MASTEROPPGAVE

Emnekode: MAT5003 Kandidatnummer: 403:

Illustrasjon av brøk: en kvantitativ undersøkelse blant lærer på 4.-7. trinn

Dato: 16/5-2022 Totalt antall sider: 72

NORD universitet

www.nord.no

Innholdsfortegnelse

Sammendrag

Det undersøkes kvantitativt gjennom et nettbasert spørreskjema: *Hvordan brøk representeres visuelt av lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlemmer av matematikkdidaktiske grupper på internett?* Brøkene som skal illustreres er $\frac{6}{4}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{9}$, altså tre brøker med tre distinkt forskjellige egenskaper. Problemstillingen ble spisset i fire forskningsspørsmål og konklusjonene på disse ble:

1. *Hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) bruker lærerne for å representere brøk?* Bruken av modellene avtar i rekkefølgen: 1. arealmodellen, 2. mengdemodellen og 3. lengdemodellen.

2. *Foretrekker lærerne arealmodellen uavhengig av hvilken brøk som skal representeres?* Datasettet inneholder svar fra 49 deltagere og konklusjonen blir at de fleste lærerne (71.4%, N=35) foretrekker arealmodellen som illustrasjonsmåte uansett hvilken brøk som skal representeres som visuelle konkreta.

3. Hvilke faktorer avgjør valg av representasjonsmodell? De viktigste oppgitt grunnene bak valget av måte å illustrerer brøk på var: *læreverket*, *konteksten i oppgaven* og *brøkens verdi*, men det kan se ut som flere har svart uten å faktisk leve opp til sin grunn når man undersøker datasettet, så det ble ikke konkludert enstydig om hva som ligger til grunn for valget av måte å illustrere brøk på, men lærerne i alle kategoriene foretrakk arealmodellen.

4. Hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) bruker lærerne for å innføre brøk? Når lærere i vår populasjon skal illustrere brøk på 4. trinn og ved innføring av brøk, ser de ikke ut til å følge (Piaget, 1960) og Pothier og Sawada (1983) sine råd, om at rektangel er den beste formen for å utvikle den første brøkforståelsen med, det er fortsatt Arealmodellen på formen sirkel som er foretrukket form.

På bakgrunn av arbeidet med disse forskningsspørsmålet blir konklusjonen blir at når lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlemmer av matematikkdidaktiske grupper på internett, skal representere brøk visuelt på tavlen, gjør de det fortrinnsvis med Arealmodellen, til tross for modellens svakheter.

Abstract

The method is quantitatively reserch through an online questionnaire about: How fractions are visually represented by math teachers in Norway that teach in grades 4-7., that also are members of mathematics didactic groups on the internet? The fractions to be illustrated are 6/4, 1/4 and 1/9. The problem was devided into four research questions and the conclusions on these were:

1. Which of the three models (area, length or set model) do the teachers use to represent fractions? The use of the models in decreaing order: 1. area model, 2. set model and 3. length model.

2. Do the teachers prefer the area model regardless of which fraction is to be represented? The dataset contains responses from 49 participants and the conclusion is that most teachers (71.4%, N = 35) prefer the area model as an illustration method, regardless of which fraction is to be represented as *pictorial manupulative*s.

3. What factors determine the choice of representation model? The main reasons given for the choice of how they illustrating fractions were: *the textbook*, *the context of the task* and *magnitude of the fraction*, but it may seem that several have responded without actually living up to their reason when I examined the data set. So it was not concluded unambiguous about what is the basis for the choice of way to illustrate fractions, but the teachers in all categories preferred the area model.

4. Which of the three models (area, length or quantity model) do the teachers use to introduce fractions? When teachers in our population are to illustrate fractions in the 4th grade and when introducing fractions to a class, they do not seem to follow the advice of (Piaget, 1960) and Pothier and Sawada (1983), that rectangle is the best form to develop the first fractional understanding with, it is still the area model in the shape of a circle that is the preferred shape.

Based on the work on these research questions, the conclusion is that when teachers in 4.-7. grade in Norway that are also members of mathematics didactic groups on the internet, represent fractions visually on the board, they do so preferably with the Area model, despite the model's weaknesses.

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for temavalg

Når man tenker tilbake, var det å starte med brøkregning noe helt nytt og forvirrende på skolen. Noe av det vi hadde oppdaget med heltallene funket fint, andre operasjoner ikke. Når man multipliserer blir tallet mindre og ikke større, det er jo helt motsatt! Det var jo ikke lengre bare å addere tall, det rokker jo ved det mest fundamentale i matematikken; det å telle på fingrene når man legger sammen. Divisjon, det var en rar huskeregel «beholde, snu og gange» og det måtte bare pugges og godtas. Og på toppen av alt, så handler matematikk plutselig om pizza! Denne karen her forstod faktisk ikke den bakenforliggende relasjonell forståelsen (Skemp, 1976) for divisjon med brøk før fylte 28 år. Det var en tankevekker og vekket en personlig motivasjon til å forstå brøk. Siden jeg går lærerskolen er det også naturlig å finne ut hva jeg bør legge til grunn for at brøkundervisningen i mitt fremtidige klasserom skal bli best mulig.

Brøk er et vanskelig tema for elever, både nasjonalt og internasjonalt. Grønmo et al. (2011) påpeker at brøk er blant de kategoriene i TIMSS hvor de norske elevene scorer svakest, det rapporteres om lignende funn også i PISA (Torbergsen & Brandsegg, 2015) . Mens Gabriel et al. (2013) lister opp mange misoppfatninger om brøk som går igjen hos elevene i undersøkelsen blant 439 elever i Belgia på 4.-6. trinn.

Tenkte først å se på tidligere forskning, hvordan lærere illustrere brøk i verden og lete etter svar på hvorfor de gjør det på denne måten med en lokal undersøkelse. Det man finner i forskningen er at det er lite kvantitativ forskning på området, men noe forskning med lærerstudenter som utvalg fra Slovenia, Kosovo (Kolar et al., 2018) og noe kvalitativt i fra Danmark (Putra, 2019), dette også på lærerstudenter. Disse undersøkelsene har ikke undersøkt bruken av brøkrepresentasjoner direkte, men brøkkunnskaper, derimot noen av funnene har vært at lærerstudentene foretrakk å illustrere ting med «pizza»-modellen. En naturlig progresjon i forskningen vil derfor være å undersøke deskriptivt og kvantitativ for å prøve få et mer generalisert bilde av hvordan lærere i Norge faktisk illustrerer brøk, i det minste å kunne si noe om tendensen det ser ut til at faktiske lærere gjør og ikke bare lærerstudenter.

1.2 Problemstilling og hypotese

Håpet er at undersøkelsen skal bidra i den retningen, selv om resultatene ikke nødvendigvis kommer til å bli helt generaliserbare for hele Norges lærerbefolking på grunn av bekvemmelighetsutvalget som er gjort. Populasjonen som ble valgt for å minske omfanget på undersøkelsen på grunn av tiden tilgjengelig i en integrert master er «lærere på 4.-7. trinn som også er medlem av matematikkdidaktiske grupper på Internett». Dette ble gjort for at undersøkelsen kan distribueres over nett ved bare noen tastetrykk. 4.-7. trinn er valgt fordi dette er de trinnene man underviser brøk på etter læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020) og derfor blir undersøkelsen relevant for alle deltagerne når man spør matematikklærere på nettopp disse trinnene. Det forklares mer rundt populasjonen og selve undersøkelsen senere i oppgaven.

Ut fra dette ble problemstillingen formulert på følgende måte: *Hvordan representeres brøk visuelt av lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlemmer av matematikkdidaktiske grupper på Internett?*

Hypotesen blir at det er i Norge som det kan se ut med lærerstudenter Danmark (Putra, 2019), Slovenia og Kosovo (Kolar et al., 2018), at de foretrekker arealmodellen når de illustrerer brøk.

Brøk kan illustreres på mange måter i undervisningen, men i denne oppgaven er det valgt å undersøke hvordan brøk representeres som visuelle konkreta, for det å tegne en flat tegning eller illustrasjon av en brøk på en tavle stemmer overens med definisjonen av *pictorial manupulative*s (Cope, 2015). Kolar et al. (2018, s. 76) trekker frem at hver modell kan ha mange undermodeller eller fysiske former, men representasjoner på formen visuelle konkreta vil kunne kategoriseres inn i av de tre overordnede modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) for å visualisere brøk. For å spisse problemstillingen er den brutt ned i fire forskningsspørsmål som denne oppgaven skal forsøke å besvare:

1. *Hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) bruker lærerne for å representere brøk?*
2. *Foretrekker lærerne arealmodellen uavhengig av hvilken brøk som skal representeres?*
3. *Hvilke faktorer avgjør valg av representasjonsmodell?*
4. *Hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) bruker lærerne for å innføre brøk?*

Forskningsspørsmålene har selvfølgelig samme begrensninger i populasjonen som problemstillingen.

2.0 Teori

For å belyse problemstillingen vil det i teorikapittelet først fokuseres på det overordnet teorigrunnlag i form av konstruktivismen før teori og forskning om brøkmodeller og forståelse av brøk presenteres.

2.1 Overordnet teorigrunnlag - Konstruktivismen

De to mest kjente forskerne og skriverne vi har innenfor konstruktivismen må være Vygotsky (1896-1934) og Piaget (1896-1980). Pass (2004, s. 107) har gjort et grundig arbeid med en litteraturstudie hvor hensikten var å sammenligne og belyse samarbeid mellom Vygotsky og Piaget og hvilke likheter det gir utslag i deres arbeider. Vygotsky og Piaget sendte brev, bøker og manuskripter mellom Russland og Sveits (Pass, 2004). Dette foregikk uforstyrret i omtrent 5 år, helt frem til Stalin tok stålgrep om Sovjetunionen og etter dette ble det bare sporadisk klart å smugle kommunikasjon mellom de to, gjerne med flere års forsinkelse før manuskripter kom frem (Pass, 2004).

Pass (2004) oppsummerer likhetene gjennom det hun kaller *Combined pedagogy*: Begge var opptatt av individet i gruppen. Piaget ble etter hvert enig i at læreren kan ha en mer aktiv rolle i klasserommet, men legge til rette for at hver enkelt student får konstruerer sin egen kunnskap og forståelse av det man jobber med. Som verktøy for læring skiller begge mellom utvendig og innvendig språk, om man kommuniserer med andre eller om man tenker. De har begge stadier for utvikling hos barn, her ble Vygotsky enig om å ha like mange nivå som Piaget og Piaget godtok å ikke spesifiserer alder på utviklingsnivåene. De var enige om at læringsmiljøet må være et rikt miljø satt i riktig utviklingsnivå som barnet befinner seg i. Begge er enige om mentale formasjoner, mentale modeller som barn konstruerer for å løse problemer som et individ i en gruppe. Piaget sitt «equilibration» er lignende som Vygotsky sin ide om «internalization» (Steffe & Gale, 1995, s. 510). Vygotsky overtalte Piaget om at lek også kan innebære læring for barn. Piaget overbeviste Vygotsky om at feil er helt greit å gjøre og at barn kan lære av det, men de begge anbefaler at timene er satt i riktig utviklingsnivå så det er en rimelig sjanse for suksess. De var begge enige om at ikke alle kommer til å oppnå det høyeste nivået for utvikling, selv om de hadde forskjellige forklaringer på hvorfor. Begge var enige om «optimal mismatch» og «schaffolding».

Konstruktivismen er ikke bare en pedagogisk teori hvor man mener at kunnskap dannes gjennom at barn får interagere selv med noe og konstruere sin egen kunnskap, konstruktivismen er også en filosofisk teori. Packer og Goicoechea (2000, s. 228) skriver om den skjulte ontologien i konstruktivistiske læringsteorier. De drar frem at Piaget ikke skrev direkte om ontologi, men at han skrev i en tradisjon som strekker seg tilbake til Kant (1787). Kant blir kalt «quintessentially constructivist» (Phillips, 1995, s. 6) og Kant foreslo at sted, tid, kausalitet og objekter er former som menneskesinnet bringer til sin opplevelse av verden (Packer & Goicoechea, 2000). Fra Kant tok Piaget med seg den innsikten at den som vet noe er aktiv og la til en dimensjon om utvikling (Packer & Goicoechea, 2000).

Epistemologien i konstruktivismen er mer åpenlys, det handler om hva som er sikker kunnskap. Det er god og sikker kunnskap når individet selv har konstruert denne kunnskapen selv ifølge konstruktivistene. Ikke at man er sikker på at hver enkelt konstruerer kunnskap som er perfekt og uten misoppfatninger, for de indre kognitive skjemaene et menneske har utfordres og forandres gjennom våre erfaringer i prosessene Piaget beskriver som a*ssimilasjon* og *akkomodasjon (Piaget, 2003)*. Her ses ikke lengre konstruktivismen på et individnivå, men på det epistemologiske nivå, så om man har på seg «epistemologiske briller» er sikker kunnskap hva man selv har konstruert.

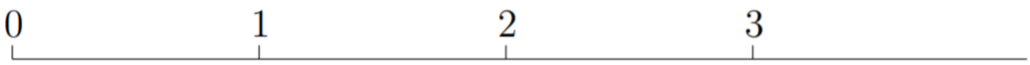
Det første begrepene som må avklares i en oppgave som undersøker visuelle representasjoner av brøk er det mest fundamentale; hva er egentlig brøk?

2.2 Begrepsavklaring: Rasjonelle tall og brøk

Matematikk krever at hvert konsept har en presis definisjon (Wu, 2008, s. 4). Wu (2008) påpeker at i det uformelle utforskningsstadiet av læring er ikke definisjoner det viktigste, men fra omkring 5. klasse må elevene ha tilgang på en definisjon av brøk. Hvis ikke blir de sittende og lure på det mest fundamentale, hva er egentlig en brøk?

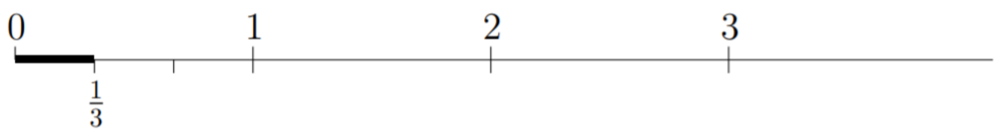
Kieren (1976, s. 103) definerer rasjonale tall som: «Rational numbers are elements of an infinite ordered quotient field» og «…are measures or points on a number line» som kan bli uttrykt «…of the form p/q, where p, q are integers and q ≠ 0.». Derfor er også brøk en del av de rasjonelle tallene påpeker Kieren (1976).

For å gi en brukbar og overførbar definisjon av brøk, må vi starte med en tallinje (Wu, 2008). En tallinje er allerede definert og kjent i matematikken, det er en ofte horisontal linje med lik avstand mellom heltallene, den har 0 på et punkt og negative tall oftest på venstre side og positive på høyre side i stigende rekkefølge. I dette tilfellet vil det være nok med en tallinje på intervallet $N = (0,1,2,3 \dots)$



Figur 1: Tallinje hentet fra Wu (2008)

Sekvensen mellom to heltall [0,1] er en hel og ikke bare spesifikt mellom 0 og 1, men mellom alle to etterfølgende heltall, dette er et viktig konsept. Skal brøken $\frac{1}{3}$ defineres må dermed dele området mellom to heltall for eksempel [0,1] deles i tre like store deler, og en tredjedel representerer en av disse tre delene.



Figur 2: Tallinje hentet fra Wu (2008)

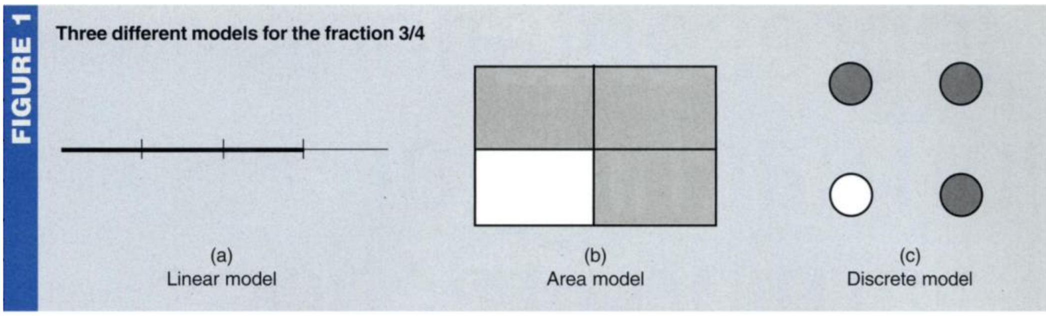
Og skal man regne med brøk i 3-deler kan man dele alle enhetene som representerer en hel inn i tre like store deler og man kan enkelt regne bortover tallinjen.

Definisjoner er ikke bare viktig for å kunne lese oppgaver som denne med forståelse for de konkrete begrepene, men også for å undervise brøk. Det at man tenker over hvilken modell man skal bruke når man representerer en brøk for elevene. Rett og slett være klar over at det er et valg, det å velge den modell som er mest hensiktsmessig for elevene i den gitt konteksten. Lamon (2012) trekker frem at det ikke er tilstrekkelig å bruke bare en modell for å lære elevene den komplette forståelsen for brøkenes 5 undertema (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Løsningen er kanskje ikke er så rett frem som å velge den riktige, men faktisk lære elevene å bruke og forstå alle modellene og underkategoriene av brøkkonseptet.

2.3 Areal-, lengde- og mengdemodellen

Watanabe (2002) forteller at i matematikk brukes representasjoner og modeller om en annen, vi kan for eksempel bruke en modell til å representere en matematisk ide. Noen ganger har de to ordene samme betydning og noen ganger litt forskjellig (Watanabe, 2002). Det blir naturligvis gjort også i denne oppgaven, i tillegg har beskrivelser som illustrasjon av brøk, visuelle konkreta en meget nærliggende betydning.

Van de Walle et al. (2016) presenterer tre anerkjente hovedmodeller som kan benyttes til å illustrere brøk visuelt; «area or region models, length or linear measurement models, and set models» (Kolar et al., 2018, s. 76). På norsk kan vi oversette dette med *areal-, lenge- og mengemodellen* (Austad, 2019; Gausen, 2017).



Figur 3: Hentet fra Watanabe (2002). Figuren illustrerer de 3 hovedmodellene for brøkrepresentasjon, a) Lengdemodell, b) Arealmodell og c) Mengdemodell.

Kolar et al. (2018, s. 76) trekker frem at hver modell kan ha mange undermodeller eller fysiske former. Hovedideene av de tre overordnede modellene for å visualisere brøk er presentert i figur 1 ovenfor.

2.4 Svakheter med brøkmodellene

Den som har undervist brøk eller har hatt undervisning om brøk kan kjenne seg igjen i at det ofte blir brukt arealmodellen for å visualisere brøk, ofte blir brøk vist som del av en «pizza». Dette er jo egentlig en strategi for å dele noe mellom flere personer, ikke en definisjon på brøk. Fordi «pizza-modellen» er så sterkt kontekstbasert kan elever ha problem med å overføre den til andre områder enn å dele, pai, kake og pizza mellom vennene sine (Wu, 2008). Den er ikke veldig hjelpsom i det å multiplisere to kakestykker eller dele et kakestykke på et annet, eller hvordan en kake kan hjelpe oss med å løse problemer angående fart eller forhold (Wu, 2008)?

Det som er så fint med en tallinje er at den er enklere for elevene enn «pizza»-modellen: De fleste studenter vil fortelle at en linje er lettere å dele i like store deler enn en sirkel, den er mer fleksibel på den måten at den ikke har en kontekst, man kan representere hva man vil bortover på en tallinje (Wu, 2008). Tallinje en plattform hvor alle brøk blir behandlet likeverdig (Wu, 2008), å dele et linjestykke i x-antall like store biter er mulig med en linjal, uansett hvor mange deler, men å dele en sirkel i like store deler legger enten regning på grader til grunn, eller at det er et partall antall deler.

