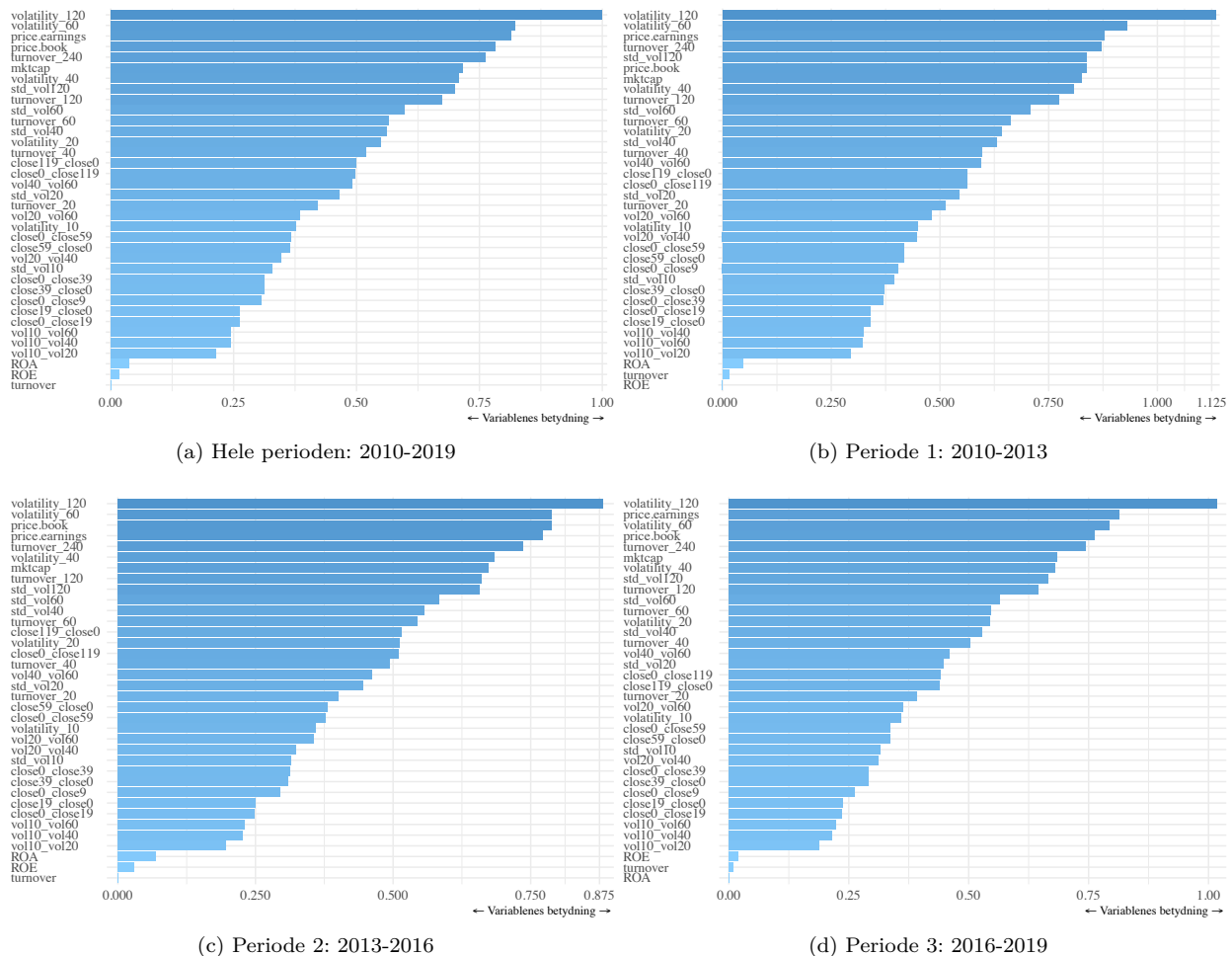
* Nedsidaavvik på henholdsvis 0.129, 0.131, 0.142

Tabell 5.2: Prestasjonsvurdering basert på ulike treningsperioder

5.2 Analyse av variabler

Under treningen av RF-modellene kalkuleres et mål på variablenes viktighet, kalt *Gini Importance*, basert på splittkriteriet Gini forklart i kapittel 3.3.2. Dette kan forklares som et mål på hvor viktig en variabel er for å estimere klassetilhørigheten til responsvariabelen, på tvers av alle trærne konstruert under treningsperioden. Ved hver splitting i hvert tre, er forbedringen i splittkriteriet et mål på viktighet som tilskrives splittvariabelen, og akkumuleres over alle trærne hver for seg.

Variablenes viktighet sees i forhold til hverandre, slik at en høyere verdi tilsier større viktighet og dermed høyere informasjonseffekt relativ til variabler med lavere verdi. Figur 5.3 illustrerer den gjennomsnittlige viktigheten til variablene i det kombinerte funksjonsområdet på tvers av alle treningsperiodene, samt for ulike tidsperioder. For å enklere kunne sammenligne variablenes relevans, settes den viktigste variabelen for hele perioden lik 1, og de andre variablene normaliseres ut ifra dette. For de oppdelte periodene, normaliseres verdiene ut ifra verdiene for hele perioden, slik at variabelviktigheten for periodene kan vurderes opp mot hverandre.



Figur 5.3: Variabelviktighet for ulike tidsperioder. Den viktigste variabelen for hele perioden settes lik 1, og de andre variablene normaliseres ut ifra dette. For de oppdelte periodene, normaliseres verdiene ut ifra verdiene for hele perioden, slik at variabelviktigheten for periodene kan vurderes opp mot hverandre.

Med utgangspunkt i figur 5.3 panel a viser de to øverste faktorene i figuren, *volatility_120* og *volatility_60*, at langsiktig volatilitet er den viktigste faktoren for fremtidig meravkastning over perioden som helhet. Med unntak av periode 3, fra figur 5.3 panel d, er dette gjeldende for alle tidsperioder. Generelt ser det ut til at de tekniske faktorene har bedre informasjonseffekt med lengre tidshorison relativ til de kortere tidshorisonene, da den lengste varianten rangeres høyere for alle typer tekniske faktorer i funksjonsområdet. Med hensyn til holdeperiodens langsiktighet, gir det mening at det er bevegelsene over lang tid, og ikke rett før, som er av størst relevans.

Momentumfaktorene ser ut til å ha svekket informasjonseffekt for den langsiktige meravkastningen i forhold til andre tekniske faktorer, med $\approx 0.50\%$ for den høyest rangerte variantene relativ til *volatility_120*. Momentum er ofte benyttet i tradingstrategier, og har bevist effekt i flere studier, og det er dermed interessant å se at faktoren virker å være av relativt liten betydning for studiets datamateriale og fremtidsperiode.

ROE og ROA viser seg å være tilnærmet ubetydelige for alle perioder, noe som er overraskende da spesielt ROE er kjent som en viktig faktor for aksjeavkastning (Chen et al., 2011). Den lave viktigheten er et interessant funn, og ser ut til å være gjeldende hos Tan et al. (2019), men med ikke fullt så lav verdi relativ til andre variabler. De lave verdiene kan være et resultat av at disse to faktorene er basert på årlige data, mens alle tekniske faktorer er basert på daglig data, og de resterende fundamentale faktorene også er justert basert på daglige priser. Viktigheten ville dermed kunne vært større dersom kvartalsvis regnskapsdata var tilgjengelig, og viser for studiets data og fremtidsperiode, at forrige års regnskapsinformasjon mister sin informasjonsverdi.

De fundamentale faktorene *price.earnings*, *price.book* og *mktcap* er alle representert blant de øverste variablene basert på viktighet, og viser dermed at fundamentale faktorer kan være viktige for å avgjøre hvordan aksjene beveger seg i fremtidsperioden. Variablenes plassering relativ til viktigste variabel varierer på tvers av periodene, men det ser ut til å være små forskjeller mellom de ulike periodene, og ingen store skifter i plassering. Generelt sett ser variablene ut til å ha høyere verdier for periode 1 og lavere verdier for periode 3, med hensyn til maksverdi og verdier over og under 0.5 og 0.25. For periode 3 har *price.earnings* sin høyeste plassering sammenlignet med andre variabler, og bytter plass med *volatility_60*. For periode 3 viser også langsiktig volatilitet i handelsvolum seg å være viktigere enn for andre perioder, med faktoren *std_vol120* på topp 5.

