MASTEROPPGAVE

Emnekode: MAT5006_1 Kandidatnr: 336 og 303

Sammenhengen mellom aritmetikk og algebra - en kvantitativ studie av 10.trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra

Dato: 15/05/2023 Totalt antall sider: 79

NORD universitet

www.nord.no

Forord

Det er med stor glede og en følelse av ydmykhet vi nå legger frem vår masteroppgave ved Nord universitet, Nesna, etter å ha fullført fem års grunnskolelærerutdanning for trinn 5-10. Tiden ved Nord universitet har vært en reise fylt med kunnskap, erfaringer og personlig vekst. Vi har blitt formet som lærere og som mennesker, og vil i dette forordet rette en varm takk til alle som har bidratt til at vi nå står ved denne milepælen.

Først og fremst vil vi takke vår veileder, Frode Henanger, som med sin faglige dyktighet, tålmodighet og oppmuntring har ledet oss gjennom prosessen med å skrive denne oppgaven. Din veiledning har vært uvurderlig og har hjulpet oss med å finne retning og fokus i arbeidet.

Videre vil vi takke alle våre medstudenter ved Nord universitet, Nesna, som har vært en fantastisk støtte gjennom både utfordrende og gledelige stunder i løpet av studietiden. Dere har bidratt til et inspirerende og motiverende læringsmiljø, og sammen har vi delt erfaringer og kunnskap som har vært avgjørende for vår faglige og personlige utvikling.

Vi ønsker også å rette en takk til alle lærerne og ansatte ved Nord universitet som har bidratt med sin faglige dyktighet, støtte og engasjement. Dere har skapt en god ramme rundt studietiden og har bidratt til at vi har følt oss hjemme og ivaretatt.

En spesiell takk går til skolen og lærerne som har åpnet dørene for oss og latt oss få prøve ut våre pedagogiske ideer og metoder i praksis. Dere har gitt oss verdifulle tilbakemeldinger og innsikt i læreryrket som vi vil ta med oss videre i vår karriere.

Til slutt vil vi takke både familie og venner, som har vært en kilde for støtte og oppmuntring gjennom hele studietiden. Uten dere hadde ikke vi ikke klart å stå ved denne milepælen.

Takk til alle som har vært en del av de flotte årene ved Nesna. Vi ser frem til å ta fatt på den neste etappen i livet som grunnskolelærer, og vi tar med oss alle de verdifulle erfaringene og minnene fra masterløpet vårt ved Nord universitet, Nesna.

Einar Vollen og Awaz Kassim

Nesna, mai 2023

Sammendrag

Sammenhengen mellom 10.trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra.

Denne studien undersøker hvilke forhold det er mellom tiendeklassingers prestasjoner i aritmetikk og algebra på ungdomsskolen. Problemstillingen i studien er: Hva er sammenhengene mellom elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra? Studien hadde også som mål å finne ut om ferdigheter i aritmetikk er en sterk indikator for videre suksess i algebra.

Et kvantitativt forskningsdesign ble brukt, og benyttet data fra en spesielt utformet test rettet mot å evaluere tiendeklassingers matematiske kompetanse i både aritmetikk og lineær algebra. Dataene ble analysert for å vurdere korrelasjonen mellom ferdigheter i aritmetikk og algebra, samt å mulig identifisere potensielle faktorer som kan påvirke dette forholdet.

De innsamlede dataene ble analysert ved hjelp av det analytiske verktøyet SPSS. Resultatene viste en moderat signifikant positiv korrelasjon ($\rho = 0{,}584$, $p = 0{,}001 < 0{,}05$) mellom elevenes prestasjoner i aritmetikk og algebra, som viser til at det er en sammenheng mellom ferdigheter i aritmetikk og prestasjon i algebra. Dette antyder at et sterkt grunnlag i aritmetiske ferdigheter kan bidra til høyere prestasjoner i algebra. Videre indikerte funnene at elever som hadde god forståelse av grunnleggende aritmetiske konsepter og operasjoner, hadde en tendens til å prestere bedre i algebra. Imidlertid krever kompleksiteten i forholdet mellom disse to matematiske domenene ytterligere forskning for å utforske andre potensielle faktorer og deres innflytelse på elevprestasjon.