Watanabe (2002) påpeker derimot at forskning har vist at mange elever har vanskeligheter med å bruke tallinje til å jobbe med brøk på. Tallinje som representasjon for brøk gir mest mening for elevene som allerede innehar forståelse for brøk som tallverdi (Watanabe, 2002). Det ligger derfor noe til grunn før man kan benytte lengdemodellen i undervisningen. Det å lære at brøk er et tall og har en tallverdi er noe som Gabriel (2016) forteller er viktig å lære elvene. Videre påpekes det at dette kan oppnås ved å fokusere på den relasjonelle forståelsen i undervisningen, lære elevene å virkelig forstå, hvordan, når og hvorfor bruke brøk. Undervisningsmetoder som innlemmer lek viser seg å være effektive i å utfordre elevene tik å konstruere kunnskapen på en måte som er meningsfylt for dem (Gabriel, 2016).

Putra (2019) påpeker enda en ting som må tenkes på når vi velger en modell for å representere brøk, og det er at «pizza»-modellen (sirkelformet arealmodell) fortrinnsvis fungerer for små rasjonelle tall på intervallet [0,1].

Kort oppsummert så har modellene sine styrker og svakheter ut ifra hvilken brøk eller kontekst som skal visualiseres. Problemstillingen har derfor ikke en fasitløsning i teori og tidligere forskning. Den prøver å belyse en situasjon i klasserommene og prøve å beskrive om den er like dynamisk som forskningen påpeker at den må være. På grunn av modellenes svakheter bør hvilken modell som benyttes forandre seg etter hvilken brøk og kontekst som skal representeres.

2.5 Brøkmodeller som visuelle konkreta

Osana og Royea (2011) trekker frem at det å illustrere brøk egentlig er å bruke en form for konkreta. Det finnes fysiske konkreta, billedlige konkreta og virtuelle konkreta (Cope, 2015). Det å tegne en flat tegning eller illustrasjon av en brøk på en tavle stemmer overens med definisjonen av *pictorial manupulative*s (Cope, 2015), som kan oversettes med visuelle eller billedlige konkreta. Piaget hadde en hypotese om at barn ikke var mentalt moderne nok til å forstå et abstrakt matematisk konsept hvis læreren bare presenterte det skriftlig (Cope, 2015). Piaget mente barn trenger flere møter med konkreter og tegninger for å forstå et abstrakt konsept (Cope, 2015). Så i læringsperspektiv er det å illustrere en brøk for elevene på tavlen et kraftfult verktøy.

De tre hovedmodellene for å representere brøk med, blir derimot ofte bare innført til å visualisere en brøk og ofte glemmer læreren at det ikke er intuitivt for elever at den skraverte delen er telleren til brøken (Watanabe, 2002). En lærer må altså ikke bare bruke modellene riktig, slik at det ikke oppstår misoppfatninger hos elevene, læreren må også forklare selve modellen til elevene. Dette ansvaret for å passe på at elevene forstår verktøyene, notasjonene og språket av representasjonene som brukes i undervisnignen er læreren sitt ansvar og kan bare bli oppnådd ved å følge nøye med på detaljene rundt dette (Watanabe, 2002).

2.6 Instrumentell og relasjonell forståelse

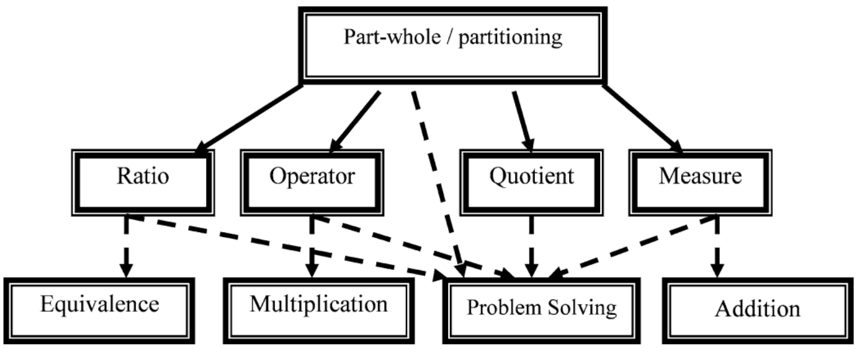
Det å lære elevene å forstå modellene, slik at de selv kan bruke modellene i utforskingen og argumenteringen rundt brøk, virker å være første steget med bruken av modeller for å representere brøk i undervisningen. Dette kan man oppnå gjennom å undervise med fokus på det Skemp (1976) kaller *Relational understanding*. På norsk kan Skemp sine to begreper oversettes til instrumentell og relasjonell forståelse.

Leser man Skemp (1976) sin artikkel om *Relational understanding* og *instrumental understanding* i matematikk, finner man ingen kort og konkret definisjon, det blir derimot presentert mange eksempler og begrepene blir gjennom disse godt belyst. Skemp (1976, s. 2) viser et veldig godt eksempel på forskjellen mellom instrumentell og relasjonell forståelse; en elev kan regne ut oppgaven og den andre eleven kan forklare begrepene og hvorfor det henger sammen og på det viset løser også denne eleven oppgaven. Det man forstår ut ifra eksemplene er at instrumentell forståelse av matematikk handler om å kunne bruke aritmetikken i matematikk, det å regne matematikk, mens relasjonell forståelse derimot handler om noe mer. Det handler om å kunne se sammenhenger og ha oppnådd en forståelse slik at en kan anvende matematikken på nye områder.

Skemp (1976) trekker også frem et viktig poeng; at dette ikke er to forskjellige typer matematikk man kan undervise i faget matematikk, det er bare en, selv om det legges til at lærere burde strebe etter å gi elevene en relasjonell forståelse i matematikken. Skemp (1976) kommer med et godt poeng: At selv om lærerne skal strebe etter å gi elevene muligheter til å konstruere en relasjonell forståelse og utfordre deres mentale skjema, så kan det hende noen elever lærer best og bare den instrumentelle forståelsen eller visa versa. Disse elevene må man også ta hensyn til og dermed ikke legge opp til bare undervisning og vurdering etter oppgaver som fordrer ensidig instrumentell eller bare relasjonell tankegang.

2.7 Brøkens kompleksitet

I brøk er relasjonell forståelse viktig, for brøk er et komplekst tema som ifølge Kieren (1976) må deles inn i fire underkategorier *forholdstall (ratio), operator (operator), kvotient (quotient), og tallmåling (measurement).* Deretter ble dette videreutviklet av Behr et al. (1983) med en ekstra underkategori, nemlig: *del av helhet (part-whole).* En forklaring på elevers vanskeligheter med brøk er kompleksiteten i brøkbegrepet (Torbergsen & Brandsegg, 2015, s. 22).



Figur 4: En teoretisk modell for hvordan brøkens 5 underkategorier og problemløsning henger sammen (Behr et al., 1983).

Steffe og Olive (2009) presenterer forskjellige nivåer for argumentasjon om *del av helhet:* Del av helhet som et konsept som innebærer deling av en hel. Går man enda dypere, snakkes det om å ta en del ut av den hele og navngi den som en brøkdel av den hele. Neste argumentasjonsnivå innebærer også en iterasjon, at man kan gå tilbake, fra en brøkdel kan den hele konstrueres igjen. Igjen kan man iterere, man kan ta en brøkdel av en allerede eksisterende brøkdel. Gjennom dette kommer det godt frem hva som ligger i denne underkategorien på forskjellige nivåer av forståelse og argumentasjon.

Forholdstall i brøk handler om at brøken representerer en sammenligning mellom to mengder (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), derfor er den sett på som en komparativ indeks, heller enn et tall (Carraher, 1996). Lamon (1999) definerer *rates* som en sammenligning av to mengder av forskjellige typer, men *forhold* forklarer han som sammenligning av to mengder av samme type.

Brøk som operator handler om at man fortolker brøk eller rasjonelle tall som en funksjon eller en operasjon man gjør med noen tall eller et objekt (Behr et al., 1983; Marshall, 1993). Skal man mestre denne underdelen av brøkkonseptet så fordrer det at man har en god relasjonell forståelse om konteksten i brøkdeling. Kieren (1976) påpeker at det finnes *partitive* og *quotitive* divisjon, hvor den første ifølge Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) er når man deler et tall i grupper av noe, altså vi vil finne ut hvor mange grupper, mens den siste er når tall deles inn i et kjent antall grupper og finner ut hvor mange som havner i hver gruppe.

Tallmåling i brøk består av to relaterte, men individuelle forestillinger (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), den første er at brøk er ansett som et tall. Den andre er at man kan se på brøken som en måldel av et intervall. Mer presist blir en brøk brukt til å bestemme en lengde fra et startpunkt, hvor eksempel ¾ korresponderer til distansen av tre stykk ¼-enheter fra en gitt punkt (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Selv om notasjonen av den siste måten å bruke tallmåling i brøk på ser enkle nok ut, sier Carraher (1996, s. 241) at det er: "pedagogically naive as well as psychologically inaccurate to believe that it is easy for students to understand this concept".

Kvotienten i brøk er helt enkelt forklart svaret i et divisjonsstykke, hvor dividenden deles på divisoren, men siden svaret kan skrives som en brøk kan man betrakte hele delestykket som en kvotient. «Within the quotient subconstruct, any fraction can be seen as the result of a division situation» (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det vil si at når det tenkes på brøk som kvotient, tenkes det egentlig at brøk er et svar på en deleutfordring som brøken representerer (Kieren, 1976). For å mestre denne underdelen av brøk fordrer det også god forståelse for *partitive* og *quotitive* divisjon (Kieren, 1976; Marshall, 1993). Lamon (1999) påpeker at brøk som kvotient ofte brukes i aktiviteter hvor man deler likt, og at i en slik setting er det viktig å ha god oversikt over rollen og konteksten til dividenden og divisoren.

2.8 Norske elevers brøkkunnskap

Har man god forståelse for disse fem underkategoriene av brøkbegrepet har man oppnådd god brøkforståelse, men det er få kjente norske studier som tar for seg brøkforståelse hos elevene (Bjerke et al., 2013). I TIMSS er det særlig i områdene *Tall på 4. trinn* og *Algebra på 8. trinn* de norske elevene scorer svakest (Grønmo et al., 2011), og brøk er en del av disse kategoriene (Torbergsen & Brandsegg, 2015, s. 22). PISA rapporterer at nesten annenhver norske elev (46%) scorer på ett nivå som indikerer at de har problemer med å løse oppgaver som involverer brøk og prosent (Torbergsen & Brandsegg, 2015, s. 22). Lærere på ungdomsskolen og videregående skole i Norge rapporterer at elevene sliter med brøkregning (Utdanningsdirektoratet, 2012), spesielt har elevene svak forståelse for regneoperasjoner og brøkbegrepet som helhet. Dette forteller oss at brøkundervisning er et område som skolen kan forbedre seg på.

Det er tydelig etter denne raske gjennomgangen av brøkens underkategorier at temaet brøk som oppgaven prøver å belyse er av et stort omfang og det er dermed også nødvendig å avgrense hva man presenterer forsking om. Det blir fokusert på bruken av brøkmodellene og litt om hvordan forskningen sier man bør undervise brøk. Dette spisser også oppgaven imot hva problemstillingen spør om. Nemlig hvordan brøk representeres visuelt med de tre hovedmodellene areal-, lengde- og mengdemodellen.

2.9 Forskning på bruk av brøkmodellene

I Danmark har Putra (2019) gjennomført en kvalitativ undersøkelse med 11 lærerstudenter som utvalg. Metoden gikk ut på å gi studentene *Hypothetical Teacher Tasks* (Durand-Guerrier et al., 2010) og deretter se på hvilke individuelle og kollektive kunnskaper studentene viste i rasjonelle tall ut fra svarene på oppgavene. Et av funnene var at studentene foretrekker å forklare de matematiske operasjonene involvert i oppgavene basert på «pizzamodellen» og Putra (2019, s. 628) trekker frem at denne konteksten fungerer godt for første oppgave, men ikke for neste oppgave. Dette fordi arealmodellen har sine begrensinger og fungerer best og er mest intuitiv som illustrasjon for brøk på intervallet [0,1]. Et annet funn var at studentene forklarer med dagligdagse eksempler (Putra, 2019, s. 628), noe som i og for seg er et positivt didaktisk trekk. Osana og Royea (2011) tester 8 lærerstudenter før studentene har tatt matematikk på lærerskolen og konkluderer med at de må bli flinkere til å relatere forklaringene sin til virkeligheten, for det er noe de får bruk for ute i klasserommet. Dette bare understreker at ikke alle lærerstudenter i verden er like og resultatene derfor ikke automatisk er generaliserbare.

Blant svakhetene med studien til Putra (2019, s. 628) er at utvalget er begrenset til 11 studenter og studentene går sitt første år på lærerskolen og alle har hatt samme lærer. Denne lille studien er derfor ikke nødvendigvis generaliserbar for hva alle lærere gjør ute i klasserommet, særlig siden denne studien er gjennomført i et annet lang også. Derimot kan undersøkelsen si noe om tendensen og legge grunnlag for en hypotese om hvordan det kan stå til her i vårt eget ganske land.

Kolar et al. (2018) kjørte en test i rasjonelle tall på lærerstudenter (N=169) i Kosovo og Slovenia. I sitt 3. forskningsspørsmål ser de på om hvordan formen man representerer en brøk på, henger sammen med suksessen for å løse oppgaven. Kolar et al. (2018, s. 86) oppdaget at det er en sammenheng som kommer til syne gjennom at den mest effektive formen, altså den som gir størst suksess er et rektangel (gjennomsnittlig suksess med rektangel: 88,2% Kosovo og 82,8% Slovenia). Videre finner de at den formen med minst utslag på suksessen var trekant (gjennomsnitt: 64,5% Kosovo og 51,3% Slovenia). Alle mulighetene de så på var innenfor arealmodell-domenet, men funnet bygges opp under av resultatet fra tidligere studier (Piaget, 1960; Pothier & Sawada, 1983) om at rektangelet er den letteste formen for å utvikle den aller første brøkforståelsen med (Kolar et al., 2018, s. 86).

Arealmodellen viser seg å være en del utforsket og har sine styrker og svakheter, men fortsatt så mangler det store overordnede bildet på hvilken av de tre anerkjente modellene lærerne faktisk bruker i klasserommet.

Det som er enda mer relevant for denne oppgaven er Kolar et al. (2018, s. 79) sitt 4. forskningsspørsmål: Studentene fikk en oppgave om å representere brøken $\frac{4}{5}$ på tre ulike måter. Funnet ble at de fleste representerer brøken som del av en hel figur, en sirkel eller rektangel, hvor rektangel var blant en av de tre representasjonene for 78,9% av studentene. Deretter var sett av objekter (mengdemodellen) en av representasjonene for 56,6% av studentene. Bare 34,4% hadde tallinje (lengdemodell) som en av sine representasjoner. Enda færre representerte brøken som noe annet enn del av hel, 3,9% av studentene fra Slovenia og 6,5% av studentene fra Kosovo brukte en av de tre representasjonene sine på å representere $\frac{4}{5}$ som en delingsdivisjon eller som et desimaltall (0.8).

Det kommer frem at bruken av de forskjellige modellene av lærerstudenter i Slovenia og Kosovo avtar i rekkefølgen, 1. arealmodell, 2. mengdemodellen og 3. lengdemodellen. Denne undersøkelsen er større i kvantitativt omfang enn de forrige (Osana & Royea, 2011; Putra, 2019), men det er fortsatt lærerstudenter man forsker på og ikke ferdig utdannede lærere som jobber i skolen. Denne undersøkelsen kan gi oss mye informasjon, men den kartlegger egentlig forkunnskaper om brøk generelt og ikke direkte hvordan faktiske lærere ute i skolen representerer brøk.

Svakheten som kan ses i funnene av det 4. forskningsspørsmålet er at alt baserer seg på at studentene skal representere brøken $\frac{4}{5}$ på tre forskjellige måter, og denne brøken er under en hel. Dermed får man ikke sjekket om studentene forandrer måte å representere brøken på når arealmodellen mister sin fleksibilitet, altså at man beveger seg utenfor intervallet [0,1], men det kommer tydelig frem at studentene foretrekker Arealmodellen og spesifikt rektangel for brøk under 1 hel (Kolar et al., 2018).

2.10 Hvordan sier forskningen at vi skal undervise brøk?

Naiser et al. (2003) observerte 8 lærere over en periode på 4 måneder og hadde fokus på gode strategier nå brøk undervises. De gode strategiene som Naiser et al. (2003) trekker frem er; viktigheten av å involvere elevenes personlige liv i matematikken, bruke konkreta for å se elevenes tankegang, samt gjøre timene mer elevinvolverte og gi mulighet for at de kan snakke og reflektere sammen. Dette er mer generelle råd som godt kan brukes utenfor brøkundervisningen også. Naiser et al. (2003) prøver også å komme med tre mer konkrete tiltak i klasserommet nå man underviser med brøk: at man bør bygge undervisningen på elevenes tidligere kunnskaper, la elevene skrive «funnene» sine i en journal og legge til rette for refleksjoner om egne og andres strategier. Naiser et al. (2003) skriver også at det er mer meningsfylt for elevene når de får konstruert sin egen forståelse for brøk.

Son og Crespo (2009) gav oppgaver til lærerstudenter og finner at de oftest forteller elever hvordan det skal gjøres, istedenfor å høre på elevene. Dette blir jo motsatt av hva Naiser et al. (2003) sier om at undervisningen bør være elevorientert og skape arenaer hvor elevene kan konstruere sin egen brøkkunnskap. På bakgrunn av et slikt funn bør lærer tenke over hvordan de skal rettlede og hjelpe elever i klasserommet.

Kolar et al. (2018, s. 76) trekker frem at ifølge National Mathematics Advisory Panel (2008) er det å kunne representere brøk på tallinje en viktig mekanisme for å koble relasjonell og instrumentell forståelse innen brøk. Hamdan og Gunderson (2017) beskriver at det er fordi det å representere brøk på tallinje bedrer elevers evne til å se sammenhengen mellom numeriske og romlige egenskaper, noe som tilrettelegger for en dypere forståelse for brøkens verdi.

Gabriel (2016) fokuserer på at det er viktig for elevene å forstå verdien av brøk og trekker frem estimat av verdien til brøk på tallinje som en velegnet strategi.

Martinussen og Smestad (2010) trekker frem at det er viktig for brøkforståelsen med kontekst og illustrasjon av brøk. De bruker i sin artikkel arealmodellen for å illustrere brøk, for å bidra til elevenes forståelse av brøk, noe som støttes av (Piaget, 1960; Pothier & Sawada, 1983) om at arealmodellen i form av rektangel er den letteste formen for å utvikle den aller første brøkforståelsen med.

Moss og Case (1999) trekker frem tre viktige trekk man kan gjøre for å forbedre brøkundervisningen: 1. Øke fokus på forståelse av rasjonelle tall fremfor regneprosedyrene. 2. Bruke mindre «pizza-modell» når man tegner brøk og heller mer av andre former for visualisering. 3. Bygg videre på elevenes selvoppdagede strategier.

Det som går igjen er at brøk bør representeres med visuelle konkreta, men at hver av modellene har sine styrker og svakheter. Det kan derfor se ut som det er viktig for lærerne å ha kunnskap om modellene for å se når det er mest hensiktsmessig å bruke de forskjellige modellene.