Disse funnene, kombinert med prestasjonstallene for porteføljen, indikerer at det kombinerte funksjonsområdet innehar informasjon som kan utnyttes for å utvikle tradingstrategier. Summert er de langsiktige tekniske faktorene, og da spesielt volatilitetsfaktorer, og de fundamentale faktorene *price.earnings*, *price.book* og *mktcap* spesielt viktige, mens momentumfaktorer, tekniske faktorer med kortere tidshorison og de resterende fundamentale faktorene er av lavere betydning. Dette indikerer videre at både tekniske og fundamentale faktorer kan inneha informasjon som er av betydning for langsiktig porteføljeprestasjon, og at det dermed kan stilles spørsmål ved markedseffisiensen i det norske aksjemarkedet.

5.3 Porteføljeanalyse

Sluttporteføljen, P_{RF} , er bestemt ved de modell-spesifikasjonene som fører til best resultat basert på faktorene som vurderes i analysen. Tradingprestasjonen vurderes først uten hensyn til transaksjonskostnader, før en tilnærming til transaksjonskostnader implementeres for å se påvirkningen av disse.

Etter vurdering av modell-spesifikasjoner konstrueres P_{RF} ut ifra modellen basert på 5 klasser og 252 treningsdager i forkant av hver tradingperiode. Modellen gir sannsynligheten for hver aksje til å havne i klasse 5, som består av aksjene med høyest fremtidig meravkastning relativ til OSEBX. De 10 aksjene med høyest sannsynlighet vektet likt og holdes i porteføljen, før porteføljen månedlig rebalanseres basert på ny sannsynlighet.

Tabell 5.3 viser prestasjonsmål for P_{RF} før transaksjonskostnader sammenlignet med OSEBX. Risikomålene standardavvik, MDD og VaR er høyere for P_{RF} enn for OSEBX. Mens det er tydelig forskjell på standardavvikene, er både MDD og VaR overraskende lave for porteføljen sett i sammenheng med målene for OSEBX. Mens MDD og VaR er risikomål som tar for seg nedsiderisiko, måler standardavviket også avvik i form av positive avkastninger. Forskjellen mellom risikoen for porteføljen relativ til OSEBX for de forskjellige målene kommer dermed av at porteføljen har positive avvik fra gjennomsnittet. Porteføljens høye standardavvik er i tillegg et kombinert resultat av feilklassifiseringer som fører til at porteføljen tidvis holder aksjer utenfor ønsket klasse, og at diversifisering ikke tas i betraktning under porteføljekonstruksjonen.

	P_{RF}	OSEBX
Annualisert avkastning	1.205	0.089
Annualisert standardavvik	0.477	0.145
Annualisert Sharpe	2.437	0.464
MDD ¹	0.252	0.227
VaR 5% ²	-0.090	-0.061

Note: Tabellen viser prestasjonstall for P_{RF} før transaksjonskostnader. Sharpe-raten er gitt ved meravkastning ut over risikofri rente over standardavviket til avkastningen. Avkastning, standardavvik og Sharpe-rate viser annualiserte verdier. MDD viser det maksimale tapet for porteføljen, målt som det størstedroppet fra porteføljens topp til bunn, før porteføljen når en ny topp.

¹ Det maksimale tapet for porteføljen, målt som det største droppet fra porteføljens topp til bunn, før porteføljen når en ny topp.

² Historisk VaR. Det er 5% sannsynlighet for å oppnå en avkastning lavere enn dette i løpet av en måned.

Tabell 5.3: Sluttporteføljen, P_{RF} , før transaksjonskostnader

På tross av at porteføljens standardavvik er over tre ganger så høyt som standardavviket for OSEBX, er porteføljens Sharpe-rate betraktelig høyere, da avkastningen er svært høy før transaksjonskostnader.

5.3.1 Etter transaksjonskostnader

Ved å sammenligne avkastningen for P_{RF} med avkastningen for OSEBX, vil en viktig del av sammenligningsgrunnlaget være hvorvidt porteføljens aktive strategi lønner seg i forhold til en passiv holding av hovedindeksen. Denne sammenligningen vil være ufullstendig dersom kun prestasjon før kostnader legges til grunn, da den aktive strategien med flere kjøp og salg medfører langt høyere transaksjonskostnader enn den passive strategien hvor det kun foretas ett kjøp. I en reell situasjon er det dermed prestasjonen etter transaksjonskostnader som er av størst betydning.

Som forklart i studiets metode vil direkte transaksjonskostnader på 5 basispoeng per handel trekkes fra porteføljens avkastning. Tabell 5.4 viser transaksjonskostnadenes påvirkning på prestasjonsvurderingene. Den gjennomsnittlige årlige avkastningen har svekket seg med 25.8 prosentpoeng på bakgrunn av transaksjonskostnadene, og de risikjusterte prestasjonsmålene viser tilsvarende reduksjoner i verdiene. Både den årlige avkastningen og Sharpe-raten viser likevel at porteføljen presterer klart bedre enn hovedindeksen, også etter

transaksjonskostnader.

	$P_{RF,etter}$	$P_{RF,før}$	OSEBX
Avkastning	0.947	1.205	0.089
MDD	0.266	0.252	0.227
Sharpe-rate	2.215	2.437	0.464
Sortino-rate	5.607	7.105	1.018
Treynor-rate:	0.697	0.858	0.067

Note: Tabellen viser prestasjonstall for P_{RF} etter transaksjonskostnader på 5 basispoeng per transaksjon for aksjene som byttes ut. Transaksjonskostnadene vil reelt være høyere, da aksjene som holdes over flere perioder vil måtte justeres opp eller ned med hensyn til porteføljeverdien for å opprettholde en likevektet portefølje. Sharpe-raten er gitt ved meravkastning ut over risikofri rente over standardavviket til avkastningen. Avkastning, Sharpe-rate, Sortino-rate og Treynor-rate viser annualiserte verdier. MDD viser det maksimale tapet for porteføljen, målt som det største droppet fra porteføljens topp til bunn, før porteføljen når en ny topp.

Tabell 5.4: Prestasjonsvurdering: P_{RF} før og etter transaksjonskostnader & OSEBX

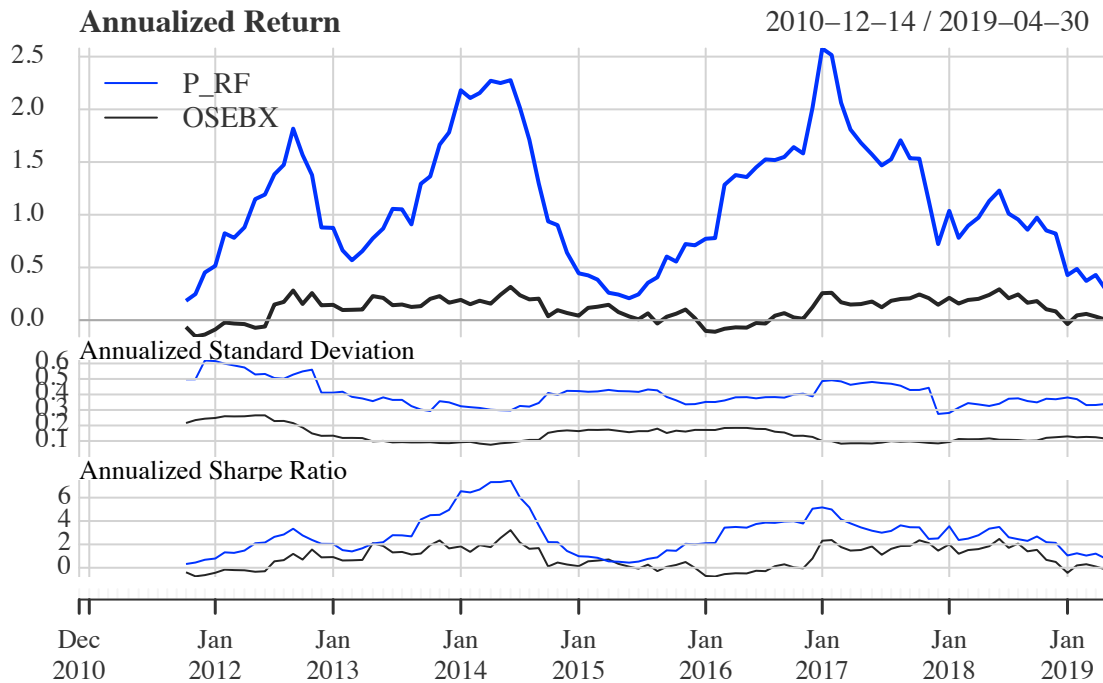
For den lange holdeperioden utgjør dermed ikke transaksjonskostnadene en slik forskjell at resultatet nærmer seg prestasjonen til OSEBX. Dette kan forklares ved at månedlig rebalansering ikke medfører transaksjonskostnader som nærmer seg den månedlige avkastningen, i tillegg til at porteføljen ved rebalanseringstidspunktene ikke bytter alle porteføljekomponenter, men at enkelte aksjer holdes over flere perioder.