Denne studien gir verdifull innsikt for lærere og beslutningstakere, og understreker viktigheten av å utvikle sterke aritmetiske ferdigheter i de tidlige stadiene av elevenes matematikkopplæring. Funnene støtter implementeringen av målrettede tiltak og pedagogiske strategier for å fremme elevenes suksess i både aritmetikk og algebra, med ekstra fokus på overgang mellom aritmetikk og algebra, og bidrar til slutt til forbedret generell matematisk lesekyndighet.

Abstract

The Relationship between Tenth-Grade Students' Arithmetic and Algebra Performance

This study investigates the relationship between tenth-grade students' arithmetic and algebra performance in a Norwegian secondary school context. The main research question addressed is: What are the connections between students' achievements in arithmetic and their achievements in algebra at the tenth-grade level? The study also aimed to determine whether arithmetic proficiency is a strong predictor of success in algebra.

A quantitative research design was employed, utilizing data from a specially designed test aimed at evaluating tenth-grade students' mathematical competencies in both arithmetic and linear algebra. The data was analyzed to assess the correlation between arithmetic and algebra scores and to identify potential factors that may influence this relationship.

The collected data were analyzed using the analytical tool SPSS. The results revealed a moderate significant positive correlation ($\rho=0{,}584$, $p=0{,}001<0{,}05$) between students' arithmetic skills and algebra performance, which shows that there is a correlation between skills in arithmetic and algebra performance. This suggests that a solid foundation in arithmetic skills may contribute to higher achievement in algebra. Furthermore, the findings indicated that students who had a good understanding of basic arithmetic concepts and operations tended to perform better in algebra. However, the complexity of the relationship between these two mathematical domains necessitates further research to explore other potential factors and their influence on student achievement.

This study offers valuable insights for educators and policymakers, emphasizing the importance of developing strong arithmetic skills in the early stages of students' mathematical education. The findings support the implementation of targeted interventions and pedagogical strategies to foster students' success in both arithmetic and algebra, with extra focus towards the transition from arithmetic to algebra, contributing to improved overall mathematical literacy.

Innholdsfortegnelse

Tabell liste

Figurliste

1.Innledning

Algebra er et viktig område i matematikken, som kan betraktes som språket som generalisering av kvantitet og relasjoner mellom størrelser kan utrykkes og manipuleres gjennom (Strømskag, 2017, s. 71). Algebra er viktig del og avgjørende del for arbeid i andre matematiske områder som geometri og statistikk. Algebra kunnskap er også relevant i yrkesliv og dagligliv, enten direkte eller som et verktøy.

Vi har opplevd gjennom praksis på ungdomstrinnet at mange elever synes at algebra er vanskelig å lære, og flere av dem var raske på å gi opp.

> Forskere har pekt på at endringer i læreplaner i en del land har vært drevet av et ønske om å legge større vekt på dagliglivsmatematikk på bekostning av mer abstrakt matematikk som for eksempel algebra (Grønmo, 2015, s. 1)