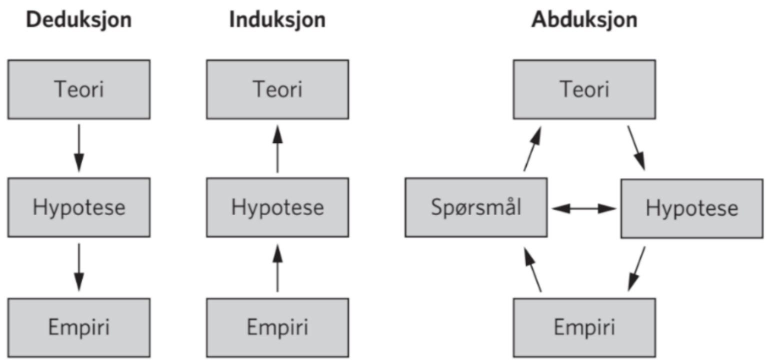
Baturo (2004) oppsummerer mye annen forskning, men den innfallsvinkelen som går igjen er at har du lært opp lærerne godt, slik at lærerne sitter inne med en god relasjonell forståelse for brøk, får man også elever med bedre forståelse for brøk. Gabriel et al. (2013) undersøkte 439 elever i Belgia sine ferdigheter i brøk. Funnene ble mange vanlige misoppfatninger innenfor brøk elevene kan ha. Disse misoppfatningene er eksempler på hva en lærer også bør ha kunnskap og forståelse om, slik at det kan legge til rette for at elevene unngår å ha misoppfatninger om brøk som får vedvare. Dette er en praktisk implementering av det å lese forskning innenfor det temaet man underviser.

Ball (1993) har et mer filosofisk perspektiv, men fremhever viktigheten av hva lærere vet og tror om matematikk. Ball (1993) mener det er viktig å tenke over hva man tror om matematikk, siden dette påvirker undervisningsstilen. Tror en lærer at matematikk er kjedelig, så blir det enten kjedelig eller at det legges for stor vekt på å gjøre timene artige, så mye at det kan gå på bekostning av forståelsen hos elevene. Ball (1993) trekker også frem at det må tenkes tilbake, over hvilke lærere som underviste oss og gjennom den prosessen unngå å bli akkurat som de på både godt og vondt. Har dette skjedd må hver og en gå i seg selv og revurdere hvordan man tenker om matematikkundervisning sin.

Det gis ingen enkel fasit på det å undervise brøk i noen av artiklene, men det trekkes frem en del generelle ting man må tenke på, som vår egen holdning til faget matematikk og at undervisningen bør være elevsentrert og legge opp til refleksjoner. Andre artikler derimot kommer med mer konkrete metoder lærere kan bruke for å forbedre brøkforståelsen hos elevene. Det som trekkes frem av flere er at arbeid med brøk på tallinje er bra for brøkforståelsen. Andre trekker frem at den aller første brøkforståelsen utvikles mest effektivt med arealmodellen.

3.0 Metode

3.1 Arbeidsprosessen



Figur 5 er hentet fra Postholm et al. (2018, s. 103) og illustrerer de forskjellige arbeidsprosessene forskning kan følge.

Arbeidsprosessen så langt har vært en abduktiv prosess som startet med FoU-oppgaven, deretter en pilot og her er resultatet, en oppgave basert på et spørreskjema som undersøker hvordan lærere representerer brøk.

3.2 Design på undersøkelsen

For å svare på problemstillingen «Hvordan representeres brøk visuelt av lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlem av matematikkdidaktiske grupper på Internett?» kunne man hatt en liten lokal kvalitativ undersøkelsen som Putra (2019) og Osana og Royea (2011). Resultatene av slike undersøkelser kan si noe om en veldig begrenset populasjon og siden ønsket er å si noe om tendensen til en større populasjon har en kvantitativ metode blitt valgt. Det er også interessant å undersøke noe på en måte som kan utfylle allerede eksisterende forskning på feltet, siden det finnes få om noen kvantitative undersøkelser om hvordan lærere representerer brøk i Norge. I alle fall i den tilgjengelige delen av forskning og som er publisert og fagfellevurdert.

Planen er å gjennomføre en kvantitativ undersøkelse med et nettbasert spørreskjema aktivt promotert gjennom matematikkdidaktiske fellessider for lærere på internett. Dette kan virke fornuftig siden man har en problemstilling innenfor et tema som man vil undersøke og ifølge Postholm et al. (2018, s. 103) er spørreskjemaundersøkelser en lukket tilnærming, noe som er en fordel om man vet hva man vil undersøke spesifikt. Postholm et al. (2018, s. 186) trekker også frem styrker og svakheter med denne metoden:

3.2.1 Styrker ved metoden

En webbasert undersøkelse har lave kostnader, det er ingen porto, trykking eller utgifter som ved en telefonundersøkelse. Dette passer utmerket med forskerrollen i en integrert masterstudie, hvor forskeren først og fremst er student, uten tilgang på forskningsstøtte og stipendiater, slik som de som forsker på heltid.

Et spørreskjema på Internett er også sterkt arbeidsbesparende, ingen manuell innføring av data, dette gjør deltakeren selv og forskeren får en rapport ferdig ut av systemet eller et Excel-dokument ferdig fylt inn med alle dataene. Dette ble godt merket i arbeidet med denne oppgaven, det å klargjøre datasettet for SPSS tok bare 10,5 time med effektivt arbeid. Fra undersøkelsen ble avsluttet og frem til alt var lagt til rette i SPSS for å begynne analyser av datasettet. Lurer om en transkribering av videopptak eller intervjuopptak for eksempel er litt mer tidkrevende?

Det er irrelevant når spørreskjemaet sendes ut, en deltager kan besvare undersøkelsen når den selv ønsker og når vedkommende oppdager posten på Internett om spørreundersøkelsen. Dette kalles Asynkronisitet, at deltagerne kan delta akkurat når det passer dem og er sett på som en styrke.

Intervjuereffekten er lav ved slike spørreskjema, fordi selve personen som stiller spørsmålene er ute av bildet. Derfor blir spørsmålene mer nøytralt oppfattet av alle som svarer på undersøkelsen.

En annen styrke er at hver enkelt deltagers opplevde anonymitet er høy og derfor deles det lettere sensitiv informasjon enn ved for eksempel telefonintervju, fordi deltageren føler seg mer anonym.

3.2.2 Svakheter ved metoden

En av svakhetene er å få en god representativitet av populasjonen. Selv om undersøkelsen når ut til mange er svarprosenten ofte lav med webskjema og man oppnår kanskje en skjevfordelt gruppe, hvor bare de som er ganske ressurssterke og relativt interesserte i problemstillingen velger å delta på undersøkelsen.

En webbasert undersøkelse er raskt å legge ut, men problemet er at mange venter med å svare og derfor tar det likevel ganske lang tid og mye promotering for å få inn ønsket antall deltagere. En annen realitet er det virker som det er en oversvømmelse av spørreundersøkelser på Internett nå på etterjulsvinteren 2022, mest sannsynlig fordi alle lærerstudenter må skrive masteroppgaver fra i år av. Det kan virke som dette bidrar til at færre velger hver enkelt undersøkelse, en enkelt undersøkelse drukner rett og slett i mengden. På pilotundersøkelsen (vedlegg 1) for et år siden kom det inn rundt 150 svar i løpet av en uke. Nå et år senere kom det inn omtrent 50 svar i løpet av to uker, samme fremgangsmåte for promotering ble brukt og samme sidene på Internett ble brukt til promotering.

Manglende interaksjon mellom forskeren og deltagerne kan ses på som en svakhet med denne metoden. Man mister muligheten til å gå i dialog for å oppklare uklarheter eller utdype spørsmå. Det er derfor ekstra viktig med en pilotundersøkelse, for å luke ut feil og unngå misforståelser eller uklare spørsmål på forhånd. Selve masterundersøkelsen ble også testet på medstudenter og sendt til veiledning før den ble publisert.

3.2.3 Populasjon og utvalg

Populasjonen er avgrenset til 4.-7. trinn og dette er gjort fordi det i læreplanene legges opp til å begynne med innføring av brøk fra 4. trinn av. I piloten var populasjonen lærere i 1.-7. klasse og det var en av de store feilene som ble gjort, for de som underviste i 1.-3. klasse hadde ikke nødvendigvis undervist brøk og fant undersøkelsen irrelevant.

Ser man på tallene i Kunnskapsdepartementet (GSI) kommer det frem at på 5.-7. trinn i Norge jobber det ca. 21000 lærere og 23500 på 1.-4. trinn. Det er snakk om opp mot 27000 lærere som underviser på 4.-7. trinn i Norge om man legger prosentvis fordeling mellom trinnene til grunn. Det er derimot enda en begrensing i populasjonen og det er at lærerne må være medlem av matematikkdidaktiske grupper på internett.

Dette bekvemmelighetsvalget med å begrense populasjon blir gjort av flere grunner. En grunn er tiden som er tilgjengelig til å gjennomføre prosjektet i en integrert master. I denne populasjonen finner man mest sannsynlig engasjerte lærere og det er en større sjanse for at disse er mer motivert og dermed har lyst til å bidra til forskning. På det viset kan en anta at det tar kortere tid fra undersøkelsen lanseres og til forskeren sitter med datamateriale som kan analyseres, fordi det kan antas at populasjonen har genuin interesse av å delta i matematikkforskning. Tiden det tar, kommer i alle fall til å være vesentlig raskere enn om man måtte startet arbeidet med hver enkelt rektor for å rekruttere skoler og lærere til undersøkelsen.

Videre kan det antas at lærere som er medlem av slike grupper er genuint interesserte i matematikkundervisning, at ved å spørre disse lærerne blir utvalget bestående av lærere som er interesserte i å gi reflekterte svar, fordi de selv har valgt å delta, både i gruppen og på spørreundersøkelsen.

Det som gjør det vanskelig å tallfeste størrelsen på populasjonen er at det er mulig å være medlem av så mange grupper man ønsker på det frie Internett. Derfor er det ikke så enkelt som å legge sammen alle deltagerne i alle gruppene og få størrelsen på utvalget. Noen grupper er dessuten relevante for lærere utenfor 4.-7. klasse og har mange medlemmer som derfor naturlig faller utenfor populasjonen. Medlemstallene på gruppene som undersøkelsen ble lagt ut på, er i mars 2022:

- Undervisningsopplegg naturfag og matematikk 1.-10. trinn – 10 300 medlemmer.
- Matematikkside for lærere i grunnskolen – ca. 10 200 medlemmer
- Matetematikkdidaktikk – ca. 18 700 medlemmer.

Denne siden diskuteres det om tema som tydelig stammer helt fra 1. klasse og opp til universitetsnivå. Så alle her er tydelig ikke en del av populasjonen.

Om det sees på de to gruppene som er for grunnskolen og antar prosentvis fordeling mellom trinn og medlemmer, kommer man frem til at det er omtrent 1000 medlemmer per trinn. Og populasjonen vår omfavner 4 trinn, kanskje rundt 4000 i populasjonen om alle medlemmene er medlem av alle tre gruppene. Flere om det er bare individuelle medlemmer. Så en plass mellom 4000 og 16000 personer tilhører nok populasjonen vår, vil anta at det virkelige tallet forskjellige lærere i populasjonen er nærmere 4 tusen enn 16 tusen.

En ulempe med å begrense populasjonen slik at den ikke omfatter alle mattelærere på 4.-7. trinn i Norge, er at man ikke får et hundre prosent automatisk generaliserbart bilde av hva alle lærerne gjør ute i skolen. Klarer man derimot å finne ut hvorfor de velger de forskjellige modellene til å visualisere brøk, kanskje man ser at det er en faktor uavhengig av engasjementet som avgjør, da kan man argumentere for at resultatet er generaliserbart. Tenkt tilfelle er at alle valgte en modell fordi læreverkene la opp til det for eksempel, da kan man anta at det er generaliserbart fordi det er en faktor uavhengig om det er en lærer som er engasjert eller ikke som ligger til grunn for valget av representasjonsmodell.

En annen ulempe med å begrense utvalget er at det kan hende ikke alle matematikklærere på 4.-7. trinn er aktive brukere av Internett, tidligere kunne man sagt at man dermed utelukker eldre lærere med mye erfaring og mye kunnskap fra å delta i undersøkelsen og det hadde jo vært en svakhet med undersøkelsen. I dagens samfunn derimot, hvor mange besteforeldre er både på Facebook og Snapchat, kan det virke som for hvert år som går ekskluderes færre og færre ved å velge en slik populasjon. Datamaterialet viser deltagere i utvalget fra 1 års erfaring til 36 år, så det virker ikke som man ekskluderer en spesifikk aldersgruppe.

3.2.4 Spørreskjemaet

For å samle inn primærdata ved bruk av en kvantitativ metode så er det en type spørreskjema som dominerer og det er spørreskjema med lukkede svaralternativer (Postholm et al., 2018, s. 166). Denne undersøkelsen er ikke noe unntak og er bygget opp med slike svaralternativer. Undersøkelsen prøver å operasjonalisere problemstillingen til spørsmål som har lukkede svaralternativer som derfor er ferdig kategorisert og klare til å analyseres. Det er viktig med godt forarbeid med spørsmålene og svaralternativene i en spørreundersøkelse, for det er små muligheter for å justere opplegget når man først har sendt ut spørreskjemaet (Postholm et al., 2018, s. 166).

For å adressere forholdet mellom problemstilling og forskningsdeltager er det viktig at spørreundersøkelsen starter med avgrensende spørsmål for å se at utvalget faktisk er en del av populasjonen som skal undersøkes. Dette er spesielt viktig når undersøkelsen er frivillig å delta i, og ikke blir fysisk levert ut til de man vet er i populasjonen. Dette er viktig for kvaliteten av funnene, at man kan vise til at det er en ryddig prosess med å samle inn data fra riktig populasjon og resultatene derfor kan si noe med sikkerhet om akkurat denne populasjonen. Spørreundersøkelsen i sin helhet med svaralternativer er lagt ved oppgaven i vedlegg 2 og der vises godt at spørsmål 1 og 2 er slike bakgrunnsspørsmål for å verifisere at deltageren er i populasjonen.

1. I hvilket fylke underviser du matematikk på 4.-7. trinn?
2. På hvilke(t) årstrinn underviser du matematikk?

Spørsmålene 5-7, 9-12, 15 og 17-18 er utelukkende på nominalnivå, hvor svarene er kategoriske og brukes til å gruppere svarene i kategorier (Postholm et al., 2018, s. 171). Spørsmålene 3 og 4 er på høyere nivå, siden svaret er et tall, dette kalles for at variablene har svaralternativer på forholdstall (Postholm et al., 2018). Spørsmål 8, 13,14 og 16 er variabler som rangerer svarene og kalles rangordnede spørsmål (Postholm et al., 2018).

Når det operasjonaliseres enkle begreper som ikke er flerdimensjonale og abstrakte, er det nok med å stille et spørsmål (Postholm et al., 2018, s. 167). Eksempel på slike begrep er kjønn, år med arbeidserfaring, antall studiepoeng etc. I undersøkelsen er det flere slike spørsmål:

3. a) Hvor mange år har du jobbet som lærer?
3. b) Hvor mange av disse årene har du undervist i matematikk?
4. Hvor mange studiepoeng har du i faget matematikk?
5. Har du skrevet mastergrad i matematikk?
6. Underviser du i andre fag i tillegg til matematikk?
6. b) Hvilke fag underviser du utenom matematikk?

7. Hvilket biologisk kjønn har du?
8. Hvilket intervall beskriver best lengden det går mellom hver gang du leser en forskningsartikkel fra fagfeltet matematikk?

I analysearbeidet vil slike spørsmål være kategorier man kan dele utvalget inn etter. Det er også viktig for å kunne si noe om utvalget, om det er et representativt utvalg. Når det kommer til mer komplekse begrep må det brukes flere spørsmål (Postholm et al., 2018). Eksempel på dette i undersøkelsen er om lærerne har innført brøk (spørsmål 9. a-c) og selve hovedspørsmålene i undersøkelsen (spørsmål 10-12), hvordan lærerne vil visualisere 3 distinkt forskjellige brøker, med forskjellige egenskaper og dermed forskjellige svakheter ved bruk av modellene for å illustrere brøk med. Det er flere komplekse begrep som undersøkes i undersøkelsen og er knyttet til problemstillingen og forskningsspørsmålene:

9. Har du noen gang innført brøk for første gang i en klasse?
9. b) Husker du hva som var den første metoden du brukte for å visualisere brøk for elevene?
9. c) Husker du hvilken metode du brukte mest igjennom hele innføringsprosessen for å visualisere brøk for elevene?
10. Hvilket av alternativene nedenfor ligner mest på slik du ville illustrert brøken 6/4 for elevene?
11. Hvilket av alternativene nedenfor ligner mest på slik du ville illustrert brøken 1/4 for elevene?
12. Hvilket av alternativene nedenfor ligner mest på slik du ville illustrert brøken 1/9 for elevene?

Spørsmål 10-12 er stilt litt i samme stil som Kolar et al. (2018) sitt 4. forskningsspørsmål, hvor lærerstudentene skulle velge seg 3 representasjoner for brøken $\frac{4}{5}$. Her er det derimot valgt å belyse spørsmålet med 3 dristigst forskjellige brøker for å se om lærerne har en forståelse for bruken av modellene som er dynamisk og velger den modellen som fungerer best til brøken som skal illustreres. Derfor er spørsmål 10-12 konstruert for å få svar på hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) lærerne bruker for å representere brøk, i tillegg til om lærerne foretrekker noen av modellene uavhengig av hvilken brøk som skal representeres. Spørsmål 13-14 støtter opp og verifiserer funnene i spørsmål 10-12.

13. Vurder modellene for å visualisere brøk etter hvor ofte du bruker dem når du skal visuelt representere brøk for elevene?
14. Hvilken måte bruker du oftest for å representere en brøk i undervisningen?

Deretter blir det spurt en del spørsmål for å prøve å avgjøre faktorer som kan ligge bak valget av metode. Disse er ment for å svare på et av forskningsspørsmålene: 3. Hvilke faktorer avgjør valg av representasjonsmodell?

15. Hvilke av faktorene nedenfor er mest avgjørende når du bestemmer hvilke(n) måte du illustrerer brøk på i undervisningen?
15. b) Hvilket læreverk i matematikk bruker dere?
16. Hvilken undervisningsmetode er den du bruker mest av i din matematikkundervisning når det undervises brøk?

Spørsmål 17 i undersøkelsen er designet for å i all hovedsak verifisere svarene i tidligere spørsmål, men den innfører også noen nye påstander man kan analyserer funn opp mot.

17. Nest siste spørsmål: "10" kjappe påstander om din matematikkundervisning:

Spørsmål 18 er direkte hentet fra Stigler et al. (2010) og er designet for å kunne si noe om lærernes forståelse av brøk. Selv om undersøkelsen i sin hovedsak handler om representasjon av brøk, kan tenkes at forståelse for brøk kan være en interessant faktor å analysere andre variabler opp imot.

18. Identifiser den største av de 4 brøkene:

3.3 Statistisk analyse

Analysen av datamaterialet vil foregå som statistiske analyser gjennomført i programmet SPSS. Da kan man undersøke om det er signifikante forskjeller eller korrelasjoner mellom variabler i det innsamlede datamaterialet. Deretter presenteres resultatene og funnene man gjør seg diskuteres opp mot eksisterende forskning.

Det som er viktige å tenke på her, er at resultatene rapporteres på en korrekt måte, at tallene fra analysene faktisk opplyses, at det ikke bare skrives med ord at resultatet er signifikant eller ikke. På den måten er resultatene tilgjengelige for leseren og leseren kan selv kritisk lese tallene og avgjøre størrelsen på korrelasjonen for eksempel på egenhånd uten å ha tilgang til datamaterialet.

Skal man benytte seg av parametriske tester i SPSS som bygger på det bedre fordelte sentralmålet gjennomsnitt, enn de ikke-parametriske testene som bygger på sentralmålet median, så må det først undersøkes om det er brudd i en av de fire forutsetningene for å kjøre en parametrisk versjon av statistiske tester:

1. Uavhengig utvalg (tilfeldig utvalg).

I denne oppgaven er ikke utvalget trukket helt tilfeldig, men det er utvalg fra en populasjon og ut fra deskriptiv statistikk som presenteres først i resultatkapittelet om utvalget, så er utvalget godt fordelt og virker å være en god representasjon for populasjonen og man kan til og med argumentere at det er likhet med hele lærerdemografien i Norge generelt. Derfor behandles utvalget som tilfeldig i resten av oppgaven.