Resultatene for porteføljen er altså svært gode også etter transaksjonskostnader, noe som er overraskende, da markedspremien ligger på rundt 7% per år i det norske markedet. Til tross for en signifikant større risiko forbundet med P_{RF} , i form av standardavvik, er risikjustert avkastning betydelig større enn for OSEBX. Når det er sagt, så er resultatene i tråd med tidligere forskning, se Tan et al. (2019).

5.3.1.1 Rullerende porteføljeprestasjon

Den annualiserte avkastningen gir kun et overordnet bilde for hvordan porteføljen har prestert over hele perioden, og på bakgrunn av at studiene til Tan et al. (2019) og Krauss et al. (2017) begge viser avtagende prestasjon over tid er det interessant å se hvordan avkastningen for P_{RF} utvikler seg i løpet av tradingperioden.

Figur 5.4 viser den rullerende prestasjon for P_{RF} basert på årlig avkastning, standardavvik og Sharpe-rate. Av figuren ser vi at porteføljens prestasjon ikke er jevn over tid, og porteføljens høye prestasjon kan dermed i stor grad skyldes at prediksjonene fra RF-modellen treffer bra for enkelte av holdeperiodene. For periodene hvor den årlige avkastningen er lavest, rundt begynnelsen av 2013, mellom 2015 og 2016 og mot slutten av tradingperioden, viser figuren fortsatt et høyt standardavvik for porteføljen, slik at Sharpe-raten går mot Sharpe-raten til osebx. Figuren viser også at porteføljens prestasjon svekkes mot slutten av perioden, hvor Sharpe-raten går ned mot 1.



Figur 5.4: Rullerende porteføljeprestasjon. Figuren viser rullerende annualisert avkastning, standardavvik og Sharpe-rate for P_{RF} og OSEBX.

Tabell 5.5 viser statistikker for den månedlige avkastningen til porteføljen. Den illustrerer svingningene i avkastning som fremkommer av figur 5.4, og bekrefter at den gjennomsnittlige porteføljeprestasjonen i stor grad avhenger av periodene hvor modellen treffer gode prediksjoner. Avkastningen varierer mellom et minimum på -18.4% og et maksimum på hele 44.2% , altså en differanse 62.6 prosentpoeng fra høyeste til laveste avkastning. OSEBX har til sammenligning en differanse på 25.4 prosentpoeng fra maks til minimum. Kvartilene, gjennomsnitt og medianen illustrerer at porteføljens hovedvekt av avkastninger er positive, og kvartil 3 er langt høyere positiv, enn kvartil 1 er negativ. Sammenlignet med OSEBX har altså P_{RF} litt større negative avkastninger, mens de positive avkastningene er langt høyere.

	P_{RF}	OSEBX
Observasjoner	105	105
Minimum	-0.184	-0.134
Kvartil 1	-0.024	-0.014
Median	0.036	0.012
Aritmetisk gjennomsnitt	0.064	0.008
Geometrisk gjennomsnitt	0.057	0.007
Kvartil 3	0.140	0.034
Maksimum	0.442	0.120
Standardavvik	0.119	0.042

Note: Tabellen viser deksriptive statistikker for fordelingen av avkastninger for P_{RF} og OSEBX på bakgrunn av månedlige avkastninger.

Tabell 5.5: Månedlig statistikk for porteføljen

5.3.1.2 Forskjellige perioder

Basert på det som fremkommer av figur 5.4 og tabell 5.5 er det interessant å se på porteføljen for ulike tidsperioder. Tabell 5.6 viser porteføljeprestasjonen over ulike deler av tradingperioden. Tradingperioden er delt opp slik at hver delperiode består av ca 3 år, med unntak av den siste perioden som blir kortere grunnet datamaterialets lengde. I tillegg til 3 delperioder på omtrent 3 år, viser tabellen også tall for det siste året.

<i>Annualisert</i>	2011-2014		2014-2017		2017-05.2019		06.2018-05.2019	
	P_{RF}	OSEBX	P_{RF}	OSEBX	P_{RF}	OSEBX	P_{RF}	OSEBX
Avkastning	1.038	0.079	0.986	0.075	0.794	0.120	0.329	0.046
Standardavvik	0.464	0.167	0.381	0.151	0.386	0.109	0.328	0.120
Sharpe-rate	2.151	0.346	2.489	0.353	1.969	0.899	0.924	0.214
MDD	0.266	0.227	0.190	0.156	0.131	0.130	0.131	0.130
VaR 5%	-0.103	-0.066	-0.063	-0.066	-0.091	-0.048	-0.097	-0.054

Note: Tabellen viser prestasjonstall for P_{RF} og OSEBX for oppdelte perioder over den totale tradingperioden. Sharpe-raten er gitt ved meravkastning ut over risikofri rente over standardavviket til avkastningen. Avkastning, standardavvik og Sharpe-rate viser annualiserte verdier. MDD viser det maksimale tapet for porteføljen, målt som det største droppet fra porteføljens topp til bunn, før porteføljen når en ny topp. VaR viser minimumstapet per måned 5% av tiden.

Tabell 5.6: Prestasjonstall for ulike perioder

Av tabell 5.6 ser vi at prestasjonen er avtagende for porteføljen, i likhet med resultatene fra forskningen til Tan et al. (2019) og Krauss et al. (2017). Porteføljens prestasjon basert på avkastning er høyest for de første årene med medfølgende høyere risiko. Sharpe-raten når sin topp for perioden 2014-2017, og porteføljeprestasjonen ser ut til å avta utover tradingperioden, med en avtakende avkastning og relativt jevnt standardavvik etter første periode. I motsetning til porteføljen forbedres prestasjonen for OSEBX over 3-årsperiodene, slik at porteføljens prestasjon svekkes mot hovedindeksen.

For porteføljens siste år er den årlige avkastningen nede i 32.9%, og en Sharpe-rate omtrent tilsvarende

den høyeste Sharpe-raten for OSEBX over alle periodene som vurderes. Det ser likevel ut til at også OSEBX presterer dårligere enn normalt for det siste året, slik at prestasjonen for dette året også kan være grunnet i markedsårsaker. En annen årsak som kan vurderes for porteføljens avtakende prestasjon over tid er maskinlæringsteknikkers økende popularitet, og at dette muligens kan ha ledet til at modellen er i dårligere stand til å skape meravkastning på bakgrunn av den tilgjengelige informasjonen.

5.3.2 Aksjeutvelgelse

I tillegg til å vurdere hvordan porteføljen presterer, er det også interessant å studere hvilke aksjer som bidrar til resultatet. Etter problemstillingen velges aksjene ut ifra RF-modellens prediksjoner, og gjennom å studere ulike aspekter blir dermed resultatet mer enn tall tatt fra en maskinlæringsalgoritme, som bidrar til øke den teoretiske og praktiske relevansen.

P_{RF} holder 212 av 296 tilgjengelige aksjer i løpet av perioden, med et gjennomsnittlig antall holdeperioder per aksje på 5. Ved full utskifting av alle aksjer på rebalanseringsdagene, ville dette medført transaksjoner på $10 \cdot 2 = 20$ per måned. For porteføljen er gjennomsnittlig antall transaksjoner per rebalanseringsdag 7.4, slik at porteføljen har en månedlig turnover på 37%. Da porteføljen holder et stort antall ulike aksjer, er det videre interessant å se på hvilke aksjer som holdes oftest i porteføljen, og tabell 5.7 viser de 10 aksjene som er holdt i porteføljen over flest perioder.