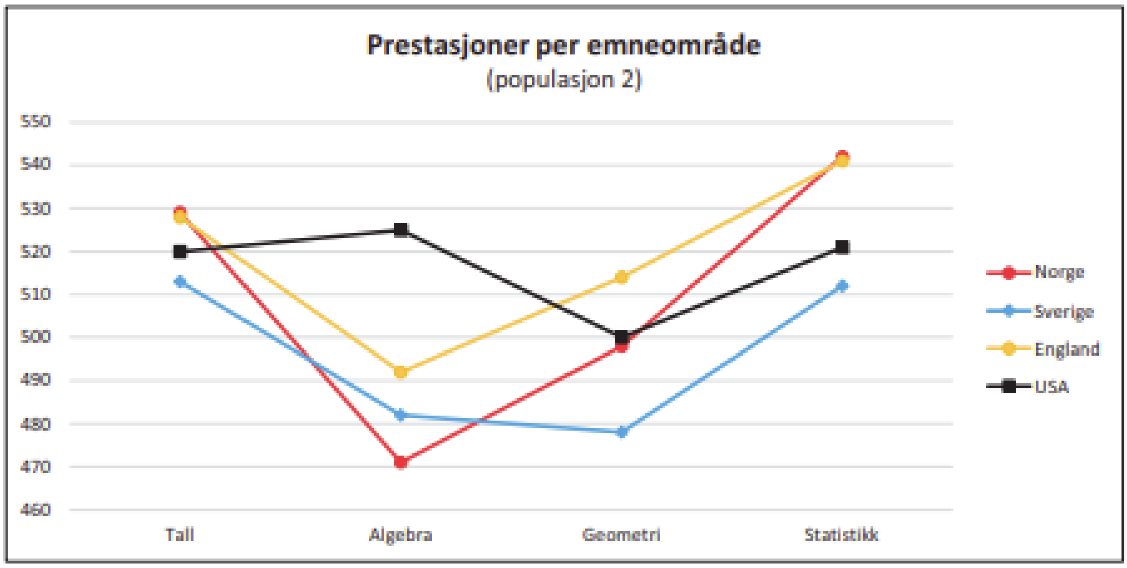
Den mer abstrakte matematikk blir nedprioritert til fordel for den mer dagliglivsmatematikken. Problemet med dette at mange elever trenger for eksempel algebra for videreutdanning og profesjoner (Grønmo, 2015).

Allerede i 2005 advarte finske matematikere og didaktikere om at det var et problem at finske elever ikke lærte nok ren, abstrakt matematikk, men hadde mest fokus på «hverdagsmatematikk». Tidligere norske TIMSS-rapporter (Grønmo et. al, 2004; Grønmo & Onstad, 2009) har også pekt på det samme som et problem i norsk matematikkundervisning (Grønmo, 2015).

Resultater fra internasjonale studier viser at norske elever skårer dårligere enn gjennomsnittet i andre land i algebra. for eksempel, TIMSS. TIMSS står for «Trends in International Mathematics and Science Study» og er en internasjonal studie i matematikk og naturfag for grunnskolen, som fra med 1995 har blitt gjennomført hvert fjerde år. Norge har deltatt hver gang bortsatt fra 1999 (Bergem, et al., 2016, s. 36).

Hensikten med TIMSS er å kartlegge faktorer som fremmer læring, følge med på utvikling i elevens matematikk og naturfagkompetanse, og sammenligne eget land mad andres lands utdanningssystemer. Alle disse faktorer gir verdifull informasjon til videre forbedring og utvikling av realfagundervisningen i norsk skole (Kaarstein, et al., 2020, s. 6).

Fra figur 1 så ser man at det er stor forskjell på hvordan elevene presterer i de ulike emneområdene. Elevene har ganske høy skår på statistikk, og bra på tall, men betydelig lavere på geometri og algebra. Norge skårer svært lavt i emneområde algebra i forhold til de andre emneområdene i matematikk. Norske elevers prestasjoner i matematikk på 9. trinn kan karakteriseres som middels god i et europeiske perspektiv, men svært svake prestasjoner i emneområde algebra. Dette fører til en nedgang på gjennomsnittsskåren (Bergem, et al., 2016, s. 36). Fra og med 2007 til 2011 var det en beskjeden, men signifikant fremgang i emneområdet algebra, men i 2015 var skåren tilbake på 2007- nivå igjen (Bergem, et al., 2016, s. 37). Fra 2015 til 2019 er det ingen signifikante endringer i algebra (Kaarstein, et al., 2020, s. 5).



Figur 1: Gjennomsnittsskåren for de ulike emneområdene i matematikk for Norge, Sverige, England, og USA (Bergem, et al., 2016, s. 36).