2. Den avhengige variabelen er på høyt nok målenivå. Det vil si intervallnivå eller høyere.

Dette fordrer en god og nøytral *Likert skala* som svaralternativ eller at svaret er i tall, altså på forholdsnivå. I undersøkelsen er det flest lukkede spørsmål med kategoriske svaralternativer som gjør at det veldig ofte kommer til å bli brudd på denne forutsetningen i datasettet. Det er derfor mest nærliggende at de ikke-parametriske versjonene av testene oftest blir valgt.

3. Normalfordeling i datamaterialet.

I SPSS undersøkeler man normalfordelinen ved å trykke: Analyze→Descriptiv statistics → explore. Huk av for «normality plots with tests» under knappen «plots». Når man leser tabellen må det sees etter Shapiro-Wilk og dette gjøres fordi utvalget er mindre enn 50. Er det flere enn 50 i utvalget sees det på den signifikante av Kolmogorov-Smirnova. Her er fordelaktig at det ikke er en signifikant forskjell, dette fordi når det ikke er en signifikant forskjell i normalfordelingen, så er normalfordelingen lik.

4. Lik varians innad i variablene som undersøkes.

For å undersøke om variansen er lik må det kjøres den testen man ønsker og se etter «Levene Statistic» blant resultatene. Her er man ute etter en P som er større enn 0,05 ($p > 0,05$). Dette fordi når det ikke er en signifikant forskjell i varians, er variansen lik. Da er forutsetningen om lik varians oppfylt og har ingen av de andre forutsetninger blitt brutt, kan det kjøres den parametriske versjon av testen.

3.3.1 Korrelasjonsanalyser

Det er nærliggende å tro at det er naturlig å se på sammenhengen mellom variabler i datasettet. Da er det korrelasjonsanalysen Person eller den ikke-parametriske versjonen Spearman som er naturlige valg. Resultatet av en slik analyse vil være en Spearman's Rho som utrykker nivået av korrelasjon, denne oppgaven bruker Hopkins et al. (2009) sin inndeling og tolking av korrelasjonstallet.

Tabell 1 under inneholder en oversikt over Hopkins et al. (2009) sin tolkning av korellasjonstallet fra resultatet i en korrelasjonsanalyse og til høyre i tabellen er uttrykkene oversatt til norsk.

Intervallene og engelske uttrykk	Norske uttrykk
< 0.1 = trivial correlation	Triviell korrelasjon «Triviell betyr banal eller platt. Noe som er trivielt, er så alminnelig, ordinært eller forutsigbart at det blir kjedelig.» https://snl.no/triviell
0.1 - 0.3 = small correlation	Liten korrelasjon
0.3 - 0.5 = moderate correlation	Moderat korrelasjon
0.5 - 0.7 = large correlation	Stor korrelasjon
0.7 - 0.9 = very large correlation	Veldig stor korrelasjon
0.9 - 1.0 = nearly perfect correlation	Nesten perfekt korrelasjon
1.0 = perfect correlation	Perfekt korrelasjon

3.3.2 Signifikant

Resultatet av testen vil også presentere en *p*-verdi som forteller om resultatet er av signifikant karakter eller ikke. I pedagogisk forskning er denne sikkerheten satt til 95%. Det vil si at resultater hvor *p* er mindre enn 0,05 ($p < 0,05$) tolkes som statistisk signifikante resultater. I slike resultater er det 95% sikkerhet for at forskjellen ikke skyldes tilfeldigheter, men at det er en faktisk forskjell i det som undersøkes. I medisinsk forsking brukes ofte $p < 0,01$ som grensen, dette gjøres for at det skal bli enda mindre sjanse for at signifikante forskjeller skyldes tilfeldigheter. Dermed er resultatene enda mer pålitelige og man har mindre sjanse for å begå Type 1-feil.

3.3.3 Type 1- og Type 2-feil

Null-hypotese: At det ikke er forskjell

Alternativ hypotese: At vi kommer til å oppdage en forskjell

Type 1 feil er når det feilaktig forkastes en 0-hypotese, feilen går ut på at det er antatt en forskjell når det i virkeligheten skyldes tilfeldigheter. Da begår vi en feil, noe som kan være farlig, særlig innenfor medisinsk forskning. Type 2 feil er ikke like alvorlig, da forkastes et funn og den medisinske verden fortsetter som før. Ja det oppdages kanskje ikke noe nytt og revolusjonerende med en gang, men mennesker utsettes for behandling som feilaktig er godkjent gjennom kliniske studier som fungerende behandling.

3.3.4 Undersøke forskjell

Datamaterialet i dette tilfellet er av en uavhengig gruppe, den er ikke retestet på et senere tidspunkt og designet tillater heller ikke at man får relaterte grupper, f.eks. at alle deltagerne er testet igjen på et senere tidspunkt. Derfor er den lovlige muligheten til å teste forskjellen mellom to grupper, testen Uavhengig-T-test eller den ikke-parametriske versjonen Mann-Whitney-U. Det er også mulig å analysere etter forskjell mellom 3 eller flere uavhengige grupper, da benyttes den statistiske testen One-Way Anova eller den ikke-parametriske versjonen Kruskal Wallis.

3.4 Kvalitet på studien

Kleven et al. (2007) trekker frem at det ved relabilitet er to aspekter, stabilitetsaspektet og ekvivalensaspektet. Hvis ekvivalensaspektet skal være oppfylt må flere undersøkelser og ulike måter å undersøke samme fenomen på, gi samme resultat. Skal stabilitetsaspektet være oppfylt snakkes det om at det må være mulig å reteste samme personer på et annet tidspunkt.

Ekvivalensperspektivet vil komme frem i drøftingen, om resultatene viser det samme tendensene som undersøkelser andre steder i verden, i Norge finnes få om noen sammenlignbare undersøkelser. Dette kan derfor bli opp til videre forskning å undersøke. Rundt stabilitetsaspektet ved denne oppgaven kan det argumenteres over at om noen andre benytter samme datasett, vil de oppnå samme statistiske resultater. Det er derimot en anonym undersøkelse, så det å reteste samme utvalget på et senere tidspunkt tillater ikke forskningsdesignet.

Validitet handler om hvorvidt datamaterialet representerer selve fenomenet i forskningen (Torbergsen & Brandsegg, 2015). Et annet begrep som omhandler det samme er gyldighet (Christoffersen & Johannessen, 2012). For å kunne si at forskningsresultatet er valid må både data og konklusjoner være av høy kvalitet (Torbergsen & Brandsegg, 2015). Dette er viktig å reflektere over både i prosessen med å lage spørreundersøkelsen og analysearbeidet. Kanskje burde det vært mer fokus på vitenskapsmetodikk i løpet av lærerskolens tidligere år, siden målet er en forskningsoppgave. For dette er viktige aspekter ved forskning, små detaljer ved datasettet og hvilket spørreord man skal velge i en problemstilling har store utslag for kvaliteten av forskningen. Håper at konklusjonen til leserne er at datamaterialet representerer hva undersøkelsen prøver å belyse, hva problemstillingen spør etter og at det kan argumenteres for at det er valide resultater som videre forskning kan bygge på og forbedre undervisningen i brøk ut ifra.

Reliabilitet beskriver påliteligheten til dataene og om de er uten tilfeldige feil (Pallant, 2007). Begrepet reliabilitet er teoretisk, det er derfor vanskelig å måle dette i praksis (Kleven et al., 2007), likevel er det mulig å estimere reliabilitet (Torbergsen & Brandsegg, 2015). Når et datasetts reliabilitet skal avgjøres, vurderes det etter nøyaktigheten av undersøkelsens data, anvendelse av data, innsamlingsmetode og bearbeidelse av datasettet (Torbergsen & Brandsegg, 2015).

Innsamlingsmetoden har sine statistiske svakheter fordi det ikke trekkes tilfeldig utvalg fra populasjonen, i den forbindelse ligner forskningsdesignet mer på kvalitative studier, hvor man kan si noe om akkurat den situasjonen man observerer. Derfor argumenteres det senere i oppgaven for at datamaterialet er et uavhengig utvalg gjennom deskriptiv statistikk fra utvalget, ellers kan man faktisk ikke kjøre parametriske statistiske tester, siden første forutsetning er at utvalget er uavhengig.

Nøyaktigheten av datamaterialet er bare like godt som spørsmålene, det ligger mange timer bak utarbeidelsen av undersøkelsen og det kom ingen tilbakemeldinger på misvisende eller tvetydige spørsmål, slik det gjorde i pilotundersøkelsen. Bearbeidelsen av datasettet er enklere å si at er av god kvalitet, her brukes programmet SPSS av IBM og følger man forutsetningene for å kjøre en test nøye, er resultatet reproduserbart og til å stole statistisk på.

Om det er relabilitet i anvendelsen av data er noe man må reflektere over når man skriver drøftingsdelen av oppgaven. Da må forskerhatten være på og målet er å være mest mulig objektiv, ikke vri eller skrive resultater i en spesifikk retning.

Her kommer stabilitetsaspektet av validitet inn i spill, at det skal være mulig å etterprøve og reprodusere resultatene, spesielt er dette gjeldende i arbeidet med kvantitativ data (Kleven et al., 2007). Derfor er det bare å kontakte undertegnede om man ønsker tilgang til datasettet, så lenge det eksisterer deles det gjerne om det kan bidra til å akselerere annen forskning opp i forskningsfronten i verden. Det er også delt med veilederne, datasettet eksistere og analysene i SPSS er mulige å reprodusere. Det at forskning er transparent bidrar i riktig retning til at resultatet er til å stole på, men det ligger mer til grunn. For å kunne stole på et resultat, må det være mulig å si noe om resultatet gir et korrekt bilde av situasjonen (Torbergsen & Brandsegg, 2015). Det er derfor man har refleksjoner rundt kvaliteten av en studie.

Postholm et al. (2018) har fokus på at kvaliteten på funn skal være bra, for å få til dette så er det viktig at funnene drøftes opp mot eksisterende forsking på feltet og se på om det er en sammenheng eller ikke mellom dine funn og andres funn. Postholm et al. (2018) skriver at funnene må gå i dialog med allerede eksisterende forskning. Dette blir en jobb til drøftingskapittelet, som skal arbeides med etter datamaterialet er samlet inn og analysert.

I en refleksjon om kvalitet tar Postholm et al. (2018) opp at det er viktig å se på hvilke begrensinger som finnes knyttet opp til forskningen og hvordan man selv som forsker kan ha påvirket de endelige resultatene gjennom hvordan gjennomføringen av forskningen er organisert. Siden en av styrkene med webbasert spørreundersøkelse som metode er: «Liten intervjuereffekt, har vi at forskeren i dette tilfellet påvirker deltagerne sine svar i liten grad. Dette fordi selve personen som stiller spørsmålene er ute av bildet og dermed blir det mer nøytralt oppfattet av alle som svarer på undersøkelsen (Postholm et al., 2018, s. 186)». Det som kan utgjøre en begrensing er om svaralternativene er lite gjennomtenkte eller begrensende, at det ikke er mulig å svare akkurat det deltageren vil. Dette må det tenkes nøye gjennom når svaralternativene til undersøkelsen utarbeides, for dette kan ha store konsekvenser på kvaliteten av funnene. På pilotundersøkelsen ble det gjort slike feil og dermed ble flere spørsmål egentlig av for dårlig kvalitet til at man kunne bruke svarene i analyse og til forskning.

I en perfekt verden (positivismen) hvor alle resultater kan etterprøves og reproduseres, som det kan være i naturvitenskapen, innebærer dette at en studie er pålitelig, men i samfunnsvitenskapelige fag hvor det innebefatter mennesker, en forsker og tolkningen hans, skriver Postholm et al. (2018, s. 224) at det viktigste er: a) At Forskeren selv reflekterer over sin påvirkning, og b) At forskeren gjør forskningsprosessen synlig slik at andre kan reflektere over den. Det kan fortsatt være en god studie uten at den kan reproduseres. Funnene blir ikke mer sanne om studien kan reproduseres eller ikke, men det må være en åpen prosess. Denne undersøkelsen er ikke helt positivistisk, siden den ikke kan direkte etterprøves og det kan derfor være naturlig å reflektere over forskerens påvirkning og hvor åpen prosessen blir. Postholm et al. (2018) sier at det må reflekteres over følgende forhold:

• Relasjon mellom forsker og forskningsdeltaker
• Forhold mellom problemstilling og forskningsdeltaker
• Forskningens kontekst
• Hvem har vi ikke fått tak i?
• Har vi fått registrert alt det viktige?

Det er ingen relasjoner mellom forsker og forskningsdeltaker, siden det er en anonym webbasert spørreundersøkelse, det er en styrke at det er en lav intervjueffekt (Postholm et al., 2018, s. 186).

Forhold mellom problemstilling og forskningsdeltaker er også uproblematisk, i bakgrunn for temavalg og i avsnittet om arbeidsprosessen kommer det tydelig frem at forskeren ikke har noe vedkommende skal bevise eller er genuint overbevist om. Brøk er noe som elevene synes er vanskelig, og ønsket er å belyse en del av det store temaet brøk og rasjonelle tall, nemlig hvordan lærerne representerer brøk på tavlen. Hypotesen er basert på annen forskning (Osana & Royea, 2011; Putra, 2019) i Europa og ikke av personlig overbevisning.

Hvem har vi ikke fått tak i? Med populasjonen som er valgt «lærere i Norge på 4.-7. trinn som også er medlem av matematikkdidaktiske grupper på internett» får vi i utvalget frivillige deltagere, så man går nok glipp av de lærerne som ikke er i denne populasjonen, de som kanskje ikke bruker internett som en arena for profesjonsutvikling. Det kunne være nærliggende å tenke at undersøkelsen ikke får tak i lærere som har jobbet lenge, men ser man på fordelingen i utvalget er ikke dette tilfellet. Det kan argumenteres for at undersøkelsen ikke får tak i de lærerne i populasjonen som ikke oppsøker profesjonsutvikling, men hele konseptet med en frivillig didaktisk gruppe på Internett er jo nettopp dette, at medlemmene ønsker profesjonsutvikling og deling av kunnskap. Dermed vil denne begrensningen gjelde mest om man skal argumentere for generalisering av funnene for hele lærerdemografien i Norge.

Har vi fått registrert alt det viktige? Dette vil være lettere å svare på i etterpåklokskapens lys, men når man jobber med utvikling av undersøkelsen tror man jo at alt er med. Det hadde vært en styrke om man skrev sammen med en medstudent og dermed hadde noen å reflektere med over slike ting kontinuerlig i løpet av prosessen. Sånn i etterpåklokskapens lys hadde det vært interessant å se på bruk av brøkmodellene på additive og multiplikative strukturer også.

3.5 Etiske betraktninger

Hvor objektiv man er som forsker og hvor riktig forskningsprosessen foregår er en etisk betraktning, det er jo enkelt å svare på for seg selv, men i en slik stor oppgave skal også leseren overbevises om at forskeren er helt nøytral og ikke manipulerer prosessen, bevist eller ubevist, på noen vis. For at leseren skal konkludere med dette, må prosessen være så åpen og gjennomsiktig som mulig. Dette reflekteres det over i den delen av oppgaven som omhandler *kvalitet på studien*. Det er også fult mulig å tro man er nøytral, men ubevist jobbe mot et spesifikt resultat fordi forskeren har en så sterk personlig overbevisning eller forsker med et mål om å oppnå et spesifikt resultat. Dette kan for eksempel være et dilemma som dukker opp om forskning er økonomisk støttet av noen med sterke interesser eller tilknytninger til et fagfelt. For eksempel når oljegiganter betaler for forskning eller rapporter om klimaforandringer. Dette vil nok ikke være tilfellet i dette tilfellet, siden ingen støtter prosjektet økonomisk og temaet er selvvalgt og nærmest tilfeldig oppstått igjennom studieprogresjonen. Det kan argumenteres for at det også er mer gjennomsiktig når SPSS står for analysene, at den menneskelige faktoren er tatt ut av ligningen. Når datamaterialet er delt med andre kan man heller ikke gjemme eventuelle uheldige resultater om man har en sterk overbevisning om sin hypotest for eksempel. Da burde prosessen være så gjennomsiktig at man som leser kan konkludere med at resultatene er til å stole på og av god nok kvalitet.

Etiske betraktninger å gjøre tilknyttet undersøkelsen spesifikt er at det ikke blir spurt etter sensitiv eller personidentifiserende informasjon i undersøkelsen. Det skal være helt anonymt å delta i undesøkelsen og den skal være skriftlig, det skal gjøres ved å bruke Uio's Nettskjema for å samle inn datamaterialet. Det er et nettskjema hvor lagringen av data er godkjent av Norsk Senter for Forskningsdata (NSD, 2021). Siden undersøkelsen er anonymt og skriftlig er ikke dette prosjektet meldepliktig for å få tillatelse fra NSD (2021) til å lagre datamaterialet, dette fordi det er ingen sensitive opplysninger eller personopplysninger man skal lagre. Utvalget er lærere, altså voksne mennesker over 18 år og som deltar frivillig, så det er grunn til å tro at de klarer å lese og forstå hva det innebærer å delta i prosjektet og dermed ikke deler sensitive data om seg selv uoppfordret.

4.0 Resultat og drøfting

Gjennom dette delkapittelet skal oppgaven belyse problemstilling: *Hvordan representeres brøk visuelt av lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlemmer av matematikkdidaktiske grupper på Internett?* Dette skal besvares ut ifra analysen av datasettet som er dannet på grunnlag av undersøkelsen og gjennom å svare på forskningsspørsmålene.

4.1 Deskriptiv statistikk av utvalget

Undersøkelsen som ble gjennomført fikk inn 57 svar, hvor 7 av disse var tydelige uærlige på første spørsmål i undersøkelsen: «I hvilket fylke underviser du matematikk på 4.-7. trinn?». Dette kom frem når de lengre nede i undersøkelsen krysset av for at de bare underviser matematikk på ungdomskolen. Disse er derfor ikke i populasjonen om måtte tas ut av datasettet. Det var også et svar som gjentakende ikke svarte på spørsmålene, var mer opptatt av å kritisere hvor konkrete og vanskelige spørsmålene var å svare på. Svarene på denne deltageren passer derfor ikke inn i noen av kategoriene. Derfor ble det bestemt at også svaret til denne deltageren ble holdt utenfor det ferdige datasettet. Datasettet utgjør derfor svar fra 49 deltagere.

Siden dette har vært en abduktiv arbeidsprosess og ikke en undersøkelse som direkte kopierer allerede eksisterende undersøkelser, er analysemetoden mer etter innfallsmetoden. Analysearbeidet begynner en plass og arbeidet med analysen vil dra seg selv naturlig frem etter som spørsmål og interessante ev. signifikante funn oppstår. Enda en katalysator for fremdriften i analysedelen er etter hvert som det dras inn tidligere forskning som funnene drøftes i lys av kan det oppstå mye behov for å undersøke sammenhenger i datasettet. Det er også laget en korrelasjonstabell for alle variablene og de signifikante sammenhengene ble notert, det er ikke alt signifikant som er interessant, men da har man i det minste noe man kan begynne å undersøke ut ifra eller ta tak i om man setter seg fast. En slik fremgangsmåte fordrer også til at man ikke overser noe interessante sammenhenger.

Det er i utvalget lærere fra 10 av landets 11 fylker. Flest fra Viken (N=13, 26,5%), noe som ser demografisk riktig ut siden Viken har omkring 22,8 % av landets innbyggere nå i 2022. Med tanke på kjønn så er fordelingen menn 8,2% og kvinner 91,8%. Dette er litt lavere oppslutning enn det er tetthet av mannlige lærere i skolen, her kan grunnene være mange, men i grunnskolen er rundt 1 av 4 lærere menn og kun 13% av de uteksaminerte på lærerutdanningen 1.-7. klasse er menn (Skjong, 2018).

Tabell 2 under viser deskriptiv statistikk om utvalget i undersøkelsen.