Aksje	Holdeperioder	Avkastning	Markedsverdi	Turnover	Volum	Volatility120
Norwegian Energy Company	21	0.114	714	0.054	2 743 330	0.083
Norwegian Air Shuttle	19	0.107	8 495	2.491	92 124 942	0.029
Wilson	19	0.068	503	0.0002	10 164	0.046
Jinhui Shipping and Transportation	17	0.041	938	0.049	4 319 094	0.035
Blom	16	-0.062	840	0.008	1 143 005	0.081
Aqua Bio Technology	14	0.101	87	0.015	95 455	0.043
Aker Philadelphia Shipyard	13	0.148	1 046	0.177	1 943 179	0.055
Biotec Pharmacon	13	0.091	486	0.022	877 941	0.040
DNO	13	0.092	13 840	0.051	53 727 315	0.030
NTS	13	0.112	948	0.005	32 462	0.046
Gjennomsnitt		0.081	2970.010	0.287	15 701 689	0.049
Median		0.096	889.440	0.035	1 543 092	0.044

Note: Tabellen viser aksjene som er holdt oftest over den totale tradingperioden fra 14.12.2010 - 30.04.2019, og oppgir gjennomsnittsverdier for periodene aksjen er holdt. Avkastning er gjennomsnittlige månedlige avkastninger, mens markedsverdi, turnover, volum og volatility120 er beregnet ved daglige verdier. Markedsverdi er oppgitt i MNOK. Turnover er gitt ved volum/antall aksjer.

Tabell 5.7: Topp 10 holdte aksjer for P_{RF}

Av tabellen ser vi at den mest holdte aksjen for porteføljen er Norwegian Energy Company, som holdes av porteføljen 20% av tradingperioden. Gjennomsnittsavkastningen for aksjene over periodene de holdes er på 8.1%, og alle aksjene bortsett fra Blom bidrar med en gjennomsnittlig positiv avkastning for periodene de holdes, og tydeliggjør dermed på at RF-modellen oftere enn ikke velger aksjer som bidrar positivt til porteføljen.

Av aksjene listet i tabell 5.7 er alle aksjene med unntak av Blom fremdeles listet på Oslo Børs. De store selskapene Norwegian Air Shuttle og DNO drar opp både gjennomsnittlig markedsverdi og volum, som er langt høyere enn medianverdien, og også gjennomsnittlig turnover dras opp av en ekstremverdi. Statistikkene i Appendiks A viser at median turnover for alle aksjene på Oslo Børs over hele perioden er 0.012, mens 1.

og 3. kvartil danner et område på $\{0.0014, 0.0669\}$, og de fleste aksjene antas dermed å være tilstrekkelig likvide. Ellers holder porteføljen også enkelte tilsynelatende små og mindre likvide selskaper som Wilson og NTS, som vil kunne medføre problemer med hensyn til kjøp og salg av eventuelle store posisjoner. Med utgangspunkt i de mest holdte aksjene virker det ikke til at porteføljens avkastning hovedsakelig drives av mindre likvide selskaper, og det kan tenkes at resultatet ville sett annerledes ut dersom aksjer med pris under 5NOK tas med i utvalget, ettersom disse ofte tilhører mindre selskaper med medfølgende likviditetspremie.

Fra kapittel 5.2 har vi at volatiliteten over de siste 6 månedene er den viktigste faktoren for fremtidig meravkastning. Tabell 5.7 viser den gjennomsnittlige verdien for *volatility120* på dagen aksjene velges til porteføljen. Sett i sammenheng med statistikkene fra hele datasettet i Appendix A, ser aksjene stort sett ut til å være plassert over 3. kvartil med hensyn til volatilitet, slik at aksjene som velges til porteføljene generelt har hatt høy volatilitet de siste 6 månedene. Porteføljen foretrekker altså volatile aksjer, noe som kan forklare den høye volatiliteten gitt ved standardavviket fra tabell 5.5 og 5.3.

5.4 Porteføljeanalyse: Kort holdeperiode

For å undersøke hvor robust RF-modellen er når det kommer til å skape meravkastning i det norske aksjemarkedet undersøkes to porteføljer med kort holdeperiode, satt til en dag, i tillegg til P_{RF} . Porteføljene implementeres ved bruk av samme metode og modell-spesifikasjoner som for sluttporteføljen, P_{RF} , men trenes på henholdsvis et videreutviklet kombinert funksjonsområde og et rent momentumsområde.

Tabell 5.8 oppsummerer prestasjonen for porteføljene basert på kort holdeperiode, både uten transaksjonskostnader og med forskjellig størrelse på transaksjonskostnaden. For porteføljene med daglig rebalansering vil transaksjonskostnader ha en større effekt på prestasjonen enn for porteføljen med månedlig rebalansering, da det er flere transaksjoner og dermed større kostnader. Det kan dermed også antas at en portefølje med daglig rebalansering vil kunne kvalifisere for lavere transaksjonskostnad enn standardprisen, og den laveste prisen oppgitt av Nordnet på 3.5 basispoeng(Nordnet, udatert) settes dermed som det høyeste alternativet til transaksjonskostnader, mens det laveste alternativet settes lik transaksjonskostnadene benyttet av Tan et al. (2019) på 1.6 basispoeng.

	<i>Transaksjonskostnad</i>	Uten	3.50	3.25	3.00	2.75	2.50	2.00	1.60
P_{komb}	Avkastning	1.740	0.113	0.187	0.266	0.351	0.441	0.639	0.818
	Sharpe	5.130	0.276	0.498	0.735	0.987	1.256	1.848	2.380
	Standardavvik	0.329							
	MDD	0.259							
	5% VaR	-0.027							
	OOB	0.592							
P_{mom}	Avkastning	2.059	-0.071	0.012	0.102	0.200	0.307	0.549	0.775
	Sharpe	5.553	-0.249	-0.024	0.222	0.489	0.780	1.441	2.057
	Standardavvik	0.360							
	MDD	0.229							
	5% VaR	-0.027							
	OOB	0.592							

Note: Tabellen viser prestasjonen for P_{komb} og P_{mom} før og etter transaksjonskostnader på {3.50, 3.25, 3.00, 2.75, 2.50, 2.00, 1.60} basispoeng. Sharpe-raten er gitt ved meravkastning ut over risikofri rente over standardavviket til avkastningen. Avkastning, Sharpe-rate og standardavvik viser annualiserte verdier. Risikomålene standardavvik, MDD og VaR vises kun før transaksjonskostnader. MDD viser det maksimale tapet for porteføljen, målt som det størstedroppet fra porteføljens topp til bunn. VaR viser det daglige minimumstapet for porteføljen 5% av tiden. OOB viser den gjennomsnittlige feilklassifiseringsraten for treningsperiodene.

* OSEBX har annualisert avkastning på 0.089 & Sharpe på 0.464

Tabell 5.8: Prestasjon for porteføljer med kort holdeperiode

Tabell 5.8 viser at begge modellene har samme OOB-feil for treningsperioden. Sammenlignet med OOB-feilen for modellen brukt for å konstruere P_{RF} , er OOB-feilen betydelig høyere når modellene trenes for å klassifisere meravkastning for påfølgende dag. Dette kan tyde på at modellen har større vanskeligheter med å skille

mellom aksjer basert på daglig avkastning, og det er mulig OOB-feilen ville vært lavere for færre klasser, uten at det nødvendigvis vil forbedre prestasjonen for tradingperioden.

Både porteføljen basert på kombinert funksjonsområde og rent momentumsområde oppnår svært høy avkastning før transaksjonskostnader, og medfølgende Sharpe-rater på over 5. P_{komb} har lavere risiko med hensyn til standardavvik, mens P_{mom} presterer bedre for maksimal risiko(MDD). Tabell 5.8 viser videre at porteføljeprestasjonen i stor grad avhenger av hvor høye transaksjonskostnadene er. Før transaksjonskostnadene har porteføljene annualisert avkastning på 174% for P_{komb} og 206% for P_{mom} . Denne avkastningen er i tråd med forskningen til Krauss et al. (2017), som oppnår en daglig avkastning på 0.45% før transaksjonskostnader, $\approx 210\%$ annualisert, for momentumporteføljen med holdeperiode på en dag. Reduksjonen i avkastning utgjør henholdsvis 92.2 og 128.5 prosentpoeng for den laveste transaksjonskostnaden, og viser at porteføljene med kort holdeperiode presterer signifikant dårligere når kostnader hensyntas, sammenlignet med Tan et al. (2019). P_{komb} presterer dårligere enn OSEBX basert på Sharpe-raten når transaksjonskostnadene overstiger 3.25, mens P_{mom} påvirkes raskere og presterer på nivå med OSEBX for transaksjonskostnader på 2.75 basispoeng.