1.1 Bakgrunn og formål for oppgavevalg

Når man ser på resultatene fra TIMSS undersøkelsen, illustrert på figur 1 ovenfor, ser man at norske elever på ungdomstrinnet skårer lavere i algebra sammenlignet med andre land (Bergem, et al. , 2016, s. 36). Dette kan tyde på at undervisningen om tema algebra er av for lav kvalitet i den norske skolen. Vi har vært vikarlærere i mange år på ungdomstrinnet, der vi har opplevd at mange elever har utfordringer med matematikkfaget, spesielt i emneområdet algebra.

Hva som er årsaken til at norske elever presterer lavere enn andre land innenfor algebra er det ikke et tydelig svar på. Det er lite forskning som er gjennomført i Norge som undersøker algebrakunnskaper hos elevene. En mulig årsak kan være misoppfatninger, eller manglende ferdigheter innenfor aritmetikk.

Derfor ønsker vi å undersøke nærmere elever på 10. trinn og se hvordan de presterer aritmetikk og algebra, på bakgrunn av det TIMSS resultatene viser. (Bergem, et al., 2016, s. 36), og om dette har noen sammenheng med manglende ferdigheter innenfor aritmetikk eller misoppfatninger innenfor algebra, eller om det kan være andre faktorer som spiller inn på elevenes evne til å prestere i algebra.

Etter å ha hatt en grundig gjennomgang av litteratur om algebra, algebravansker, misoppfatninger, og overgangen fra aritmetikk til algebra, har vi kommet frem til at vansker i algebra henger sammen med ferdigheter innenfor aritmetikk og misforståelser når elevene går fra aritmetikk over til algebra. Om grunnen til utfordringene hos elevene er mangelfulle ferdigheter innenfor aritmetikk, eller misoppfatninger innenfor algebra, så kan dette være til hjelp for oss som lærere slik at vi kan legge opp undervisningen på en slik måte at det kan hjelpe elevene bedre å møte disse utfordringene i emneområdet algebra. I denne oppgaven vil vi derfor prøve å få sett litt på aritmetikk og algebra, og hvordan de henger sammen.

1.2 Problemstilling

Vi har nevnt tidligere i oppgaveteksten at vi i denne oppgave ønsket å undersøke om årsaken til elevens algebravansker kommer av manglende ferdigheter i aritmetikk, eller misoppfatninger innenfor algebra hos elever i 10. trinn.

Problemstillingen for oppgaven er:

Hvilke sammenhenger er det mellom 10.trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra?

For at problemstillingen skal være tydelig og klar, har vi gjort rede for begrepene «aritmetikk», «algebra», og «prestasjoner» Slik:

Algebra: Algebra omhandler oppdagelse av sammenhenger, strukturer og størrelser (Bednarz, et al., 1996, s. 319). Ifølge Læreplan for Kunnskapsløftet (LK20) i matematikk, innebærer algebra utforskning av strukturer, mønstre og relasjoner, og er en essensiell forutsetning for at elever skal kunne generalisere og modellere innenfor matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2020). I denne oppgaven har vi valgt å avgrense begrepet algebra til lineær algebra, det vil si en lineær likning også kjent som førstegradslikning. Vi har gjort dette basert på hva deltakerne ble testet i, og hva som skulle undersøkes.

Aritmetikk: Aritmetikk handler om beregning av spesifikke tall (Wu, 2009). I aritmetikk fokuserer man på de regneoperasjoner som kan brukes til å løse oppgaver, men i algebra må man i stor grad heller arbeide med å representere problemsituasjonen enn å løse oppgaver (Brekke, et al, 2000, s. 8). For denne oppgaven har vi valgt å fokusere på: Operasjonsrekkefølge, Negative tegn, forståelser av likhetstegn, bruk av bokstaver og begrepet variabel, og brøk. De fem aspektene har vi valgt å fokusere på, er de som det har blitt utført mest forskning på. Disse aspektene vil bli dekket gjennom de oppgavene som skal bli presentert i kapittel 2.

Prestasjoner: I denne oppgaven har vi avgrenset begrepet prestasjon i både aritmetikk og algebra til i hvor stor grad deltakerne klarer å løse oppgavene i aritmetikk og de tilsvarene oppgavene i algebra. Hvert spørsmål har fire svaralternativer, der kun et av dem gir riktig svar på oppgaven, med unntak av 2 av oppgavene som er ja/nei spørsmål.