Deskriptiv statistikk om utvalget

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
2. m) Hvor mange trinn underviser man matematikk på	49	1,00	7,00	2,3469	1,82061
3a_ar_lærere	49	1	36	13,06	8,842
4_stpoeng_matte	49	0	150	57,35	33,403
3b_ar_lærer_matte	49	1	29	10,90	7,113
9.a) Har du noen gang innført brøk for første gang i en klasse?	49	0	1	,80	,407
6b_antall_fag_totalt	49	2	10	5,61	1,891
Valid N (listwise)	49				

Fra tabellen med deskriptiv statistikk over utvalget kan man lese at lærerne it utvalget har jobbet i gjennomsnitt 13 år i skolen og 11 år som matematikklærere. Kunnskapsdepartementet (2014, s. 46) sier at den typiske læreren har 15,5 års erfaring, så selv om dette er noen år siden, kan vi se at utvalget er ganske representativt for bildet av landet som sin helhet på dette punktet. Fra tabellen får vi at 80% av utvalget har innført brøk i en klasse og de har i gjennomsnitt 57,35 studiepoeng i matematikk. I tillegg ser vi at de underviser sjeldent i bare matematikk, gjennomsnittlig så underviser de mellom 5 og 6 forskjellige fag i klassene sine. Dette er jo noe som stemmer godt overens med observasjoner fra praksis, at de fleste er kontaktlærer for sin klasse og har mange av fagene i denne klassen selv.

Selv om utvalget ikke er statistisk trukket ser det ut som avviket fra landsstatistikken er forholdsvis liten og sammensetningen i utvalget kan derfor tilsynelatende se ut til å ligne på læredemografien i landet som en helhet. På den måten kan man argumentere for at funn i dette datamaterialet kan si noe om tendensen til mer enn bare utvalget. For hele populasjonen ja, og kanskje man kan argumentere for at det stemmer nok til å si noe om tendensene ute i skolen også. Det er i alle fall nok likhet til at datamaterialet kommer til å bli behandlet som et uavhengig utvalg i de statistiske analysene i analysearbeidet.

4.2 Deskriptiv statistikk på bruk av modellene (spørsmål 10, 11 og 12)

Det første som ble gjort var å undersøke de tre «hovedvariablene», altså hvordan lærerne ville illustrert en brøk over en hel (brøken $\frac{6}{4}$), under en hel (brøken $\frac{1}{4}$), og til slutt en brøk som har mange og oddetall antall deler i nevneren (brøken $\frac{1}{9}$). Altså tre brøk med tre distinkte forskjellige egenskaper og som brøkmodellene for illustrasjon av brøk kan ha sine svakheter ved. Brøken $\frac{6}{4}$ er over en hel og har sine svakheter når den skal illustreres av Arealmodellen, siden den da må illustreres med to figurere. Dette siden en figur i en arealmodell representere en hel. Brøken $\frac{1}{4}$ er en brøk under en hel og her fungerer Arealmodellen fint, like godt som de andre modellene. Brøken $\frac{1}{9}$ er en brøk som har mange deler i nevneren og det er oddetall antall deler, her har Arealmodellen en svakhet, særlig sirkelformet Arealmodell. Dette siden lærere tegner denne for hånd på tavlen og partall antall deler er enklere å dele en sirkel i. Da halverer man bare gjentatte ganger, men her må man egentlig ta antall grader for å få deler som er like store.

Tabell 3 viser en fordeling av svarene på spørsmål 10 i undersøkelsen, på hvordan lærerne ville illustrert brøken 6/4. Til venstre i tabellen er alle svaralternativene som fikk noen svar ramset opp og til høyre finner man svarprosent og frekvens for hvert svaralternativ.

10. a) Illustrert 6/4

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodell sirkel misoppfatning	2	4,1	4,2	4,2
	Arealmodell sirkel	25	51,0	52,1	56,3
	Lengdemodell tallinje	1	2,0	2,1	58,3
	Symboler	2	4,1	4,2	62,5
	Arealmodell rektangel misoppfatning	2	4,1	4,2	66,7
	Arealmodell rektangel	16	32,7	33,3	100,0
	Total	48	98,0	100,0	
Missing	System	1	2,0		
Total		49	100,0		

Tabell 4 viser også en fordeling av svarene på spørsmål 10 i undersøkelsen, på hvordan lærerne ville illustrert brøken 6/4, men er her svarene delt inn i kategorier. Til venstre i tabellen er alle kategoriene listet opp og til høyre finner man svarprosent og frekvens for hver kategori.

10. b) Illustrert 6/4 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	45	91,8	93,8	93,8
	Mengdemodellen	1	2,0	2,1	95,8
	Symboler	2	4,1	4,2	100,0
	Total	48	98,0	100,0	
Missing	System	1	2,0		
Total		49	100,0		

Det som er verdt å merke seg er at 91.8% velger Arealmodellen i en eller annen form når brøken $\frac{6}{4}$ skal representeres. Det er videre 8,2% av svare som har misoppfatninger i bruken av Arealmodellen i dette tilfellet.

Tabell 5 viser en fordeling av svarene på spørsmål 11 i undersøkelsen, på hvordan lærerne ville illustrert brøken 1/4. Til venstre i tabellen er alle svaralternativene som fikk noen svar ramset opp og til høyre finner man svarprosent og frekvens for hvert svaralternativ.

11. a) illustrert 1/4

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodell sirkel	31	63,3	63,3	63,3
	Arealmodell rektangel	12	24,5	24,5	87,8
	Lengdemodell tallinje	1	2,0	2,0	89,8
	Mengdemodellen	3	6,1	6,1	95,9
	Symboler	2	4,1	4,1	100,0
	Total	49	100,0	100,0	

Tabell 6 viser også en fordeling av svarene på spørsmål 11 i undersøkelsen, på hvordan lærerne ville illustrert brøken 1/4, men er her svarene delt inn i kategorier. Til venstre i tabellen er alle kategoriene listet opp og til høyre finner man svarprosent og frekvens for hver kategori.

11. b) illustrert 1/4 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	43	87,8	87,8	87,8
	Lengdemodellen	1	2,0	2,0	89,8
	Mengdemodellen	3	6,1	6,1	95,9
	Symboler	2	4,1	4,1	100,0
	Total	49	100,0	100,0	

Her er det verdt å merke seg at 87,8% velger Arealmodellen i en eller annen form for å representere brøken $\frac{1}{4}$ visuelt.

Tabell 7 viser en fordeling av svarene på spørsmål 12 i undersøkelsen, på hvordan lærerne ville illustrert brøken 1/9. Til venstre i tabellen er alle svaralternativene som fikk noen svar ramset opp og til høyre finner man svarprosent og frekvens for hvert svaralternativ.

12. a) illustrert 1/9

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen sirkel	14	28,6	28,6	28,6
	Arealmodellen rektangel	24	49,0	49,0	77,6
	Symboler	2	4,1	4,1	81,6
	Mengdemodellen	9	18,4	18,4	100,0
	Total	49	100,0	100,0	

Tabell 8 viser også en fordeling av svarene på spørsmål 12 i undersøkelsen, på hvordan lærerne ville illustrert brøken 1/9, men er her svarene delt inn i kategorier. Til venstre i tabellen er alle kategoriene listet opp og til høyre finner man svarprosent og frekvens for hver kategori.

12. b) illustrert 1/9 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	38	77,6	77,6	77,6
	Mengdemodellen	9	18,4	18,4	95,9
	Symboler	2	4,1	4,1	100,0
	Total	49	100,0	100,0	

Når brøken $\frac{1}{9}$ skal representeres valgte 77,6% av lærerne Arealmodellen. Ut fra dette er det rimelig å forvente at resultatene kommer til å vise at Arealmodellen er den modellen flest foretrakk.

4.3 Analytisk statistikk på bruk av modellene (spørsmål 10, 11 og 12)

Det vil være interessant å se på sammenhengen mellom disse tre kategoriserte variabelen av spørsmålene 10, 11 og 12, dette for å kunne si noe om det er sammenheng mellom hvordan en lærer representerer en brøk og hvordan dette henger sammen med hvordan de to andre brøkene representeres.

Det ble kjørt en Spearman-analyse fordi både forutsetningen om målenivå og normalfordeling er brutt i dette tilfellet, derfor ble valget Spearman, en ikke-parametrisk korrelasjonsanalyse.

Tabell 9 viser resultatet av teknisk sett 3 korrelasjonsanalyser som er presentert i en krysstabell. Det er alle de 3 kategoriserte variablene fra spørsmål 10-12 som er analysert opp mot hverandre.

Correlations

			10. b) Illustrert 6/4 kategorisert	11. b) illustrert 1/4 kategorisert	12. b) illustrert 1/9 kategorisert
Spearman's rho	10. b) Illustrert 6/4 kategorisert	Correlation Coefficient	1,000	,190	,493**
		Sig. (2-tailed)	.	,197	,000
		N	48	48	48
	11. b) illustrert 1/4 kategorisert	Correlation Coefficient	,190	1,000	,458**
		Sig. (2-tailed)	,197	.	,001
		N	48	49	49
	12. b) illustrert 1/9 kategorisert	Correlation Coefficient	,493**	,458**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	,001	.
		N	48	49	49

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

For å tydeliggjøre hva som kommer frem i tabellen for leserne er det nedenfor stilt tre spørsmål som tydeliggjør sammenhengen mellom de tre variablene.

Er det en sammenheng mellom hvilken måte lærerne illustrerer brøker over og under 1 hel på?

Analysen viser at det ikke er en signifikant sammenheng mellom hvordan læreren illustrerer brøk over (var. 10b) og under en hel (var. 11b) ($r = 0.19$, $p = 0.197$).

Er det en sammenheng mellom hvilken måte lærerne illustrerer brøker med lavt partall antall deler i nevner og brøker med høyere oddetall antall deler i nevner?

Denne sammenhengen kan undersøkes ved å analysere variablene 11b) og 12b) opp mot hverandre. Analysen viser at det finnes en signifikant moderat sammenheng (r = 0.458, p = 0.001) mellom hvordan disse to brøkene fremstilles visuelt av lærerne. Siden dette er et statistisk signifikant resultat, må vi se hvor denne moderate sammenhengen gjør seg utslag i datamaterialet. Da er det enkleste å se tilbake til den deskriptive statistikken for spørsmål 11 og 12. Her gjør den moderate sammenhengen seg utsalg i at det er høy prosent som foretrekker arealmodellen på begge de to brøkene. Dette på tross av at Arealmodellen har sine svakheter ovenfor brøker som har mange deler i nevner og særlig oddetall antall deler i nevneren, fordi dette er vanskelig å illustrere riktig (i dette tilfellet brøken 1/9).

Dette er interessant, fordi her er det forskjell i hvor effektiv arealmodellen er og likevel velger de fleste lærerne (77,6%) Arealmodellen også i dette tilfellet.

Da må den siste kombinasjonen blir: *Om det er sammenheng mellom hvilken måte lærere illustrere brøk over en hel og brøk under en hel? Hvor brøken under en hel har mange oddetalls-antall deler i nevneren.*

For å belyse dette analyseres variabelen 10b og 12b mot hverandre. Her viser analysen at det er en moderat signifikant korrelasjon mellom hvordan brøk over 1 hel og liten brøk med oddetall antall deler i nevneren illustreres av lærerne (r = 0.493, p = 0.02). Den moderate signifikant korrelasjon gir seg utsalg i at 93,8% (N=45) illustrere brøk over 1 hel med arealmodellen, og 77,6 % (N=37) av utvalget illustrerte brøken 1 delt på 9 med arealmodellen.

Variabelen 10b er den hvor flest foretrakk arealmodellen (93,8%), og det er den type brøk (over en hel) hvor arealmodellen har en av sine svakheter. Fordi man her må illustrere brøken med to like objekter ved siden av hverandre, siden et objekt er en hel og brøken i dette tilfellet har en høyere verdi enn en hel, verdien på brøken er 1,5 på tallinjen. Wu (2008) påpeker at tallinjen (lengdemodellen) er et bedre valg siden man har en hel mellom hvert etterfølgende heltall. Derfor er brøker over en hel like naturlig og intuitivt å illustrere på tallinje som brøker under en hel, hvor man i arealmodellen må ha to adskilte figurer for å illustrere brøk på intervallet <1,2]. Skal man illustrere brøk over en hel korrekt må man ha god kunnskap om arealmodellen og være konsekvent i riktig bruk og gi elevene opplæring i bruk av denne, siden den ikke er like intuitiv utenfor intervallet [0,1] (Putra, 2019).

4.4 hvilken grad tilpasser lærerne bruk av illustrasjonsmodell

Her ser vi at 28,6 % (N=14) av utvalget velger sirkelformet arealmodell når de skal illustrere brøken $\frac{1}{9}$, så omtrent en tredjedel av utvalget svarer med den sirkelformede arealmodellen, selv om den er absolutt har sine svakheter i å visualisere brøker av denne typen for hånd.

Det vi får ut fra frekvenstabellene over spørsmål 10-12 er at 50% av lærerne foretrekker å bruke sirkel som form i arealmodellen på de to første brøkene og på brøken $\frac{1}{9}$ er sirkelandelen gått ned til 28,6%. Mens bruken av rektangel har gått opp til 49% på brøken $\frac{1}{9}$. Dette sier noe om at lærerne er klar over at denne brøken er vanskeligere å tegne i sirkelformet representasjon på korrekt måte og viser tendenser til å prøve å illustrere denne brøken på en annen måte, men de har fortsatt valgt arealmodellen, bare at flere har gått for en rektangelformet arealmodell.

Han (Wu, 2008) påpeker også at sirkel som representasjonsform er en sterkt kontekstbasert representasjonsform, det handler om å dele pizza eller kake mellom personer. Elevene kan da bli hengt opp i konteksten selv om oppgaven som illustreres handler om en helt annen kontekst. Derfor vil tallinje være et mer fleksibel og likeverdig løsning siden den ikke har en fast kontekst (Wu, 2008).

I motsetning til lærerstudenter i Slovenia og Kosovo (Kolar et al., 2018), som foretrakk å illustrere brøk under en hel med arealmodellen og form rektangel, foretrekker lærerne i utvalget i denne undersøkelsen sirkel som form i arealmodellen for brøk under en hel. Flere har valgt rektangel på brøk under en hel enn på brøk over en hel, men det kom fortsatt inn overvekt med svar på sirkel som form. 45 svar kom inn for sirkel og 36 svar for rektangel i de to spørsmålene undersøkelsen hadde med om å illustrere brøk under en hel. Antallet presentert her kan leses ut fra frekvenstabellene over av variablene 11a og 12a.

Et av Kolar et al. (2018) sine funn fra deres undersøkelse om brøk blant lærerstudenter i Slovenia og Kosovo er at bruken av modellene avtar i rekkefølgen: 1. arealmodellen, 2. mengdemodellen og 3. lengdemodellen.

I dette datasettet avtar bruken av modellene blant lærerne i akkurat samme rekkefølge som det Kolar et al. (2018) fant ut, bare at lengdemodellen er slått av bruken av bare symboler. Størrelsesforskjellen mellom arealmodellen og alle de andre alternativene er verdt å merke seg, arealmodellen er brukt mellom 77,6 - 91,8%, mengdemodellen 18,4 - 2,1%, symboler 4,1 - 4,2% og lengdemodellen 0 - 2%. Funnet og dermed svar på det 1. forskningsspørsmålet er at bruken av modellene avtar i rekkefølgen: 1. arealmodellen, 2. mengdemodellen og 3. lengdemodellen. Utvider man til måter å illustrere brøk på, som problemstillingen spør etter, avtar det i rekkefølgen 1. arealmodellen, 2. mengdemodellen og 3. symboler og 4. lengdemodellen.

Ikke for å kaste ut en brannfakkel, men kan det tenkes at lærere foretrekker arealmodellen fordi det undervises med fokus på den instrumentelle forståelsen? At man tenker at illustrasjonen på tavlen er bare et fartøy for å løse oppgaven, ikke noe som har direkte sammenheng med oppgaven og som skal forstås i en sammenheng. Som Skemp (1976) drar frem må man undervise begge aspektene ved matematikk, både relasjonell og instrumentell forståelse, fordi det finnes bare en matematikk og der henger ting sammen i en større sammenheng. Ses dette bare i konteksten brøk innenfor matematikk vil den større sammenhengen være å se sammenhengen mellom og de distinkte forskjellene på de 5 underkategoriene av brøk; *forholdstall, operator, kvotient, tallmåling og del av hel* (Behr et al., 1983; Kieren, 1976). For å bidra til at elevene konstruerer sin egen kunnskap om dette på en måte uten misoppfatninger, da vil nok det å velge en illustrasjonsmåte for brøk som passer til konteksten og underkategorien oppgaven handler om, være til hjelp for elevene og dermed være bygging av mentale stilas som vil hjelpe elevene ut i deres proksimale utviklingssone (Vygotskij).

4.5 Misoppfatninger i bruken av Arealmodellen

I frekvenstabellene som viser variablene 10a, 11a og 12a, ser vi at noen lærere har misoppfatninger i bruk av arealmodellen. De har rett og slett illustrert brøken på en ulovlig måte. For eksempel på formen under.

Figur 6: Eksempel på misoppfatning om bruk av arealmodell, forsøk på brøken 6/4.

Det naturlige man kan undersøke videre er om det kan identifiseres noen faktorer for de forskjellige gruppene, kanskje helst for den gruppen med misoppfatninger, slik at forebyggende tiltak som forklarer bruken av brøkmodellene etc. kan rettes mer målrettet og effektivt mot riktig gruppe lærere. Om man klarer dette, så vil forskingen komme elevers brøkforståelse til nytte på en effektiv måte.

Tabell 10 viser gruppene utvalget ble delt inn i for å fortsette undersøkelsen om gruppen med misoppfatninger i bruk av arealmodellen. Til venstre i modellen er gruppene listet opp og til høyre ser man frekvens og prosent over hvor stor del av utvalget som befinner seg i hver av gruppene.

Gruppering av utvalget

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Misoppfatninger Arealmodell	4	8,2	8,2	8,2
	Foretrekker Arealmodell, men ikke misoppfatning.	31	63,3	63,3	71,4
	Resten, dvs. ingen misoppfatning og variert modellbruk	14	28,6	28,6	100,0
	Total	49	100,0	100,0	

Det ble ved bruk av *select cases* i SPSS sortert utvalget i nye grupper basert på svarene i de tre spørsmålene 10, 11 og 12. Disse gruppene ble deretter grunnlaget for å konstruere en ny gruppevariabel (tabell ovenfor). Denne sorteringen avslører at 35 svar i utvalget foretrekker arealmodellen som illustrasjonsmåte, uansett hvilken av de tre brøkene de skal illustrere. Dette utgjør 71,4% av hele utvalget og igjen har 8,2% (N=4) av utvalget misoppfatninger i bruk av arealmodellen. 8,2% av 71,4% utgjør at 11,48% av de som svarer arealmodell har misoppfatninger ved bruk at arealmodellen på minst en av brøkene. Det er videre 28,6% (N=14) av utvalget som har varierte former for illustrering av brøkene og har ingen misoppfatninger i bruk av arealmodell. interessant funn at under en tredjedel av lærerne i denne undersøkelsen tilpasser valg av illustrasjonsmodell i de tre tilfellene, mens to tredjedeler virker å foretrekke arealmodellen uavhengig av hvilken brøk de skal illustrere.

Første tanke var om disse misoppfatningene hadde en sammenheng med utdannelse i matematikk, men de som svarene med misoppfatningene er fordelt ut over spekteret 0-60 studiepoeng (0stp. ,15stp. ,30stp. og 60stp.). Når fordelingen er så god virker det ikke som utdanning i matematikkfaget kan være en innlysende faktor. For å være sikker kjøres en Spearman korrelasjonsanalyse og den analysen viser at det ikke er en signifikant sammenheng ($r = 0.17$, $p = 0.244$) mellom hvilken gruppe man er plassert i og hvor mange studiepoeng man har i matematikkfaget. Spearman ble valgt fordi det er lavt målenivå (kategorisk) på variabelen hvor man er delt inn i grupper, fordi en gruppe er ikke mer verdt enn en annen gruppe.