Porteføljene med daglig rebalansering er altså svært sensitive mot transaksjonskostnader, og vil ikke være i stand til å generere meravkastning ut over OSEBX basert på prisene som oppgis til en vanlig investor(Nordnet, udatert). I hvor stor grad det er mulig å generere meravkastning ved bruk av RF-modellen for den korte fremtidsperioden vil dermed avhenge av hvor lave transaksjonskostnader det er mulig å få.

Kapittel 5.3.1 viser at prestasjonen for P_{RF} avtar ut over tradingperioden, og det er dermed også interessant å undersøke om det samme er gjeldende for porteføljene P_{komb} og P_{mom} . I Figur 5.5 illustreres den rullerende annualiserte avkastningen, som viser at også for porteføljene med kort holdeperiode ser avkastningen ut til å avta over tid. Det kan dermed virke som at den ekstreme avkastningen som porteføljene oppnår i stor grad er påvirket av tradingperiodens begynnelse, og at mulighetene for å generere meravkastning ved bruk av maskinlæringsteknikker reduseres, uten at det ser ut til at den elimineres fullstendig da begge porteføljene når en høy topp rundt 2017. Figuren viser også at P_{mom} har en jevnere prestasjon over tid relativ til P_{komb} med hensyn til ekstreme topper, som også fremkommer av MDD for porteføljen i tabell 5.8.

2010–12–14 / 2019–05–02



Figur 5.5: Rullerende annualisert avkastning for porteføljer med kort holdeperiode

5.4.1 Variabelviktighet

For porteføljene med kort holdeperiode er det spesielt interessant å se hvordan variablene opptrer for den korte perioden relativ til den lange.

Figur 6.1 i Appendiks B viser variabelviktigheten for faktorene i det utvidede kombinerte funksjonsområdet basert på treningsperioden for RF-modellen med en holdeperiode på en dag. Sammenlignet med variabelviktigheten for den lange holdeperioden, virker det å være mindre forskjell i viktighet for variablene. De fem øverste variablene i figuren er varianter av momentum, volatilitet og akselerasjonen i volum for dager i perioden rett før observasjonsdagen. I tillegg viser langsiktig volatilitet seg å være viktig også for den korte holdeperioden, med *volatility_120* høyt plassert. Generelt ser vi av figuren at den kortsiktige momentumsvarianten, kortsiktige faktorer relatert til handelsvolum og volatilitet med forskjellige tidshorisonter har overvekt øverst i figuren.

For det kombinerte funksjonsområdet med kort fremtidsperiode er ingen av de fundamentale faktorene av høy relevans, og spesielt *price.earnings*, *price.book* og *mktcap* har svekket relevans relativ til den lange fremtidsperioden. De fundamentale faktorene ser dermed ut til å være viktigere når det kommer til å forklare langsiktige avkastninger.

Variabelviktigheten for det rene momentumsområdet er illustrert i Appendiks B figur 6.2. De øverste faktorene viser at prisutviklingen over de forrige 3 dagene har høyst relevans. Utvidet kan vi si at den kortsiktige prisutviklingen for de siste fem dagene, med hovedvekt på de siste tre, samt langsiktig prisutvikling representert av de siste tre månedene og det siste året, er de viktigste momentumsfaktorene. Helt i bunnen finner vi

faktorene som tar for seg prisutviklingene over de forrige 10-20 dagene, og viser at dette middelområdet mellom bevegelser rett før, og på lengre sikt, har liten informasjonseffekt.

5.4.2 Aksjeutvelgelse

I likhet med den langsiktige porteføljen, P_{RF} , er det også interessant å studere aksjeutvelgelsen for porteføljene med kort holdeperiode.

Kombinert funksjonsområde

Porteføljen konstruert ved bruk av det kombinerte funksjonsområdet, P_{komb} holder i løpet av tradingperioden 256 av 296 tilgjengelige aksjer, med et gjennomsnitt på 83 holdedager per aksje. For hver rebalansering kan porteføljen bytte ut alle holdte aksjer, og det vil dermed kunne utføres maksimum $10 \cdot 2 = 20$ transaksjoner per dag. For P_{komb} utføres i gjennomsnitt 10.3 transaksjoner per dag, slik at porteføljen får en daglig turnover på $10.3/20 = 51.5\%$. Sammenlignet med porteføljen med lang holdeperiode, ser vi altså at porteføljen med daglig rebalansering medfører høyere utskiftning per rebalansering. Dette, kombinert med langt flere rebalanseringer, tydeliggjør porteføljens sensitivitet til transaksjonskostnader relativ til porteføljen med lang holdeperiode.

Tabell 5.9 inneholder de 10 aksjene som er holdt oftest i porteføljen, og viser at alle aksjene bortsett fra to bidrar med en gjennomsnittlig positiv avkastning for periodene de holdes. Dermed ser det ut til at også for den korte holdeperioden velger modellen trent på det kombinerte funksjonsområdet hovedsakelig aksjer som bidrar positivt til porteføljen.

Aksje	Holdeperioder	Avkastning	Markedsverdi	Turnover	Volum
Navamedic	538	0.012	101	0.027	242 190
Fred. Olsen Energy	511	0.002	1 691	0.177	11 782 064
Aqua Bio Technology	440	0.004	82	0.030	203 800
Blom	417	0.007	273	0.012	559 295
Birdstep Technology	411	0.010	149	0.004	347 302
Norwegian Energy Company	407	-0.001	665	0.139	4 067 118
PCI Biotech Holding	401	0.010	503	0.118	2 932 816
Havila Shipping	378	0.004	331	0.012	490 729
NattoPharma	377	0.007	166	0.015	223 220
Frontline	342	-0.001	1 611	0.113	9 846 308
Gjennomsnitt		0.005	557	0.065	3 069 484
Median		0.005	302.40	0.028	525 013

Note: Tabellen viser aksjene som er holdt oftest over den totale tradingperioden fra 14.12.2010 - 30.04.2019, og oppgir daglige gjennomsnittsverdier for periodene aksjen er holdt. Markedsverdi er oppgitt i MNOK.

Tabell 5.9: Topp 10 holdte aksjer for P_{komb}

Basert på volum og turnover, ser det ut til at aksjene er en blanding av likvide og mindre likvide. Statistikkene i Appendix A, som også ble referert til for P_{RF} , viser at medianverdien for turnover på Oslo Børs over hele perioden er 0.012, mens middelområdet bestemt av 1. og 3. kvartil er på $\{0.0014, 0.0669\}$. Aksjene i tabellen har turnover som rangerer fra 0.004 til 0.177, med en median på 0.028 og gjennomsnitt på 0.065. Ingen av aksjene kan dermed ansees å ligge i bunn hva angår den generelle likviditet på børsen, mens enkelte av aksjene kan ansees som svært likvide.

Rent momentumsområde

Porteføljen konstruert ved bruk av momentumsområdet, P_{mom} holder 270 av 296 tilgjengelige aksjer i løpet av perioden, altså litt flere enn P_{komb} . Dette reflekteres i at gjennomsnittet holdedager per aksje reduseres til 79 for porteføljen, og videre en økning i turnover til 67.6%, med et gjennomsnitt på 13.5 transaksjoner per dag. Momentumsporteføljen bytter altså oftere ut porteføljekomponenter, noe som forklarer at porteføljen etter transaksjonskostnader har lavere avkastning enn P_{komb} .

Tabell 5.10 viser de 10 aksjene som holdes oftest i momentumsporteføljen.