1.3 Aritmetikk i læreplanen i matematikk 1-10 klasse

Ettersom denne studien retter seg mot elever i 10. klasse, velger vi å se på kompetansemålene for 8-9 trinn innenfor aritmetikk. Mens kompetansemålene i 1-7 trinn har stort fokus på tall og regneferdigheter, har de fra 8. trinn mer fokus på algebra.

Etter 8. trinn skal elevene kunne:

- «utforske og beskrive primtalsfaktorisering og bruke det i brøkrekning».
- «bruke potensar og kvadratrøter i utforsking og problemløysing og argumentere for framgangsmåtar og resultat».
- «utvikle og kommunisere strategiar for hovudrekning i utrekningar» (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Etter 9. trinn skal elevene kunne:

- «berekne og vurdere sannsyn i statistikk og spel» (Utdanningsdirektoratet, 2020).

1.4 Algebra i læreplanen i matematikk 1-10 klasse

Første gang ordet algebra nevnes i læreplanen, er under kompetansemål for 8. trinn. Det nevnes begreper i kompetansemål for 7. trinn, men uten at ordet algebra er brukt. For eksempel står det i kompetansemålene for 7. trinn skal elevene kunne:

- «bruke samansette rekneuttrykk til å beskrive og utføre utrekningar»
- «bruke ulike strategiar for å løyse lineære likningar og ulikskapar og vurdere om løysingar er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2020)

I kompetansemålene for 8. trinn står det at elevene skal kunne:

- «utforske algebraiske reknereglar»
- «beskrive og generalisere mønster med eigne ord og algebraisk»

- «lage og forklare rekneuttrykk med tal, variablar og konstantar knytte til praktiske situasjonar»
- «lage, løyse og forklare likningar knytte til praktiske situasjonar» (Utdanningsdirektoratet, 2020).

1.5 Oppbygning av oppgaven

I dette kapittelet ble det redegjort for bakgrunnen for temavalg og formål med oppgavevalg, og om algebra og Aritmetikk i læreplanen i matematikk. Vi skal gjøres det rede for de forskjellige begrepene som har blitt brukt i problemstilling

Denne oppgaven består videre av de følgende kapitler, relevant teori, metode, resultater, diskusjon, og avslutning med oppsummering av avsluttende kommentar.

- I kapittel 2 gjøres det rede for tidligere forskning og teori under innledningen med, radikal konstruktivisme, Aritmetikk, Algebra, overgang fra aritmetikk til algebra og misoppfatninger i algebra.. Denne redegjørelsen er bakgrunnen for problemstillingen, og danner grunnlaget for å kunne besvare den.

- I kapittel 3 presenterer vi den metodiske designet for oppgaven. Det redegjøres for vitenskapsteoretisk betraktninger design, metode, spørreskjema, populasjon og utvalg. I tillegg utdypes datainnsamlingen, databehandling, koding og analysemetoden. Videre presenteres forskningsetikk, kvalitet i studien, validitet og reliabilitet.

- I kapittel 4 blir resultatene fra spørreskjema presentert. Først oversiktlig over prosentandel riktig og galt svar på oppgaver, fordelingen av rette svar, kryssetabeller og tabeller fra korrelasjonsanalysen.

- I kapittel 5 så diskuteres resultatene opp mot problemstillingen, tidligere forskning, som ble presentert i kapittel 3, også drøfting av validitet og relabilitet og hvilke implikasjoner funnene har.

- I Kapittel 6 presenteres hovedfunn og oppsummering av undersøkelse kommer frem. Studies problemstilling besvares og kritisk refleksjon til undersøkelsen presenteres sammen med ytre validitet. På slutten av kapitelet kommer tanker om videre forskning.