Tabell 11 viser deskriptiv statistikk over antall år med arbeidserfaring som lærer og som mattelærer for gruppen som svarte med misoppfatninger i bruk av arealmodellen.

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
3a_ar_lærere	4	2	28	17,75	11,673
3b_ar_lærer_matte	4	2	28	15,25	10,626
Valid N (listwise)	4				

Kan arbeidserfaring være en faktor? Alle lærerne med misoppfatningene i bruk av arealmodellen er i helt forskjellige nivåer av arbeidserfaring. Gjennomsnittlig har den gruppen med misoppfatninger i bruken av areamodell 17,75 års arbeidserfaring og 15,25 års erfaring som matematikklærere. Forklaringen på fordelingen hadde vært mer enstydig om alle var i same år 5-året, da kunne en tenkt forklaring vært reformasjoner av lærerskolen, men datamaterialet har for god spredning. For å være sikker kjøres en Spearman korrelasjonsanalyse og den analysen viser at det ikke er en signifikant sammenheng ($r = -0.267$, $p = 0.063$) mellom hvilken gruppe man er plassert i og om hvor lenge man har jobbet som lærer. Det samme gjøres for hvor lang arbeidserfaring man har som matematikklærer og resultater er lignende, ikke signifikant korrelasjon ($r = -0.234$, $p = 0.105$). Det ble kjørt analyse for å se om hvor ofte man leser forskningsartikler innenfor fagfeltet matematikk kan tenkes å ha en innvirkning, men analysen viser ingen signifikant korrelasjon ($r = 0.224$, $p = 0.121$) mellom hvilken gruppering lærerne er i og om hvor ofte de leser forskingsartikler innenfor fagfeltet matematikk.

Det ligner på at det ikke er mulig ut dra datamaterialet, å indentifisere en enkel faktor som kan være forklaringen eller identifisere en gruppe lærere som er utsatt for å utvikle eller inneha misoppfatninger i bruken av arealmodellen. For å verifisere dette ble det lagte en liten korrelasjonstabell for alle variablene opp mot variabelen som grupperer lærerne, og denne viser at hvilken gruppe lærerne havner i, har ingen signifikant sammenheng med noen av de andre variablene. Det er selvfølgelig signifikante utslag mot de variablene som omhandler illustrasjonsmåten på de forskjellige brøkene (spørsmål 10-12), men dette er å forvente siden dette avgjør hvilken kategori en lærer havnet i. Derimot gav ingen av bakgrunnsvariablene signifikante korrelasjoner, så dette er et dødt spor og det kan konkluderes med at misoppfatninger i bruk av arealmodellen til å illustrere brøk finnes hos lærere godt fordelt utover i hele lærerdemografien i populasjonen.

Som teorikapittelet belyser, har de forskjellige modellene sine svakheter og styrker. Har lærerne misoppfatninger i bruken av disse, kan det egentlig forventes at elevene lærer brøk på en relasjonell måte?

4.6 Brøkforståelse

TIMSS, PISA og norske lærere melder at elever i Norge sliter med å løse oppgaver med brøkregning (Grønmo et al., 2011; Torbergsen & Brandsegg, 2015; Utdanningsdirektoratet, 2012), samtidig kommer det frem her i undersøkelsen at til og med noen lærere sliter med brøkforståelsen. Det er ingenting som statistisk sett kan gi oss at denne sammenhengen mellom lærere og elevers forståelse er signifikant eller ikke sånn direkte ut ifra datasettet, men man kan spørre seg om det kan ha en sammenheng.

Det som kan undersøkes er spørsmål 18; «finn den største brøken». Dette er en type spørsmål som er hentet ifra Stigler et al. (2010) sitt Mathematics Diagnostic Testing Project som ble testet på 1643 Amerikanske collegestudenter. Resultatet deres ble at 33% klarte å identifisere den største av 4 brøker, noe som ikke er stort over sannsynligheten for å tippe riktig, som er på 25%.

Tabell 12 viser frekvenser og prosentdeling på svaralternativene fra spørsmål 18 i undersøkelsen, hvor deltagerne ble bedt om å identifisere den største av 4 brøker. Et alternativ fikk ingen svar og er derfor heller ikke presentert i tabellen, brøken 32/80.

18. Identifiser den største av de 4 brøkene:

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	9/16	1	2,0	2,0	2,0
	7/12	13	26,5	26,5	28,6
	13/20	35	71,4	71,4	100,0
	Total	49	100,0	100,0	

Her ser vi vesentlig meroppløftende resultater, ingen tippet den fjerde brøken og 71,4% klarte å identifisere den største brøken. Det stod selvfølgelig instruksjoner om at dette var hoderegning og at kalkulator var forbudt å bruke, men siden det er en webundersøkelse må man bare stole på slike svar er gjennomført på en ærlig måte. Det kan uansett si noe om at brøkforståelsen hos norske lærere ser ut til å være høyere enn for collegestudenter i USA, selv om det eksisterer misoppfatninger når brøk skal illustreres med arealmodellen hos enkelte lærere.

Det ble i løpet av arbeidet med analysen oppdaget en mulig feilkilde, de samme fire brøkene ble brukt i pilotundersøkelsen også. Det kan tenkes at noen tok begge undersøkelsene og selv med ett års mellomrom husker hvilken brøk som er størst. Derfor presenteres det her tall fra pilotundersøkelsen for å undersøke denne mulige feilkilden.

Tabell 13 presenterer tall ifra pilotundersøkelsen på et spørsmål om lærerne kunne identifisere den største av fire brøker. Dette er presentert her for å utforske en mulig feilkilde med at de fire brøkene var identiske i både pilotundersøkelsen og masterundersøkelsen.

Pilotundersøkelsen - 16. Identifiser den største av de 4 brøkene:

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	7/12	32	22,4	22,4	22,4
	9/16	1	,7	,7	23,1
	13/20	104	72,7	72,7	95,8
	32/80	1	,7	,7	96,5
	Ikke svart	5	3,5	3,5	100,0
	Total	143	100,0	100,0	

Her vises det at svarene er veldig tilsvarende, da er det grunn til å tro at dette stemmer med kunnskapsnivået i populasjonen på begge undersøkelsene og siden det ikke er en som stikker seg ut kan man med rimelighet anta at dette ikke er en feilkilde.

4.7 Faktorer bak valg av metode

Datasettet undersøkes videre med det mål om å identifisere avgjørende faktorer som ligger bak valget av modell, altså prøver dette delkapittelet å belyse forskningsspørsmål 3: Hvilke faktorer avgjør valget av modell? Faktorer som kan være med å forklare hvorfor læreren representerer brøk på dem måten de gjør.

En naturlig plass vi være å starte med spørsmål 15, spørsmålet på spørreundersøkelsen lød som følger: *Hvilke av faktorene nedenfor er mest avgjørende når du bestemmer hvilke(n) måte du illustrerer brøk på i undervisningen?* Her var noen mulige faktorer listet opp og et *annet*-alternativ, hvor man selv kunne skrive. Svarene som kom inn, fordeler seg som i tabellen under.

Tabell 14 viser spørsmål 15 om hvilken faktor som er mest avgjørende for valg av modell (areal-, lengde- eller mengdemodell). Til venstre i tabellen er kategoriene alle svarene er delt inn i listet opp, frekvens og prosentinndelingen er presentert til høyre for svarkategoriene.

15. avgjørende faktor for valg av metode

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Læreverket	6	12,2	12,2	12,2
	Kontekst i oppgaven	29	59,2	59,2	71,4
	Brøkens verdi	6	12,2	12,2	83,7
	Slik jeg selv lærte det	1	2,0	2,0	85,7
	Forskning	1	2,0	2,0	87,8
	Kommer an på eleven	1	2,0	2,0	89,8
	Hvilket klassetrinn	1	2,0	2,0	91,8
	Det elevene forstår lettest	1	2,0	2,0	93,9
	Elevenes tilbakemeldinger	1	2,0	2,0	95,9
	Hva elevene responderer best på	1	2,0	2,0	98,0
	Både forståelse hos elevene og konkretisering med kakestykker	1	2,0	2,0	100,0
	Total	49	100,0	100,0	

De som svarte «lærerverket» som faktor har oppgitt følgende læreverk de bygger sitt valg av metode på: Tusen millioner, Multi, Matemagisk, Skolestudio og Campus.

Ser man på frekvenstabellen ovenfor kommer det tydelig frem at det er 3 alternativer som skiller seg ut og har 83,7% av alle svarene og det er *læreverket, konteksten i oppgaven* og *brøkens verdi*. Det er derfor naturlig å se nærmere på disse tre.

4.7.1 Læreverket som faktor

Det første som blir undersøkt er svaralternativet læreverket og dermed hvilket læreverk som ble oppgitt at skolen bruker.

Multi fra Gyldendal forlag var åpen på nett gjennom universitets feidekonto, boken som ble valgt er beregnet for første halvdel av 5. trinn. Det ble foretatt en frekvensanalyse over hvordan boken illustrere brøk. Hele kapittelet om brøk ble brukt i frekvensanalysen. Antall illustrasjoner av hver type kommer til syne i frekvenstabellen under:

Tabell 15 viser resultater fra frekvensanalyse av brøkkapittelet i Gyldendals bok Multi 5A. Her er det notert hver gang en av de tre modellene ble brukt som representasjonsform for en bøk.

	Frekvens	Prosent
Arealmodellen	136	75.55
Mengdemodellen	14	7.78
lengdemodellen	30	16.67
Totalt	180	100

Dette viser at læreverket har varierte måter å illustrere brøk på, men hovedtyngden (75,55%) ligger på arealmodellen når det illustreres brøk i Gyldendals matematikkbok Multi 5A. Det var også oppgaver og eksempler med bare symboler. Skole Studio er også fra Gyldendal, så det er rimelig å anta at dette er bygget opp tilsvarende som boka. Det vil si at Arealmodellen er foretrukket, men at flere visuelle representasjoner er brukt.

Sendt mail til Cappelen Dam om læreverket Tusen millioner og fikk svar: *Hei og takk for henvendelsen! Vi ønsker at elevene skal utvikle et mest mulig bredt repertoar av strategier og metoder, så vi bruker alle representasjonsformene i Matematikk 5-7 fra Cappelen Damm.*

Dette var et vagt svar, kanskje var ikke henvendelse direkte nok, men de bruker alle representasjonsformene, på samme måte som Multi fra Gyldendal. Det kan derimot tenkes at også dette læreverket har overvekt på en av modellene.

Ashenhoug Sin mattemagisk 5A er ikke tilgengelig online for å se i boken, men man kan bestille et prøveeksemplar i fysisk format. Dette ble gjort, men den kom aldri frem, det kom heller ingen mail tilbake om hvorfor.

For å bekrefte eller avkrefte hypotesen kan det brukes s*celect cases* i SPSS og se hvilken modell de som svarer læreverket foretrekker når de velger måte til å illustrere de tre bøkene i undersøkelsen.

Tabell 16 viser oversikt over hvilken modell de 6 deltagerne som svarte at «læreverket» var viktigste faktor for valg av metode brukte når de skulle representere brøken 6/4.

10. b) Illustrert 6/4 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	6	100,0	100,0	100,0

Tabell 17 viser oversikt over hvilken modell de 6 deltagerne som svarte at «læreverket» var viktigste faktor for valg av metode brukte når de skulle representere brøken 1/4.

11. b) illustrert 1/4 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	4	66,7	66,7	66,7
	Lengdemodellen	1	16,7	16,7	83,3
	Symboler	1	16,7	16,7	100,0
	Total	6	100,0	100,0	

Tabell 18 viser oversikt over hvilken modell de 6 deltagerne som svarte at «læreverket» var viktigste faktor for valg av metode brukte når de skulle representere brøken 1/9.

12. b) illustrert 1/9 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	4	66,7	66,7	66,7
	Mengdemodellen	1	16,7	16,7	83,3
	Symboler	1	16,7	16,7	100,0
	Total	6	100,0	100,0	

Det er ikke ensformig svart arealmodellen, men det er en overvekt på arealmodellen, akkurat som det ser ut som matematikkbøkene er bygd opp. Hos de 12,2% av lærerne i undersøkelsen som støtter seg på læreverket, ser det ut som læreverkets oppbygging har innvirkning på hvilke representasjonsformer som brukes i klasserommet.

4.7.2 Brøkens verdi som faktor

De som svarte at viktigste faktor bak valget av hvordan de illustrere brøkene er *brøkens verdi*, vil være neste fokus. Da burde disse svarene i utvalget vise at de skifter strategi eller måte for å illustrere en brøk etter hvilken verdi brøken har, for eksempel over og under 1 hel, hvor arealmodellen er en svak og lite intuitiv modell. Bruker *select case* i SPSS og viser frekvenser for de som svarte *brøkens verdi* som viktigste faktor.

Tabell 19 viser frekvenser og de forskjellige svarene til de i utvalget som svarte at «Brøkens verdi» er viktigste faktor for hvilken modell de velger når de skal representere brøken 6/4.

10. b) Illustrert 6/4 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	6	100,0	100,0	100,0

Tabell 20 viser frekvenser og de forskjellige svarene til de i utvalget som svarte at «Brøkens verdi» er viktigste faktor for hvilken modell de velger når de skal representere brøken 1/4.

11. b) illustrert 1/4 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	6	100,0	100,0	100,0

Tabell 21 viser frekvenser og de forskjellige svarene til de i utvalget som svarte at «Brøkens verdi» er viktigste faktor for hvilken modell de velger når de skal representere brøken 1/9.

12. b) illustrert 1/9 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	5	83,3	83,3	83,3
	Mengdemodellen	1	16,7	16,7	100,0
	Total	6	100,0	100,0	

Fra tabellen kommer det tydelig frem at alle som ser på *brøkens verdi* som avgjørende faktor svarer med arealmodellen på både brøk over og under en hel. Bare et svar er kommet inn med mengdemodellen på brøken $\frac{1}{9}$. Dette forteller at også denne faktoren betyr at lærerne foretrekker arealmodellen. Kan nesten virke som dette alternativet er svart dette fordi det hørts fint ut, ikke for noen annet grunn. Skulle man kjørt en tilsvarende større undersøkelse, ser man her at det hadde vært lurt å la det bare være skriftlige svar på spørsmål 15, så hadde man fått frem tankene mer enn at de velger et ord de synes høres smart ut. For det er tydelig at lærerne som velger dette svaralternativet ikke lever opp til å forandre representasjonsmåte ut fra brøkens verdi, de ser ut til å foretrekke Arealmodellen uansett hvilken av de tre brøkene de skal illustrere.

4.7.3 Konteksten i oppgaven som faktor

Det svaret med flest svar (N=29, 59%) er *konteksten i oppgaven*, for å kunne etterprøve dette alternativet hadde det vært greit med tekstoppgaver innenfor alle brøkens undertema. På den måten hadde man sett om konteksten i oppgaveteksten utløste en forandring i representasjonene som ble valgt. Dette er en svakhet med undersøkelsen og det vil være en oppfordring til om noen skal forske videre i dette temaet. Det er ingen direkte tekstbasert kontekst i dette tilfellet, bare forskjellige brøk som skal illustreres. Derimot kan det argumenteres med at det å kjenne modellene og deres svakheter og dermed velge den modellen som er mest intuitiv etter brøkens verdi viser at man tilpasser modellvalget til konteksten som brøken representerer. Det må lærerne også gjøre om de bytter modell etter hvilken kontekst oppgaven har, da må de ha kunnskap om modellene og bruke den som er mest hensiktsmessig. Så om undersøkelsen ikke direkte kan konkludere om konteksten, så kan den si noe om lærerne kjennskap til modellene og si noe om hva tendenser ser ut til å være. Med *select case* i SPSS velges bare svarene som oppgav *konteksten i oppgaven* som avgjørende faktor bak valget av måte for å representere brøk, da får man frem frekvensene på hvor ofte de ulike modellene er valgt:

Tabell 22 presenterer frekvens og prosentfordeling på den kategoriserte variabelen fra spørsmål 10, hvordan man ville illustrert brøken 6/4. Det presenteres bare svarene fra de som svarte at «oppgavens kontekst» var viktigste faktor i valget av modell for å illustrere brøk.

10. b) Illustrert 6/4 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	25	86,2	89,3	89,3
	Mengdemodellen	1	3,4	3,6	92,9
	Symboler	2	6,9	7,1	100,0
	Total	28	96,6	100,0	
Missing	System	1	3,4		
Total		29	100,0		

Tabell 23 presenterer frekvens og prosentfordeling på den kategoriserte variabelen fra spørsmål 10, hvordan man ville illustrert brøken 1/4. Det presenteres bare svarene fra de som svarte at «oppgavens kontekst» var viktigste faktor i valget av modell for å illustrere brøk.

11. b) illustrert 1/4 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	26	89,7	89,7	89,7
	Mengdemodellen	2	6,9	6,9	96,6
	Symboler	1	3,4	3,4	100,0
	Total	29	100,0	100,0	

Tabell 24 presenterer frekvens og prosentfordeling på den kategoriserte variabelen fra spørsmål 10, hvordan man ville illustrert brøken 1/9. Det presenteres bare svarene fra de som svarte at «oppgavens kontekst» var viktigste faktor i valget av modell for å illustrere brøk.

12. b) illustrert 1/9 kategorisert

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Arealmodellen	22	75,9	75,9	75,9
	Mengdemodellen	6	20,7	20,7	96,6
	Symboler	1	3,4	3,4	100,0
	Total	29	100,0	100,0	

Her er det i alle fall en viss spredning, og man kan si at noen som har valgt dette alternativet er fleksible i bruken av modeller og dermed mest sannsynlig har forståelse og kunnskap om svakhetene og styrkene til hver modell og dermed forandrer strategi til den mest hensiktsmessige i henholdt til konteksten i oppgaven. Hovedvekten av lærerne i utvalget bruker derimot arealmodellen uansett om det er på brøker som gjør arealmodellen til en lite intuitiv og fleksibel modell. I gjennomsnitt 85% av lærerne som svarte *oppgavens kontekst* foretrekker arealmodellen, uavhengig av modellens svakheter. Det kan bety flere ting, men to mulige forklaringer er at lærerne ikke har tilstrekkelig kunnskap om modellene for å representere brøk med, eller at lærere er vanedyr og at konteksten ikke er noe de faktisk tilpasser modell etter, uansett om de svarte dette på undersøkelsen eller ikke. Det som er klart derimot er at størsteparten av disse lærerne i denne kategorien også foretrekker Arealmodellen.

4.8 Representasjonsformer ved innføring av brøk

Alle disse funnene som viser at norske lærere som tar del i populasjonen vår foretrekker arealmodellen når de skal illustrere en brøk for elevene sine, stemmer overens med forskningen på danske lærerstudenter som Putra (2019) har gjennomført. Dette er positivt om det er undervisning som skal bidra til den første brøkforståelsen hos elevene. Piaget (1960) og Pothier og Sawada (1983) skriver at rektangelet som representasjonsform er den letteste formen for å utvikle den aller første brøkforståelsen på. Totalt sett i utvalget har resultatene vist at lærerne i utvalget foretrekker sirkel som form på Arealmodellen, men det kan enkelt sjekkes om det er annerledes for de lærerne som utvikler elevens første brøkforståelse.

Det kan gjøres ved å undersøke variablene til spørsmålene som omhandler innføring av brøk (9a, 9b og 9c). Her innser man fort at disse spørsmålene ikke differensierer mellom arealmodell med sirkel og rektangel og disse kan derfor ikke bidra til konklusjonen annet enn at 79,6% (N=39) av lærerne har innført brøk i minst en klasse. Av disse igjen valgte 79,5% (N=31) Arealmodellen som første modell og 76,9% (N=30) av de lærerne som har innført brøk oppgav at de brukte Arealmodellen hyppigst gjennom innføringsprosessen av brøk.