Aksje	Holdeperioder	Avkastning	Markedsverdi	Turnover	Volum
Norwegian Energy Company	391	0.006	703	0.229	5 262 589
Blom	390	0.005	479	0.017	731 087
Aker Philadelphia Shipyard	356	0.009	966	0.155	1 682 520
Havila Shipping	342	-0.002	339	0.014	684 795
Fred. Olsen Energy	313	0.000	2 802	0.281	18 736 574
Prosafe	311	-0.005	2 375	0.090	14 383 674
Bionor Pharma	297	0.008	529	0.023	4 729 843
SeaBird Exploration	295	0.005	133	0.022	1 127 924
Birdstep Technology	281	0.012	195	0.009	834 991
Archer	277	-0.002	2 472	0.072	11 516 33
Gjennomsnitt		0.0036	1 099	0.091	5 969 033
Median		0.0047	616.0	0.048	3 206 181

Note: Tabellen viser aksjene som er holdt oftest over den totale tradingperioden fra 14.12.2010 - 30.04.2019, og oppgir daglige gjennomsnittsverdier for periodene aksjen er holdt. Markedsverdi er oppgitt i MNOK.

Tabell 5.10: Topp 10 holdte aksjer for P_{mom}

Sammenlignet med P_{komb} holder de to porteføljene 5 like aksjer, men periodene de holdes i gjør at den gjennomsnittlige avkastningen er ulik. For eksempel genererer Norwegian Energy Company en gjennomsnittlig daglig avkastning på -0.1% for P_{komb} i periodene den holdes, mens den for P_{mom} er positiv på 1.0%. Den gjennomsnittlige avkastningen for aksjene i tabellen er litt lavere enn for P_{komb} , selv om momentumsporteføljen oppnår en høyere avkastning over hele perioden.

Generelt viser tabellen at både markedsverdi, turnover og volum er høyere for de mest holdte momentumsaksjene, som kan tyde på at modellen trent på momentumsområdet foretrekker aksjer som er hakket mer likvide enn modellen trent på det kombinerte funksjonsområdet.

6 Konklusjon

Studiets formål har vært å undersøke hvorvidt RF-modellen er i stand til å finne mønstre basert på tekniske og fundamentale faktorer som kan bidra til meravkastning ut over OSEBX, og dermed benyttes for å forbedre tradingstrategier og porteføljeprestasjon på det norske aksjemarkedet. Totalt konstrueres tre likevektede porteføljer, hvor P_{RF} har en lang holdeperiode på en måned, mens P_{komb} og P_{mom} har kort holdeperiode på en dag.

P_{RF} viser en sterk meravkastning relativ til OSEBX, også etter transaksjonskostnader, og viser med en Sharpe-rate på 2.22 at RF-modellen er i stand til å oppdage mønstre som fører til langsiktig meravkastning i det norske aksjemarkedet. Resultatene er svært høye gitt markedspremien, men samsvarer med tidligere forskning gitt ved Tan et al. (2019). Porteføljene P_{komb} og P_{mom} oppnår en enda tydeligere meravkastning for den korte holdeperioden, med Sharpe-rater på henholdsvis 5.13 og 5.55 før transaksjonskostnader, som samsvarer med tidligere forskning med samme fremtidsperiode (Krauss et al., 2017). På tross av dette er porteføljene svært sensitive mot transaksjonskostnader grunnet høy daglig turnover, og prestasjonen reduseres dermed kraftig når de hensyntas. Lønnsomheten vil dermed avhenge av hvor lave transaksjonskostnader det er mulig å få for denne typen portefølje i det norske markedet. For alle porteføljene avtar prestasjonen over tid, slik at den høye porteføljeprestasjonen til en viss grad er drevet av spesielt høy prestasjon i porteføljenes tidlige år. For nylige år er meravkastningen redusert, men ikke eliminert, og det antas at dette er et resultat av maskinlæringsteknikkers økende popularitet.

Ut over prestasjonen til porteføljene, illustrerer variabelviktighetene til de benyttede faktorene at det eksisterer et forhold mellom avkastning og de konstruerte funksjonsområdene. For den lange fremtidsperioden viser både langsiktige tekniske faktorer og fundamentale faktorer å være av relevans, mens det i den korte fremtidsperioden hovedsakelig er tekniske faktorer som forklarer avkastning. For det norske markedet har spesielt utviklingen i volatilitet betydning, både i lang og kort fremtidperiode. For momentumsområdet er det prisbevegelsene i dagene rett før, samt mer langsiktige prisbevegelser som er viktigst for fremtidsperioden. Funnene stemmer overens med det som omtales i forskningen til Tan et al. (2019), hvor man fra praktisk aksjeinvestering har at langsiktig avkastning er relatert til de fundamentale og langsiktige tekniske faktorene, og viser at RF-modellens resultater har forankring i praktisk og teoretisk økonomi. Videre viser analyse av aksjeutvelgelsen at alle porteføljene holder en stor andel av de tilgjengelige aksjene, og at aksjene som holdes oftest bidrar med gjennomsnittlig positiv avkastning over holdeperiodene. Over en tradingperiode på omtrent 9.5 år, viser dette at modellen er robust og pålitelig, og i stand til å forutse når det er sannsynlig at aksjer vil generere positiv avkastning for fremtidsperioden. På bakgrunn av dette kan det konstateres at den svake formen for markedseffisient ikke holder i det norske markedet, og at også den halvsterke formen ser ut til å være svekket.

Summert viser studiet at det i det norske markedet er stort potensiale for å generere meravkastning ut over hovedindeksen ved bruk av RF-modellen, og at RF-modellen dermed er i stand til å benytte tilgjengelig informasjon i en slik grad at klassifiseringene fører til økonomisk gevinst. Studiet har tatt for seg mulighetene for å generere meravkastning både for korte og lengre holdeperioder, og uten hensyn til transaksjonskostnader er modellen i stand til å generere særlig høye avkastninger for den korte fremtidsperioden. Det er dermed stort potensiale for lønnsomhet med korte holdeperioder dersom lave transaksjonskostnader er mulig, og bruk av maskinlæringsteknikker for å oppdage og utnytte mønstre i finansielle data burde følgelig være nyttig for tradere og porteføljeforvaltere.

Kilder

- Amit, Y., og Geman, D. (1997). Shape Quantization and Recognition with Randomized Trees. *Neural Computation*. <https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.7.1545>
- Andriyashin, A., Härdle, W. K., og Timofeev, R. V. (2008). Recursive Portfolio Selection with Decision Trees. *SFB 649 Discussion Paper 2008-009, 009*.
- Basu, S. (1983). The relationship between earnings' yield, market value and return for NYSE common stocks. Further evidence. *Journal of Financial Economics*, 12(1), 129–156. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(83\)90031-4](https://doi.org/10.1016/0304-405X(83)90031-4)
- Bhatia, M., og Madaan, A. (2018). *Stock Portfolio Performance by Weighted Stock Selection* (May; s. 1–13). <https://static1.squarespace.com/static/5b145b4089c172b995db964a/t/5b1ea07788251bb2f56d82fe/1528733817253/stock-portfolio-performance.pdf>
- Bodie, Z., Kane, A., og Marcus, A. J. (2018). *Investments* (11-th edit). McGraw-hill.
- Breiman, L. (udatert). *Random forests - classification description*. Hentet 3. april 2020, fra <https://www.stat.berkeley.edu/~breiman/RandomForests/cc{~}{home.htm{#}remarks>
- Breiman, L. (1994). Bagging predictors: Technical Report No. 421. *Department of Statistics University of California*.
- Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine Learning*. <https://doi.org/10.1023/A:1010933404324>
- Brennan, M. J., Chordia, T., og Subrahmanyam, A. (1998). Alternative factor specifications, security characteristics, and the cross-section of expected stock returns. *Journal of Financial Economics*, 49(3), 345–373. [https://doi.org/10.1016/S0304-405X\(98\)00028-2](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(98)00028-2)
- Brinson, G. P., Hood, L. R., og Beebower, G. L. (1986). Determinants of Portfolio Performance. *Financial Analysts Journal*, 42(4), 39–44. <https://doi.org/10.2469/faj.v42.n4.39>
- Brinson, G. P., Singer, B. D., og Beebower, G. L. (1991). Determinants of Portfolio Performance II: An Update. *Financial Analysts Journal*, 47(3), 40–48. <https://doi.org/10.2469/faj.v47.n3.40>
- Brown, K. C., Garlappi, L., og Tiu, C. (2010). Asset allocation and portfolio performance: Evidence from university endowment funds. *Journal of Financial Markets*, 13(2), 268–294. <https://doi.org/10.1016/j.finmar.2009.12.001>
- Carhart, M. M. (1997). On persistence in mutual fund performance. *Journal of Finance*. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb03808.x>
- Chen, L., Novy-Marx, R., og Zhang, L. (2011). An Alternative Three-Factor Model. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1418117>
- DeMiguel, V., Garlappi, L., og Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhm075>