2.0 Teori og tidligere forskning

I denne delen skal vi se på et avgrenset område som handler om misoppfatninger i algebra. Grunnen til det fordi algebra er et stort felt og derfor valgte vi å avgrense den, så kommer vi til å nevne en del av misoppfatninger. I tillegg har vi gjort rede for aritmetikk, og overgangen mellom aritmetikk og algebra.

2.1 Radikal konstruktivisme

Radikal konstruktivismen sin grunnlegger var Ernst von Glaserfeld, som bygget sin teori på Jean Piaget sine teorier om assimilasjon, akkommodasjon og mentale skjemaer. Radikal konstruktivisme er en teori om kunnskap og læring som hevder at all matematisk kunnskap er konstruert av individer og ikke kan eksistere uavhengig av menneskets mentale aktiviteter. Den radikale konstruktivismen bygger på 2 grunnleggende prinsipper:

- Kunnskap mottas ikke passivt, men konstrueres aktivt av enkelt individet.

- Anerkjennelse er ikke et spørsmål om å oppdage en objektivt eksisterende verden, men om å organisere ens erfaringer» (Skott et al, 2019, s. 69).

Det vil si at mennesket ikke har en annen mulighet enn å konstruere kunnskapen selv, på bakgrunn av de erfaringene som vi mennesker gjør oss. Med hensyn på de 2 grunnprinsippene, trekker den radikale konstruktivismen på arbeidet til Jean Piaget, om barns utvikling og erkjennelse. Assimilasjon skjer når et barn tar inn ny informasjon og kobler den til eksisterende kunnskap og akkommodasjon skjer når et barn oppdager at deres eksisterende kunnskap ikke er tilstrekkelig for å forstå ny informasjon, og må derfor justere eller "akkommodere" den kunnskapen barnet allerede har for å få plass til den nye informasjonen (Skott et al, 2019, s. 70). I de fleste situasjoner så pågår assimilasjon og akkomodasjon samtidig, men i ulik grad, det er ofte en av prossesene som dominerer (Glasersfeld, 2007, s.75). Det finnes ikke en "riktig" eller "feil" måte å løse et matematisk problem på, ettersom kunnskapen alltid er tilegnet seg av individuelle oppfatninger og erfaringer (Skott et al, 2019, s. 69).

Det er det andre prinsippet som gjør Ernst von Glaserfeld sin konstruktivisme radikal. Dette innebærer at vi ikke kan være sikre på om, eller i hvilken grad, våre oppfatninger av verden faktisk samsvarer med virkeligheten slik den egentlig er. (Skott et al, 2019, s.69). Vi akkomoderer i beste fall, vår forståelse, frem til at vi opplever en overenstemmelse mellom forståelse og den verden, forståelsen er rettet imot. I den sammenhengen spiller språk og kommunikasjon en viktig rolle mente Glaserfeld (Skott et al, 2019, s.86).

2.2 Aritmetikk

Aritmetikk er en gren av matematikk som omhandler tallenes egenskaper og metoder for å utføre regneoperasjoner (Aarnes, 2020, s. 1). Tallsystemet er satt sammen av de fire grunnleggende regneoperasjonene: addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon (Grevholm, 2013, s. 102).. I daglig bruk betraktes også halvering og fordobling som nyttige strategier for hoderegning og overslag, selv om de ikke lenger anses som egne regneoperasjoner (Grevholm, 2013, s. 103).

Definisjonen av "regneartene" har variert gjennom historien og på tvers av kulturer. For eksempel omtalte enkelte lærebøker for hundre år siden seks regneoperasjoner, deriblant halvering og fordobling (Grevholm, 2013, s. 103). I tillegg til de fire grunnleggende regneoperasjonene omfatter aritmetikk også brøkregning, potensregning, rot-utregning og regning med logaritmer (Aarnes, 2020, s. 1).

Målet med aritmetikk er å finne svaret på en oppgave ved å utføre en rekke aritmetiske operasjoner på enten de gitte tallene i oppgaven eller mellomverdiene som avledes derfra. Det finnes ulike teknikker for å utføre aritmetiske operasjoner, og det er viktig å forstå egenskapene til tallene man arbeider med for å kunne gjøre dette effektivt (Nickson, 2004, s. 96).