Videre kan vi undersøke ved å velge bare svarene for lærerne som underviser 4. året på matematikk og se på hvilke måter de velger å illustrere brøk på opp mot resten av utvalget. Sånn statistisk sett gjør man dette ved en uavhengig t-test, eventuelt den ikke-parametriske versjonen Mann-Whitney U. Disse testene sjekker 2 grupper opp hverandre, og i vårt tilfelle er gruppene om man underviser matematikk på 4. trinn eller ikke, fordelingen i utvalget er 21 personer som gjør dette og 28 som ikke underviser matematikk på 4. trinn. Det er brudd i forutsetningen om høyt nok målenivå på variablene, siden hvilken modell man bruker ikke kan rangeres med at en har høyere verdi enn en annen modell. Derfor må vi velge den ikke-parametriske versjonen av testen.

Tabell 25 viser resultatene av teknisk sett 3 Mann-Whithney U tester, som ser på forskjeller i hvordan man ville illustrert de 3 brøkene opp mot om man underviser matematikk på 4. trinn eller ikke.

Test Statistics[a]

	10. a) Illustrert 6/4	11. a) illustrert 1/4	12. a) illustrert 1/9
Mann-Whitney U	261,000	263,500	252,000
Wilcoxon W	667,000	669,500	658,000
Z	-,438	-,720	-,919
Asymp. Sig. (2-tailed)	,661	,471	,358

a. Grouping Variable: 2. f) Underviser du matematikk på 4.trinn?

Analysen viser at det er ingen signifikant forskjell på hvilken modell du velger til illustrasjon av brøkene ut ifra om du underviser matematikk på 4. trinnet eller ikke. Konklusjonen på det 4. forskningsspørsmålet blir dermed at det ikke er signifikant flere i utvalget som bruker rektangel som representasjonsform for å utvikle den første brøkforståelsen, det foretrekkes Arealmodellen i form av sirkel også til dette. Dette er et funn selv om det ikke er signifikant, lærerne i populasjonen ser ikke ut til å følge Piaget (1960) og Pothier og Sawada (1983) sine råd, om at rektangel beste formen for å utvikle den første brøkforståelsen med.

4.9 Korrelasjoner ut fra korrelasjonstabellen

Det neste vil være og gå tilbake til den opprinnelige korrelasjonstabellen over alle variablene i datasettet og ta tak i noen resultater og se om disse er interessante for besvarelsen av problemstillingen.

En sammenheng som gir utsalg i korrelasjonstabellen og virker å være verdt undersøke, er sammenhengen mellom variabel 10b (hvordan brøken $\frac{6}{4}$ illustreres) og variabel 17g (om man har FA i matematikk oftere enn hver 14.dag eller ikke). Resultatet av denne korrelasjonsanalysen er ikke et direkte svar på problemstillingen, men den sier oss likevel noe om hvilke sammenhenger som avgjør valget bak de forskjellige måtene man illustrere brøk som billedlige konkreter på. Variabel 17g er på laveste målenivå, en kategorisk variabel, så her må vi velge en ikke-parametrisk test når vi skal kjøre testen på nytt for å få en bedre oversikt enn korrelasjonstabellen tilbyr oss. Valget av statistisk test havner på en Spearman korrelasjonsanalyse.

Tabell 26 viser resultatene av en Spearman-analyse mellom hvordan man ville illustrert brøken 6/4 og om man har fysisk aktivitet i matematikkundervisningen oftere enn hver 14. dag eller ikke.

Correlations

			10. b) Illustrert 6/4 kategorisert	17. g) Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag.
Spearman's rho	10. b) Illustrert 6/4 kategorisert	Correlation Coefficient	1,000	,383**
		Sig. (2-tailed)	.	,007
		N	48	48
	17. g) Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag.	Correlation Coefficient	,383**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,007	.
		N	48	49

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Analyse viser at det er en sammenheng mellom hvordan lærere illustrere brøk over en hel og om de bruker fysisk aktivitet (FA) oftere enn hver 14. dag i matematikktimene ($r = 0.383$, $p = 0,007$). For å se hvor denne signifikante og moderate sammenhengen gjør seg utsalg ser vi på en krysstabell over de samme variablene:

Tabell 27 er en krysstabell mellom variabelen 10b og 17g. Den viser den innbyrdes fordelingen på svaralternativene for variabel 10b (kategoriserte variabelen ut fra spørsmål 10: hvordan man ville illustrert brøken 6/4) ut fra om man gjør fysisk aktivitet oftere enn hver 14. dag i matematikktimene.

10. b) Illustrert 6/4 kategorisert * 17. g) Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag. Crosstabulation

			17. g) Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag.		
			Stemmer ikke	Stemmer	Total
10. b) Illustrert 6/4 kategorisert	Arealmodellen	Count	33	12	45
		% within 17. g) Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag.	100,0%	80,0%	93,8%
	Mengdemodellen	Count	0	1	1
		% within 17. g) Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag.	0,0%	6,7%	2,1%
	Symboler	Count	0	2	2
		% within 17. g) Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag.	0,0%	13,3%	4,2%
Total		Count	33	15	48
		% within 17. g) Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag.	100,0%	100,0%	100,0%

Denne sammenhengen gjør seg utsalg i at 100% (N=33, 68,75% av utvalget) av de som svarte «stemmer ikke» på utsagnet «Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag» illustrerer brøk over en hel med arealmodellen. Det som også er verdt å merke seg er at disse utgjør 68,75% av lærerne som svarte på dette spørsmålet (N=48), det vil si at bare 31,25% av lærerne i utvalget har fysisk aktivitet i matematikktimene oftere enn hver 14. dag når de underviser matematikk på 4.-7. klasse.

Dette er en interessant sammenheng som fint kan undersøkes i videre forskning, for det finnes masse forskning på at fysisk aktivitet eller pauser med fysisk aktivitet fremmer elevenes prestasjoner i matematikk (Barbosa et al., 2020; Fiorilli et al., 2021). På den måten ser det altså ut som det er en sammenheng mellom disse to funnene, men på en ikke oppløftende måte. For om en lærere bruker arealmodellen hvor den er svakest ser det ut som man også er blant de med stor sannsynlighet for å ha lite eller potensielt ingen fysisk aktivitet i matematikktimene på 4.-7. trinn. Man er altså i faresonen for å gjøre flere ting på annen måte enn det forskning viser at fremmer læring.

4.10 Drøfting av funnene

Her skal funnene oppsummeres og drøftes opp mot problemstillingen og forskningsspørsmålene som oppgaven forsøker å belyse.

Problemstilling: *Hvordan illustreres brøk visuelt av lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlemmer av matematikkdidaktiske grupper på internett?* Og tilhørende forskningsspørsmål:

1. *Hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) bruker lærerne for å representere brøk?*
2. *Foretrekker lærerne arealmodellen uavhengig av hvilken brøk som skal representeres?*
3. *Hvilke faktorer avgjør valg av representasjonsmodell?*
4. *Hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) bruker lærerne for å innføre brøk?*

1. Hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) bruker lærerne for å representere brøk?

Funnet og dermed svar på det 1. forskningsspørsmålet er at: bruken av modellene avtar i rekkefølgen: 1. arealmodellen, 2. mengdemodellen og 3. lengdemodellen. Utvider man til måter å illustrere brøk på, som problemstillingen spør etter, avtar det i rekkefølgen 1. arealmodellen, 2. mengdemodellen og 3. symboler og 4. lengdemodellen.

2. Foretrekker lærerne arealmodellen uavhengig av hvilken brøk som skal representeres?

Nei ikke alle lærerne foretrakk arealmodellen, men det kommer frem at 35 deltagere i utvalget foretrekker arealmodellen som illustrasjonsmåte, uansett hvilken av de tre brøkene de skal illustreres. Dette utgjør 71,4% av hele utvalget, så de fleste lærerne i utvalget (71.4%, N=35) foretrekker arealmodellen som illustrasjonsmåte uansett hvilken brøk som skal representeres med visuelle konkreta. Videre har 11,48% (N=4) av disse misoppfatninger i bruk av arealmodellen og disse misoppfatningene finnes hos lærere godt fordelt utover i lærerdemografien.

Dette betyr for problemstillingen at 71.4% av lærerne i utvalget bare bruker Arealmodellen uansett. Over 2/3 av lærerne virker å behandle Arealmodellen som den eneste mulige måten å illustrere en brøk på. Det finnes også misoppfatninger rundt bruken av denne, så det er tendenser til at kunnskap om de tre hovedmodellene for å illustrere brøk ikke er viden kjent blant Norske lærere som passer inn i populasjonen. Det kan derfor se ut som et tiltak man kan gjøre for å bedre situasjonen i brøk for norske elever, er nettopp å spre kunnskapen om modellene. Slik at lærerne kan ta i bruk en mer relasjonell og fleksibel tilnærming til brøkrepresentasjoner og bruken av disse i klasserommet.

Det var ikke mulig å identifisere faktorer om gruppen med misoppfatninger, det virker derfor mest hensiktsmessig med generell opplæring om modellene for alle lærere, dette passer uansett godt i og med at de fleste velger arealmodellen, selv i situasjoner hvor denne har sine svakheter. Det finnes derfor forbedringspotensialet i bruk av illustrasjonsmodeller hos lærere i populasjonen.

3. Hvilke faktorer avgjør valg av representasjonsmodell?

Nå er det belyst hvordan lærerne i undersøkelsen representerer brøk, men *hva baserer lærerne valget om modell på*? Klarer man å besvare dette har man forutsetninger for å forandre lærernes valg av modell til å bli mindre statiske og mer dynamiske, siden man da har en faktor man kan drive implementering eller tiltak imot.

De viktigste oppgitt grunnene bak valget av måte å illustrerer brøk på var: *læreverket, konteksten i oppgaven* og *brøkens verdi*. Det ble heller ikke konkludert enstydig om hva som ligger til grunn for valget av måte å illustrere brøk på, men størsteparten av lærerne i alle kategoriene foretrakk arealmodellen uansett oppgitt grunn. I gjennomsnitt foretrekker 85% av lærerne som svarte *oppgavens kontekst* arealmodellen, uavhengig av modellens svakheter. Derimot de 12,2% av lærerne i undersøkelsen som støtter seg på læreverket i valg av modell ser ut til å følge læreverket sin oppbyggelse med representasjoner. At det er overvekt på Arealmodellen, derfor ser det ut til at disse har potensiale til å bli påvirket av læreverkets oppbygging. Derfor virker det som det her er et potensiale for å forbedre læreverket og dermed forbedre en del av elevene i Norge sin opplæring av brøk gjennom at lærerne dermed benytter brøkrepresentasjoner mer dynamisk.

4. Hvilke av de tre modellene (areal-, lengde- eller mengdemodellen) bruker lærerne for å innføre brøk?

Når lærere i vår populasjon skal illustrere brøk på 4. trinn, ser de ikke ut til å følge (Piaget, 1960) og Pothier og Sawada (1983) sine råd, om at rektangel er den beste formen for å utvikle den første brøkforståelsen med. 79,5% av utvalget (N=31) brukte Arealmodellen som første modell ved innføring av brøk og 76,9% (N=30) av de lærerne som har innført brøk oppgav at de brukte Arealmodellen hyppigst gjennom innføringsprosessen av brøk. Analysen viste derimot at det var ingen signifikant forskjell på hvilken modell du velger til illustrasjon av brøkene ut ifra om du underviser matematikk på 4. trinnet eller ikke. Dermed er konklusjonen at flesteparten av lærerne i denne undersøkelsen foretrekker fortsatt formen sirkel på Arealmodellen, akkurat slik det er med utvalget i sin helhet.

Dette gir oss en ekstra dimensjon til problemstillingen, ikke bare har funnene vist at størsteparten av lærerne i de tre forskjellige brøkene velger Arealmodellen, men at de også i innføringen av brøk velger Arealmodellen, spesifikt i form av en sirkel. Det kan derfor se ut som størsteparten har gått i et spor og bruker Arealmodellen i form av sirkel uansett hvilken brøk de skal illustrere og uansett om det er innføring av brøk på 4. trinn eller undervisning av brøk på høyere trinn.

Problemstillingen: *Hvordan illustreres brøk visuelt av lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlemmer av matematikkdidaktiske grupper på internett?*

Naiser et al. (2003) trekker frem at vi som lærere bør bruke konkreta for å se elevenes tankegang, samt gjøre timene mer elevinvolverte og gi mulighet for at de kan snakke og reflektere sammen. Da er det å bruke modeller for å illustrere brøk perfekt, det er en form for visuelle konkret. En forutsetning for dette igjen kan følges, er at lærerne har kunnskaper og kan undervise brøk på en måte som er fleksible i bruken av modellene til å illustrere brøk, slik at modellene utfyller hverandre fordi modellene brukes hvor de har sine styrker. Siden 71,4% av utvalget velger Arealmodellen uansett hvilken brøk som skal illustreres, så virker som det finnes potensiale for kunnskapsheving på området representasjon av brøk. Dette fordi gode kunnskaper om brøk hos elevene starter med god opplæring og kunnskap om brøk blant lærerne (Baturo, 2004).

4.11 Svakheter med undersøkelsen og forslag til videre forskning:

I en refleksjon om kvalitet tar Postholm et al. (2018) opp at man må se på hvilke begrensinger man finner knyttet til forskningen og her er noen punkter som har kommet frem under arbeidet med analysen og drøftingen. Personlig innser jeg at masterundersøkelsen er mer begrenset, ganske mye begrenset i forhold til pilotundersøkelsen, men problemstillingen er godkjent og undersøkelsen har vært inne til veiledning. Personlig har kunnskapen til å se slike svakheter først blitt konstruert i løpet av den abduktive arbeidsprosessen med masteroppgaven, så om undersøkelsen skulle vært utarbeidet nå i etterpåklokskapens lys, kunne selve undersøkelsen sett annerledes ut. Blant annet burde Kieren (1976) og Behr et al. (1983) sine underkategorier av brøk vært brukt når oppgavene som skulle illustreres ble laget. Det kan tenkes at det er annerledes bruk av modellene om brøkene hadde vært satt inn i en kontekst fra hver av underkategoriene. Dette er noe som bør tenkes på om man skal undersøke dette videre.

I avsnittet om utvalget og populasjon kommer det frem at utvalget ikke er et uavhengig utvalg og dermed blir ikke nødvendigvis resultatene statistisk generaliserbare og automatisk overførbare til hele lærerpopulasjonen i Norge. Skulle man gjort dette til et større prosjekt med bedre tid tilgjengelig, burde man tatt seg tiden til å trekke et uavhengig utvalg, selv om det er en tidkrevende jobb å rekruttere skoler og snakke med rektorer og skolesjefer i kommuner og reise rundt med undersøkelsen for å sikre høy nok svarprosent.

Det hadde vært interessant om noen forsket videre på sammenhengen mellom fysisk aktivitet i matematikktimene og lærernes kunnskap om bruk av brøkmodeller, siden dette kom opp som en sammenheng i datasettet. Undersøkelsen var ikke konstruert til å kunne forklare denne sammenhengen. Kanskje den er generelle ting som skjer samtidig i et klasserom, altså at det ikke har noen statistiske sammenhenger, men det kan tenkes at det også er en sammenheng der. For eksempel på formen: Gjør man imot hva forskningen sier fungerer på en ting, står man i fare for å gjøre imot forskningens anbefalinger også på andre ting.

4.12 Implementering

Det kunne vært laget en folder om de forskjellige brøkmodellene for å lære opp lærerne. Dette kunne også vært i form av en kort videosnutt eller et foredrag i typisk «powerpoint-stil». Siden lærerne med direkte misoppfatninger er godt fordelt i lærerdemografien er målrettet opplæring vanskelig, men lærerne foretrekker jo Arealmodellen i uansett tilfellet, så kanskje alle lærer kunne hatt utbytte av litt opplæring i bruk av modeller for å visualisere brøk.

5.0 Konklusjon

Konklusjon skal svare på problemstillingen: *Hvordan illustreres brøk visuelt av lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlemmer av matematikkdidaktiske grupper på internett?*

De fleste lærerne i utvalget (71.4%, N=35) foretrekker arealmodellen som illustrasjonsmåte uansett hvilken brøk som skal representeres som visuelle konkreta. Videre har 11,48% (N=4) av disse misoppfatninger i bruk av arealmodellen og disse misoppfatningene finnes hos lærere godt fordelt utover i lærerdemografien.

Bruken av modellene avtar i rekkefølgen: 1. arealmodellen, 2. mengdemodellen og 3. lengdemodellen. Utvider man til måter å illustrere brøk på som problemstillingen spør om, så avtar det i rekkefølgen 1. arealmodellen, 2. mengdemodellen og 3. symboler og deretter 4. lengdemodellen. Lengdemodellen som har mange fordeler innenfor forskning og undervisning av brøk, men er i denne undersøkelsen desidert den minst brukte modellen til å representere brøk blant lærerne i denne undersøkelsen.

De viktigste oppgitt grunnene bak valget av måte å illustrerer brøk på var: *læreverket, konteksten i oppgaven* og *brøkens verdi*, men det kan se ut som flere har svart uten å faktisk leve opp til sin grunn når man undersøker datasettet, så det ble ikke konkludert enstydig om hva som ligger til grunn for valget av måte å illustrere brøk på, men lærerne i alle kategoriene foretrakk arealmodellen. Det kan se ut som de 12,2% av lærerne som oppgav *læreverket* som viktigste grunn følger læreverket, altså hovedtyngde på Arealmodellen.

Når lærere i vår populasjon skal illustrere brøk på 4. trinn og ved innføring av brøk, ser de ikke ut til å følge (Piaget, 1960) og Pothier og Sawada (1983) sine råd, om at rektangel er den beste formen for å utvikle den første brøkforståelsen med, det er fortsatt formen sirkel som er foretrukket form, men de foretrekker Arealmodellen også i disse tilfellene.

Konklusjonen blir at når lærere på 4.-7. trinn i Norge som også er medlemmer av matematikkdidaktiske grupper på internett, skal representere brøk visuelt på tavlen, gjør de det fortrinnsvis med Arealmodellen, til tross for modellens svakheter.

7.0 Litteraturliste

Austad, T. B. (2019). *Misoppfatninger innen brøk, desimaltall og prosent* [Høgskulen på Vestlandet].

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. *Rational numbers: An integration of research*, *157*, 195.

Barbosa, A., Whiting, S., Simmonds, P., Scotini Moreno, R., Mendes, R. & Breda, J. (2020). Physical activity and academic achievement: an umbrella review. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, *17*(16), 5972.

Baturo, A. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, *91*, 126.

Bjerke, A., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke flertall–eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Pareliussen, BB Moen, A. Reinertsen & T. Solhaug (red.). FoU i praksis 2012 conference proceedings,

Carraher, D. W. (1996). Learning about fractions. *Theories of mathematical learning*, 241-266.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students’ understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, *64*(3), 293-316.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt.

Cope, L. (2015). Math manipulatives: Making the abstract tangible. *Delta Journal of Education*, *5*(1), 10-19.

Durand-Guerrier, V., Winsløw, C. & Yoshida, H. (2010). A model of mathematics teacher knowledge and a comparative study in Denmark, France and Japan. Annales de didactique et des sciences cognitives,

Fiorilli, G., Buonsenso, A., Di Martino, G., Crova, C., Centorbi, M., Grazioli, E., Tranchita, E., Cerulli, C., Quinzi, F. & Calcagno, G. (2021). Impact of Active Breaks in the Classroom on Mathematical Performance and Attention in Elementary School Children. Healthcare,

Gabriel, F. (2016). Understanding magnitudes to understand fractions. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *21*(2), 36-40.

Gabriel, F. C., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in psychology*, *4*, 715.

Gausen, J. (2017). *Addisjon av brøk med ulike representasjoner: en studie av 8. klasseelevers kompetanse og oppgavers ulike vanskegrad* [NTNU].

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2011). Framgang, men langt fram. *Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS*.

Hamdan, N. & Gunderson, E. A. (2017). The number line is a critical spatial-numerical representation: Evidence from a fraction intervention. *Developmental Psychology*, *53*(3), 587.

Hopkins, W. G., Batterham, A. M., Marshall, S. W. & Hanin, J. (2009). Progressive statistics. *Sportscience*, *13*.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional. Number and measurement. Papers from a research workshop, Kleven, T. A., Hjardemaal, F. & Tveit, K. (2007). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: en hjelp til kritisk tolking og vurdering*. Unipub.