- DnB. (udatert). *Prisliste Aksjehandel - DNB*. Hentet 29. april 2020, fra <https://www.dnb.no/privat/sparing-og-investering/aksjer/merinfo/priser.html>
- Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*. <https://doi.org/10.1214/aos/1176344552>
- Efron, B. (1987). Better bootstrap confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association*. <https://doi.org/10.1080/01621459.1987.10478410>
- Enke, D., og Thawornwong, S. (2005). The use of data mining and neural networks for forecasting stock market returns. *Expert Systems with Applications*, 29(4), 927–940. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2005.06.024>
- Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*. <https://doi.org/10.2307/2325486>
- Fama, E. F. (1991). Efficient Capital Markets: II. *The Journal of Finance*. <https://doi.org/10.2307/2328565>
- Fama, E. F., og French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(93\)90023-5](https://doi.org/10.1016/0304-405X(93)90023-5)
- Fama, E. F., og French, K. R. (2015). A five-factor asset pricing model. *Journal of Financial Economics*. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.10.010>
- Fu, X., Du, J., Guo, Y., Liu, M., Dong, T., og Duan, X. (2018). *A Machine Learning Framework for Stock Selection*. Cornell University. <http://arxiv.org/abs/1806.01743>
- Guresen, E., Kayakutlu, G., og Daim, T. U. (2011). Using artificial neural network models in stock market index prediction. *Expert Systems with Applications*, 38(8), 10389–10397. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.02.068>
- Hajjami, M., og Amin, G. R. (2018). Modelling stock selection using ordered weighted averaging operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 33(11), 2283–2292. <https://doi.org/10.1002/int.22029>
- Hamilton, W. P. (1922). *The stock market barometer : a study of its forecast value based on Charles H. Dow's theory* (s. 351). Cosimo.
- Henrique, B. M., Sobreiro, V. A., og Kimura, H. (2019). Literature review: Machine learning techniques applied to financial market prediction. *Expert Systems with Applications*, 124, 226–251. <https://doi.org/10.1016/J.ESWA.2019.01.012>
- Hinton, G., og Sejnowski, T. (1999). Unsupervised learning: Foundations of neural computation. *Computers & Mathematics with Applications*. [https://doi.org/10.1016/s0898-1221\(99\)90165-7](https://doi.org/10.1016/s0898-1221(99)90165-7)
- Ho, T. K. (1995). Random decision forests. *Proceedings of the International Conference on Document Analysis and Recognition, ICDAR*. <https://doi.org/10.1109/ICDAR.1995.598994>
- Ho, T. K. (1998). The random subspace method for constructing decision forests. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. <https://doi.org/10.1109/34.709601>
- Hou, K., Karolyi, G. A., og Kho, B.-C. (2011). What Factors Drive Global Stock Returns? *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.908345>

- Huang, W., Nakamori, Y., og Wang, S. Y. (2005). Forecasting stock market movement direction with support vector machine. *Computers and Operations Research*, 32(10), 2513–2522. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2004.03.016>
- Hurst, B., Ooi, Y. H., og Pedersen, L. H. (2017). A century of evidence on trend-following investing. *Journal of Portfolio Management*, 44(1), 15–29. <https://doi.org/10.3905/jpm.2017.44.1.015>
- Ibbotson, R. G., og Kaplan, P. D. (2000). Does Asset Allocation Policy Explain 40, 90, or 100 Percent of Performance? *Yale School of Management, Yale School of Management Working Papers*, 56(2001/01). <https://doi.org/10.2469/faj.v56.n1.2327>
- James, G., Witten, D., Hastie, T., og Tibshirani, R. (2017). *An introduction to Statistical Learning* (8th editio). Springer.
- Jegadeesh, N., og Titman, S. (1993a). Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency. *The Journal of Finance*. <https://doi.org/10.2307/2328882>
- Jegadeesh, N., og Titman, S. (1993b). Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency. *The Journal of Finance*, 48(1), 65–91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb04702.x>
- Kendall, M. G., og Hill, A. B. (1953). The Analysis of Economic Time-Series-Part I: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*. <https://doi.org/10.2307/2980947>
- Krauss, C., Do, X. A., og Huck, N. (2017). Deep neural networks, gradient-boosted trees, random forests: Statistical arbitrage on the S&P 500. *European Journal of Operational Research*, 259(2), 689–702. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.10.031>
- Kritzman, M., og Page, S. (2002). Asset allocation versus security selection: Evidence from global markets. *Journal of Asset Management*, 3(3), 202–212. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jam.2240075>
- Kuhn, M. (2019). *The caret Package*. <http://topepo.github.io/caret/index.html>
- Leung, M. T., Daouk, H., og Chen, A. S. (2000). Forecasting stock indices: A comparison of classification and level estimation models. *International Journal of Forecasting*, 16(2), 173–190. [https://doi.org/10.1016/S0169-2070\(99\)00048-5](https://doi.org/10.1016/S0169-2070(99)00048-5)
- Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review of Economics and Statistics*. <https://doi.org/10.2307/1924119>
- Liu, Y. C., og Yeh, I. C. (2017). Using mixture design and neural networks to build stock selection decision support systems. *Neural Computing and Applications*, 28(3), 521–535. <https://doi.org/10.1007/s00521-015-2090-x>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>
- Mohri, M., Rostamizadeh, A., og Talwalkar, A. (2012). *Foundations of Machine Learning*. MIT press.
- Moskowitz, T. J., Ooi, Y. H., og Pedersen, L. H. (2012). Time series momentum. *Journal of Financial Economics*, 104(2), 228–250. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2011.11.003>

- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*. <https://doi.org/10.2307/1910098>
- Munro, P., Toivonen, H., Webb, G. I., Buntine, W., Orbanz, P., Teh, Y. W., Poupart, P., Sammut, C., Sammut, C., Blockeel, H., Rajnarayan, D., Wolpert, D., Gerstner, W., Page, C. D., Natarajan, S., og Hinton, G. (2011). Bias Variance Decomposition. I *Encyclopedia of Machine Learning* (s. 100–101). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-30164-8_74
- Nordnet. (udatert). *Prisliste - Nordnet*. Hentet 29. april 2020, fra <https://www.nordnet.no/no/kundeservice/prisliste>
- Pástor, L., og Stambaugh, R. F. (2003). Liquidity risk and expected stock returns. *Journal of Political Economy*. <https://doi.org/10.1086/374184>
- Peterson, B. G., og Carl, P. (2018). PerformanceAnalytics: econometric tools for performance and risk analysis. *R package version*.
- Press, G. (2016). Cleaning Big Data: Most Time-Consuming, Least Enjoyable Data Science Task, Survey Says. *Forbes Tech*, 4–5. <https://www.forbes.com/sites/gilpress/2016/03/23/data-preparation-most-time-consuming-least-enjoyable-data-science-task-survey-says/{\#}63438b8b6f63>
- Qiu, M., Song, Y., og Akagi, F. (2016). Application of artificial neural network for the prediction of stock market returns: The case of the Japanese stock market. *Chaos, Solitons and Fractals*, 85, 1–7. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.01.004>
- R Development Core Team 3.0.1. (2013). A Language and Environment for Statistical Computing. *R Foundation for Statistical Computing*, 2, <https://www.R-project.org>. <http://www.r-project.org>
- Rhea, R. (1932). *The Dow theory : an explanation of its development and an attempt to define its usefulness as an aid in speculation* (s. 252). Fraser.
- Roman, V. (2019). *Unsupervised Machine Learning: Clustering Analysis – Towards Data Science*. <https://towardsdatascience.com/unsupervised-machine-learning-clustering-analysis-d40f2b34ae7e>
- Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(76\)90046-6](https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6)
- Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory Of Market Equilibrium Under Conditions Of Risk. *The Journal of Finance*. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*. <https://doi.org/10.1086/294846>
- Sharpe, W. F. (1992). Asset allocation: Management style and performance measurement. *The Journal of Portfolio Management*. <https://doi.org/10.3905/jpm.1992.409394>
- Shukla, R., og Bogle, J. C. (1994). Bogle on Mutual Funds: New Perspectives for the Intelligent Investor. *The Journal of Finance*. <https://doi.org/10.2307/2329174>
- Sorensen, E. H., Miller, K. L., og Ooi, C. K. (2007). The Decision Tree Approach to Stock Selection. *The Journal of Portfolio Management*, 27(1), 42–52.