Barns kunnskap om aritmetiske operasjoner og deres egenskaper, inkludert forståelse av konsepter og prinsipper tilknyttet addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, er grunnlaget for å lære grunnleggende aritmetiske fakta, effektivt og fleksibelt bruke aritmetiske problemløsningsprosedyrer, og utvikle senere algebra og regne ferdigheter (Robinson et al, 2018, s. 422).

2.3 Algebra

Algebra er et formelt språk som brukes til å uttrykke generelle sammenhenger hovedsakelig knyttet til tall. Det er viktig at elever forstår algebra som et språk som de kan bruke til å uttrykke generelle ideer og sammenhenger på en nøyaktig og symbolsk måte. Selv om det kan ta tid for elever å lære algebra, vil det øke deres effektivitet i å bruke språket over tid (Mason, et al, 2014, s. 38).

Bruken av symboler for å uttrykke generaliseringer i algebra gjør det mulig for elevene å utforske, analysere og representere matematiske ideer på en symbolsk måte. På grunn av dette blir algebra ofte referert til som et symbolsk språk, hvor variabler og operasjonssymboler spiller en sentral rolle i generaliseringer (Bednarz, et al, 1996, s. 320). Dette bidrar til at elevene ser sammenhenger mellom ulike matematiske representasjoner og emner.

Det finnes flere ulike beskrivelser av algebra i litteraturen. For eksempel beskrev Usiskin (1998) fire ulike oppfatninger av algebra: generalisert aritmetikk, sett med prosedyrer som brukes til å løse visse problemer, studie av forhold mellom størrelser, og studie av strukturer (Kieran, 2004, s. 141). Kaput (1995) identifiserte fem ulike aspekter av algebra: generalisering og formalisering, syntaktisk veiledet manipulasjon, studie av strukturer, studie av funksjoner, relasjoner, og samvariasjon, og et modelleringsspråk (Kieran, 2004, s. 141).

Et dokument publisert av «National Council of Teachers of Mathematics» (1998) beskriver fire organisasjons-temaer for skolealgebra: funksjoner og relasjoner, modellering, struktur og språk og representasjon (Kieran, 2004, s. 141). Kieran (1996) kategoriserte skolealgebra etter de aktivitetene elevene vanligvis engasjerer seg i: genereringsaktiviteter, transformasjonsaktiviteter og globale meta-nivå-aktiviteter (Kieran, 2004, s. 141).

En studie på russiske elever nevnes av Carraher et al (2006, s. 92) viser at elever som ble introdusert for algebra allerede mellom 1-4 klasse, presterte bedre enn de andre elevene i kontrollgruppa, som begynte med algebra i 6.klasse, etter 5 år med bare aritmetikk. I studien til Carraher ser de at elever i 2-4 klasse klarer å arbeide med algebraiske oppgaver, som er tilpasset aldersnivå. Elevene arbeidet med variabler, funksjoner, algebraisk notasjon, funksjonstabeller, grafer og ligninger. De algebraiske aktivitetene omhandlet addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, brøker, forhold, proporsjoner og negative tall. (Carraher et al, 2006, ss. 94-95).

2.4 Overgang fra aritmetikk til algebra

Vygotskij understreker forholdet mellom algebra og aritmetikk slik «*Written language is to oral language what algebra is to arithemtic*» (Brekke, et al, 2000, s. 7), og definerer dermed algebra som aritmetikkens skriftspråk. Ved å anerkjenne sitatet til Vygotsky, anerkjenner vi også at kompetanse innen algebra er essensiell for mennesker i all type utdanning eller yrkesliv, der dette språket brukes. Lærers kompetanse er spesielt viktig for matematikken på ungdomsskolen for å forbedre overgangen fra aritmetikk til algebra. (Yıldız & Özdemir, 2021, s. 172)

Når man snakker om grunnleggende algebraferdigheter, må man gå tilbake til ferdighetene man lærer i aritmetikken, dette betyr at algebraferdighetene bygger på ferdigheter og regler fra aritmetikken. Utfordringer som elevene får i algebra, kommer fra forskjellen mellom aritmetikk og algebra, siden algebra er generalisering av aritmetikk (Booth L. R., 1988, s. 29).