Kolar, V. M., Hodnik Cadez, T. & Vula, E. (2018). Primary teacher students' understanding of fraction representational knowledge in Slovenia and Kosovo. *CEPS Journal*, *8*(2), 71-96.

Kunnskapsdepartementet. (2014). *Strategi - Lærerløftet - På lag for kunnskapsskolen*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/vedlegg/planer/kd_strategiskole_web.pdf

Kunnskapsdepartementet. (GSI). *Grunnskolens informasjonsystem*. gsi.udir.no/tallene/

Lamon, J. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for children. *Nova Jersey: Lawrence Erlbaum*.

Lamon, S. J. (2012). Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. *Rational numbers: An integration of research*, 261-288.

Martinussen, G. & Smestad, B. (2010). Multiplikasjon og divisjon av brøk. *Tangenten, tidsskrift for matematikkundervisning*, *1*(2010), 30-34.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for research in mathematics education*, *30*(2), 122-147.

Naiser, E. A., Wright, W. E. & Capraro, R. M. (2003). Teaching fractions: Strategies used for teaching fractions to middle grades students. *Journal of research in childhood education*, *18*(3), 193-198.

NSD. (2021). *Hvordan gjennomføre et prosjekt uten å behandle personopplysninger?* Norsk Senter for Forskningsdata. https://www.nsd.no/personverntjenester/oppslagsverk-for-personvern-i-forskning/hvordan-gjennomfore-et-prosjekt-uten-a-behandle-personopplysninger/

Osana, H. P. & Royea, D. A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 333-352.

Packer, M. J. & Goicoechea, J. (2000). Sociocultural and constructivist theories of learning: Ontology, not just epistemology. *Educational psychologist*, *35*(4), 227-241.

Pallant, J. (2007). *SPSS survival manual : a step by step guide to data analysing using SPSS for Windows* (3rd ed. utg.). McGraw-Hill ; Open University Press.

Panel, N. M. A. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. US Department of Education.

Pass, S. (2004). *Parallel paths to constructivism: Jean Piaget and Lev Vygotsky*. IAP.

Phillips, D. C. (1995). The good, the bad, and the ugly: The many faces of constructivism. *Educational researcher*, *24*(7), 5-12.

Piaget, J. (1960). *The Child's Conception of Geometry: By Jean Piaget, B 砲 bel Inhelder, and Alina Szeminska*. Basic Books.

Piaget, J. (2003). Part I: Cognitive Development in Children--Piaget Development and Learning. *Journal of research in science teaching*, *40*.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Pothier, Y. & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for research in mathematics education*, *14*(5), 307-317.

Putra, Z. H. (2019). Danish pre-service teachers' mathematical and didactical knowledge of operations with rational numbers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(3), 619-632.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Skjong, H. (2018). *Andelen mannlige lærere i grunnskolen syker stadig*. Hentet 03/04 fra https://www.utdanningsnytt.no/fagartikkel-grunnskole-likestilling/andelen-mannlige-laerere-i-grunnskolen-synker-stadig/170094

Son, J.-W. & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 235-261.

Steffe, L. P. & Gale, J. E. (1995). *Constructivism in education*. Psychology Press.

Steffe, L. P. & Olive, J. (2009). *Children's fractional knowledge*. Springer Science & Business Media.

Stigler, J. W., Givvin, K. B. & Thompson, B. J. (2010). What community college developmental mathematics students understand about mathematics. *MathAMATYC Educator*, *1*(3), 4-16.

Torbergsen, K. & Brandsegg, R. (2015). *Hva kan nasjonale prøver fortelle om norske elevers prestasjoner i regning og brøk? En utforskende studie av nasjonale prøver i regning 2014* [UiT Norges arktiske universitet].

Utdanningsdirektoratet. (2012). Rammeverk for grunnleggende ferdigheter. https://www.udir.no/globalassets/upload/larerplaner/lareplangrupper/rammeverk_grf_2012.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Matematikk 1–10 (MAT01-05)*. Udir. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv17?lang=nob&Progresjon=true

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and middle school mathematics*. Pearson Education UK.

Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fractions. *Teaching Children Mathematics*, *8*(8), 457-463.

Wu, H. (2008). Fractions, decimals, and rational numbers. *Berkeley, CA: Author*.

8.0 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1: Spørsmål pilotundersøkelsen

1. I hvilken landsdel underviser du matematikk på barneskolen (1-7 trinn)? Svaralternativer: midt-Norge, Nord-Norge, Sørlandet, Vestlandet, Østlandet, Annet og Har aldri undervist matematikk på barneskolen (1-7 trinn).

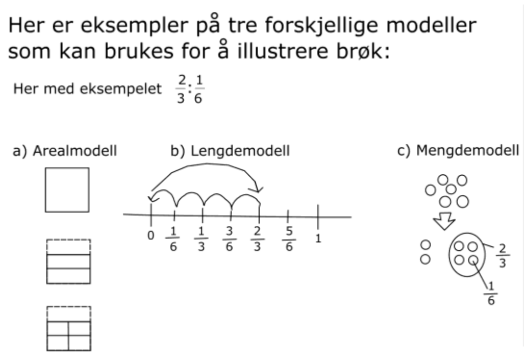
2. På hvilke(t) årstrinn underviser du matematikk? Svaralternativer (Du kan velge flere): 1. trinn, 2. trinn, 3. trinn, 4. trinn, 5. trinn, 6. trinn og 7. trinn.

3. Hvor lenge har du undervist i matematikk? Svaralternativer: 0-5 år, 6-10 år, 11-15 år, 16-20 år.

4. Hvor mye utdanning i faget matematikk har du? (En årsenhet tilsvarer 60 studiepoeng/20 vekttall). Svaralternativer: 0 stp., 1-15 stp., 16-30 stp., 31-45 stp., 46-60 stp. 60+ stp., Mastergrad i matematikk.

5. Hvor ofte leser du forskningsartikler? Svaralternativer: Aldri, sjeldent, av og til, ofte og alltid.

6. Hvilket intervall passer best til å beskrive tiden det går mellom hver gang du leser en forskningsartikkel innenfor fagfeltet matematikk? Svaralternativer: noen år, noen måneder, noen uker og noen dager.



7. Hvor ofte bruker du følgende modeller i undervisning for å illustrere ekte brøk? Eksempel 2/3. Svaralternativ:

(likt svaralternativ i form av matrise på spørsmål 7 til og med 11)

8. Hvor ofte bruker du følgende modeller i undervisning for å illustrere uekte brøk? Eksempel 5/3.

9. Hvor ofte bruker du følgende modeller i undervisning for å illustrere et heltall delt på brøk? Eksempel 6 : 2/3.

10. Hvor ofte bruker du følgende modeller i undervisning for å illustrere brøk delt på heltall? Eksempel 1/2 : 4

11. Hvor ofte bruker du følgende modeller i din undervisning for å illustrere brøk delt på brøk? Eksempel 2/3 : 1/6

12. Hvilke av faktorene nedenfor er mest med på å bestemme hvilke(n) modell du benytter i brøkundervisningen? Svaralternativer: Læreverket, Erfaring, Forskning og Annet (Skriv selv).

Om man svarer «Læreverket» blir man presentert med spørsmålet «Hvilket læreverk i matematikk bruker dere?»

Eksempel på regneregel: Divisjon med brøk

Regel
Når to brøker divideres på hverandre, snur vi først den andre brøken og multipliserer den med den første.

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 1} = \frac{12}{3} = 4$$

Kilde: https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=125847&within_tid=125845

13. Hvor ofte bruker du regneregler i undervisning for å finne svaret av et heltall delt på brøk? Eksempel 6 : 2/3. Svaralternativer: Aldri, sjeldent, av og til, ofte og alltid.

14. Hvor ofte bruker du regneregler i undervisning for å finne svaret av brøk delt på heltall? Eksempel 1/2 : 4. Svaralternativer: Aldri, sjeldent, av og til, ofte og alltid.

15. Hvor ofte bruker du regneregler i undervisning for å finne svaret av brøk delt på brøk? Eksempel 2/3 : 1/6. Svaralternativer: Aldri, sjeldent, av og til, ofte og alltid.

16. Identifiser den største av de 4 brøkene. Forklaring: Kalkulator er selvfølgelig ikke lov, det blir juks! Svaralternativer: 7/12 , 9/16 , 13/20 og 32/80.

8.2 Vedlegg 2: Spørsmål masterundersøkelsen

1. I hvilket fylke underviser du matematikk på 4.-7. trinn?

Svaralternativer: Første alternativ: Har aldri undervist matematikk på 4.-7. trinn. Avkrysning med alle fylkene og alternativ med annet hvor man selv må svare.

2. På hvilke(t) årstrinn underviser du matematikk?

Svaralternativer: Avkrysning hvor flere alternativere er mulige å krysse av for. Blant svaralternativene var alle trinnene helt fra 1.klasse til universitet tilgjengelig.

3. a) Hvor mange år har du jobbet som lærer?

Svar med et tall. Desimaler er godtatt av skjemaet.

3. b) Hvor mange av disse årene har du undervist i matematikk?

Svar med et tall. Desimaler er godtatt av skjemaet.

4. Hvor mange studiepoeng har du i faget matematikk?

Forklaring til spørsmålet «Her ønskes svaret i antall studiepoeng, siden skjemaet ikke godtar bokstaver, men bare tall. For å regne om fra årsenhet, så er en årsenhet det samme som 60 studiepoeng, og 20 vekttall tilsvarer det samme 60 studiepoeng».

5. Har du skrevet mastergrad i matematikk?

Svaralternativer: Ja og nei. Forklaring: «Eller har hovedfag i matematikk (før mastergrad ble innført som begrep i 2003)».

6. Underviser du i andre fag i tillegg til matematikk?

Svaralternativer ja og nei, og trykker man ja kommer spørsmål 6b opp.

6. b) Hvilke fag underviser du utenom matematikk?

Svaralternativer: Her er fagene listet opp og man huker av de man underviser for. Det er også et «annet»-felt hvor man kan skrive om det var noen glemte fag i listen.

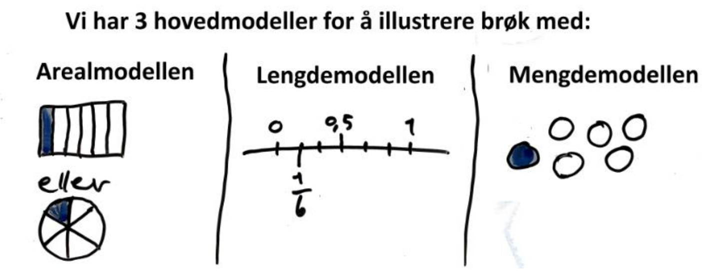
7. Hvilket biologisk kjønn har du?

Svaralternativene: Mann og kvinne.

8. Hvilket intervall beskriver best lengden det går mellom hver gang du leser en forskningsartikkel fra fagfeltet matematikk?
Svaralternativer: Leser aldri forskningsartikler, år, måneder, uker, dager og timer

9. Har du noen gang innført brøk for første gang i en klasse?
Svaralternativer: ja og nei. Svarer man «ja» kommer spørsmål 9. b) frem.

Her kommer det opp et bilde som illustrere de forskjellige modellene vi har for å illustrerer brøk:

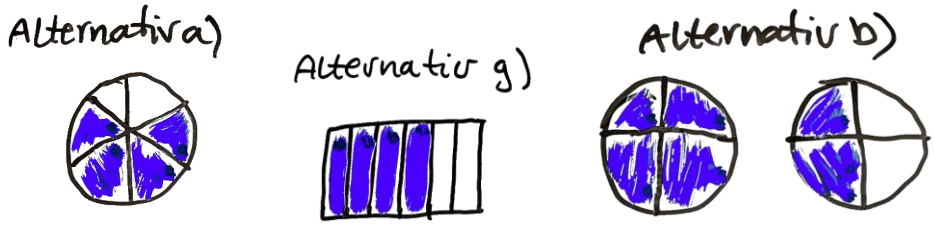


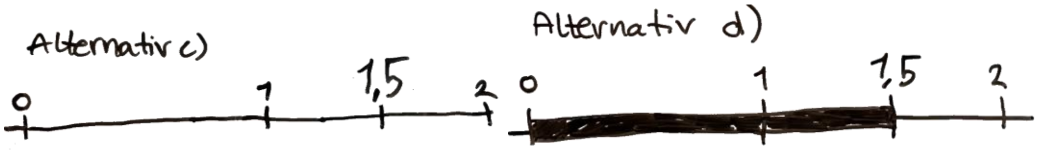
9. b) Husker du hva som var den første metoden du brukte for å visualisere brøk for elevene?
Svaralternativer: Symboler, Arealmodellen, Lengdemodellen, Mengdemodellen og Annet (skriv selv).

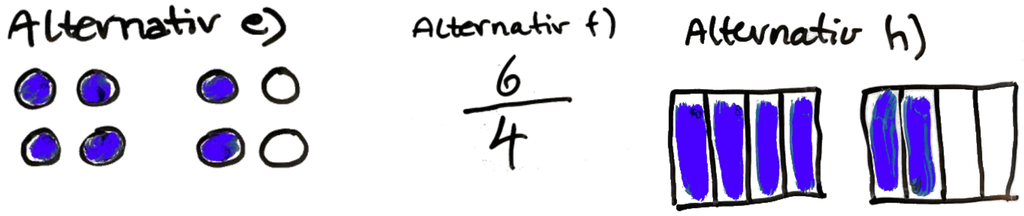
9. c) Husker du hvilken metode du brukte mest igjennom hele innføringsprosessen for å visualisere brøk for elevene?

Svaralternativer: Symboler, Arealmodellen, Lengdemodellen, Mengdemodellen, husker ikke og Annet (skriv selv).

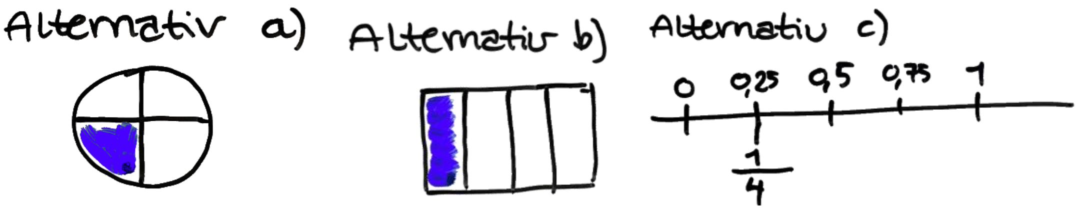
10. Hvilket av alternativene nedenfor ligner mest på slik du ville illustrert brøken 6/4 for elevene? I tillegg til et alternativ med «annet», hvor man kan svare selv, var det disse alternativene:



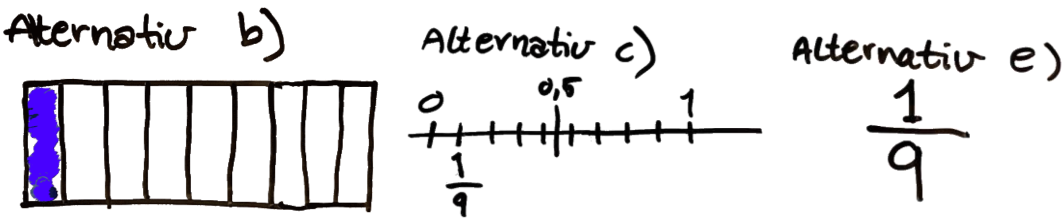


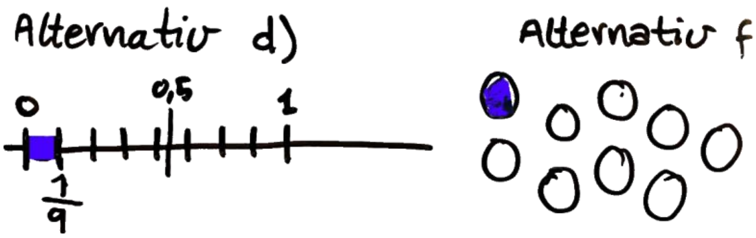


11. Hvilket av alternativene nedenfor ligner mest på slik du ville illustrert brøken 1/4 for elevene? I tillegg til et alternativ med «annet», hvor man kan svare selv, var det disse alternativene:

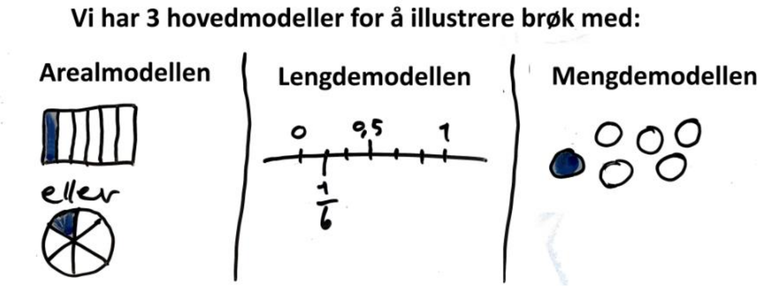


12. Hvilket av alternativene nedenfor ligner mest på slik du ville illustrert brøken 1/9 for elevene? I tillegg til et alternativ med «annet», hvor man kan svare selv, var det disse alternativene:





Deretter ble denne figuren repetert og kom opp i spørreundersøkelsen.



13. Vurder modellene for å visualisere brøk etter hvor ofte du bruker dem når du skal visuelt representere brøk for elevene?
Svaralternativ: Her var det en matrise med svaralternativene: Aldri, Sjeldent, Like mye som andre modeller, Oftest og Alltid, for hver av de tre modellene.

14. Hvilken måte bruker du oftest for å representere en brøk i undervisningen?
Svaralternativer: Med symboler, Arealmodellen, Lengdemodellen, mengdemodellen og et «annet»-felt hvor man kan skrive selv.

15. Hvilke av faktorene nedenfor er mest avgjørende når du bestemmer hvilke(n) måte du illustrerer brøk på i undervisningen?
Svaralternativer: Læreverket, forskning, kontekst i oppgaven, størrelse på brøkens verdi, slik jeg selv har lært det og et «annet»-felt hvor man kan skrive selv.
Hvilket læreverk i matematikk bruker dere?

16. Hvilken undervisningsmetode er den du bruker mest av i din matematikkundervisning når det undervises brøk?
Svaralternativer: Stasjonsarbeid, lærerstyrt matematisk samtale, forelesning fra læreren, problemløsning, gruppearbeid, arbeide med oppgaver i boka, utematematikk, matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet (FAL), arbeid med konkreter og et «annet»-felt hvor man kan skrive selv.

17. Nest siste spørsmål: "10" kjappe påstander om din matematikkundervisning.

Svaralternativer: Stemmer og stemmer ikke. Påstandene:

Jeg har flere enn 25 elever i matematikktimene

Jeg har mindre enn 15 elever i matematikktimene

Jeg klarer å tilrettelegge for absolutt alle elevene mine i matematikktimene

I mitt klasserom er det arbeidsro i matematikk når det gis beskjed om det

Min klasse har flest matematikktimer på slutten av dagene

Jeg bytter metode/aktivitet hvert 20. minutt eller oftere i løpet av matematikktimene

Vi gjør matematikkaktiviteter med fysisk aktivitet oftere enn en gang hver 14. dag

Jeg har elever fra flere klassetrinn i samme klasserom når jeg underviser matematikk

Jeg bruker oftest symboler og tall (skriver feks: 1/4) når jeg underviser brøk i klasserommet

Jeg bruker som oftest arealmodellen når jeg underviser brøk i klasserommet

Jeg bruker som oftest lengdemodellen når jeg underviser brøk i klasserommet

Jeg bruker som oftest mengdemodellen når jeg underviser brøk i klasserommet

18. Identifiser den største av de 4 brøkene. Forklaring til spørsmålet «Kalkulator er selvfølgelig ikke lov, det blir juks!».

Svaralternativer: 7/12 , 9/16 , 13/20 og 32/80.