Sortino, F. A., og Price, L. N. (1994). Performance Measurement in a Downside Risk Framework. *The Journal of Investing*. <https://doi.org/10.3905/joi.3.3.59>

Takeuchi, L., og Lee, Y.-Y. (2013). *Applying Deep Learning to Enhance Momentum Trading Strategies in Stocks*. Stanford University.

Tan, Z., Yan, Z., og Zhu, G. (2019). Stock selection with random forest: An exploitation of excess return in the Chinese stock market. *Heliyon*, 5(8), e02310. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e02310>

Tay, F. E., og Cao, L. (2001). Application of support vector machines in financial time series forecasting. *Omega*, 29(4), 309–317. [https://doi.org/10.1016/S0305-0483\(01\)00026-3](https://doi.org/10.1016/S0305-0483(01)00026-3)

Treynor, J. L. (1965). How to Rate Management of Investment Funds. *Harvard business review*, 43(1), 63–75.

Varian, H. R. (2014). Big Data: New Tricks for Econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, 28(2), 3–28. <https://doi.org/10.1257/jep.28.2.3>

Yang, F., Chen, Z., Li, J., og Tang, L. (2019). A novel hybrid stock selection method with stock prediction. *Applied Soft Computing Journal*, 80, 820–831. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.03.028>

Yu, H., Chen, R., og Zhang, G. (2014). A SVM stock selection model within PCA. *Procedia Computer Science*, 31, 406–412. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.05.284>

Zhang, R., Lin, Z.-a., Chen, S., Lin, Z., og Liang, X. (2018). Multi-factor Stock Selection Model Based on Kernel Support Vector Machine. *Journal of Mathematics Research*, 10(5), 9. <https://doi.org/10.5539/jmr.v10n5p9>

Zhu, M., Philpotts, D., Sparks, R., og Stevenson, M. J. (2011). A hybrid approach to combining cart and logistic regression for stock ranking. *Journal of Portfolio Management*, 38(1), 100–109. <https://doi.org/10.3905/jpm.2011.38.1.100>

Zhu, M., Philpotts, D., og Stevenson, M. J. (2012). The benefits of tree-based models for stock selection. *Journal of Asset Management*, 13(6), 437–448. <https://doi.org/10.1057/jam.2012.17>

Appendiks

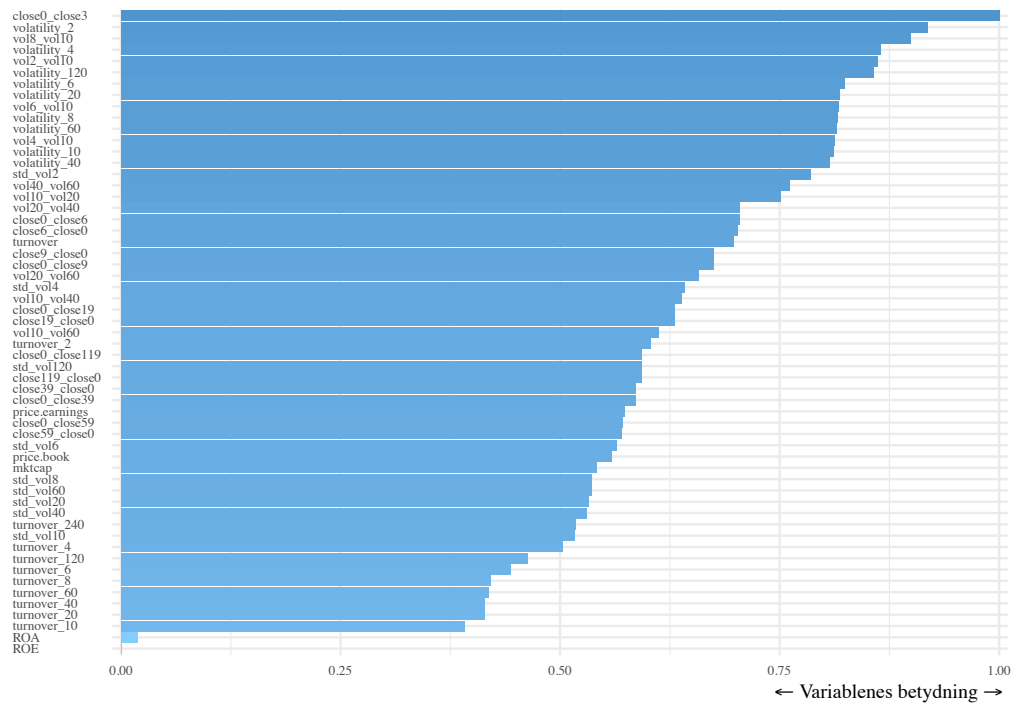
Appendiks A

	return	mktcap	turnover	volume	volatility120
Minimum	-2.6624	1.15162	0	0	0.0009
1. Kvartil.	-0.00996	563.0025	0.0014	32 275	0.0164
Median	0	1 793.34	0.0119	40 6998	0.0228
Gjennomsnitt	0.00009	11 531.8357	0.1055	21 259 244	0.0283
3. Kvartil	0.0095	6 261.25	0.0669	4 316 515	0.0328
Maksimum	3.8127	503 370	41.7948	6 417 010 000	0.3698

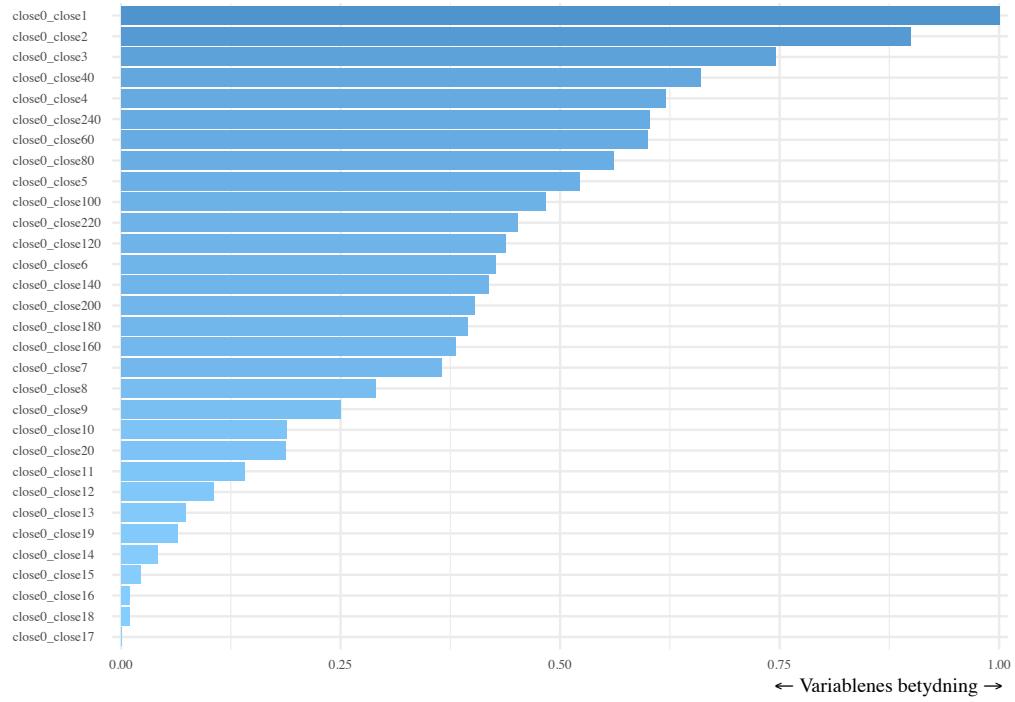
Note: Tabellen viser deskriptive statistikker for enkelte faktorer som nevnes i oppgavens hoveddel. Statistikkene er basert på daglige data. Mktcap er oppgitt i MNOK

Tabell 6.1: Appendiks: Statistikker for datamaterialet

Appendiks B



Figur 6.1: Appendiks: Variabelviktighet for den korte holdeperioden: kombinert funksjonsområde



Figur 6.2: Appendiks: Variabelviktighed for den korte holdeperioden: momentumsovråde