For at overgangen fra aritmetikken til algebra skal lykkes, må elevene ha en solid forstålser av tallbegrepet, og kunne beherske ferdigheter i tallbehandlingen (Brekke, et al, 2000, s. 7). Når elevene går fra aritemteikk til algebra, vil de møte nye utfordinger i algebra, som er ulike de ifra aritmetikken. Eksempel på forskjellen i algebra og aritmetikk:

1) Notasjoner og konvensjoner: i tallet 57 referers det til posisjonssystemet, altså det mulig å sette «+» mellom verdiene til de to symbolene (50+7). Slik posisjonssystemet er ikke bygd opp i algbera, altså man kan ikke si at 5a er 5+a.
2) Regning i aritmetikk handler om at man skal finne et endelig svar på oppgaven for eksempel, 50+7=57. I motsetningen til algebra kan dette skape et problem da vil elevene få en løsning som innholder en regneoperasjon som man kan ikke kan utføres som 5+a. siden man i algebra ikke nødvndigvis skal komme fram til et tallsvar, men heller representere problemsituasjonen med et utrykk. Det at elevene kommer fram til slik åpent utrykk blir ikke lett akseptert av dem.
3) Det nye elevene møter på i algebra er bruken av bokstaver i uttrykkene. Det elevene har tendens til å gjøre med uttrykk som består av bokstaver er å erstatte bokstaven med en bestemt tallverdi (Brekke, et al, 2000, s. 8-9).

I overgangen fra aritmetikk til algebra må elevene gjøre mange justeringer, selv de elevene som er ganske dyktige i aritmetikk. For eksempel så er den grunnskole-aritmetikken vi har i dag ofte sterkt fokusert på å *finne svar*, og fokuserer ikke på representasjon av relasjoner. Elever som er nybegynnere i algebra, ser 8 + 5 som et signal på å regne ut, og vil typisk ønske å evaluere det og deretter for eksempel skrive «13» i boksen når de ser ligningen «8 + 5 = □ + 9», i stedet for riktig verdi som er «4» (Kieran , 2004, s. 140). Når et likhetstegn er til stede, behandler de det som en separator mellom problemet og løsningen, og tar det som et signal for å skrive resultatet av å utføre operasjonene som indikert til venstre for tegnet. Eller når de gjør en sekvens av beregninger, behandler studentene ofte likhetstegnet som et venstre-til-høyre-retnings-signal. Studenter som er orientert mot beregning, blir også forvirret av et uttrykk som x + 3; de tror de bør kunne gjøre noe med det, men er usikre på hva det kan være. De er ikke tilbøyelige til å tenke på uttrykket selv som et fokus for oppmerksomhet (Kieran , 2004, s. 2)

På samme måte må de tenke om igjen tilnærmingen sin til problemer. I å løse et problem som "Når 3 legges til 5 ganger et visst tall, blir summen 38; finn tallet," vil studentene som kommer fra aritmetikk trekke fra 3 fra 38 og deretter dividere med 5 - ved å reversere i omvendt rekkefølge, slik de har lært, operasjonene som er angitt i problemteksten. I motsetning vil de læres i algebra-klasser først å representere forholdene i situasjonen ved å bruke de angitte operasjonene: 5x + 3 = 38 (Kieran , 2004, s. 2).

Som det ovenstående antyder, har elevene som opererer innenfor en aritmetisk referanseramme, en tendens til ikke å se de relasjonelle aspektene ved operasjoner; fokuset deres er på beregning. Dermed kreves det betydelige justeringer i å utvikle en algebraisk tenkemåte, som inkluderer, men ikke begrenser seg til:

1: Et fokus på forhold og ikke bare beregning av et numerisk svar;

2: Et fokus på operasjoner så vel som deres inverser, og på den relaterte ideen om å gjøre / angre;

3: Et fokus på både å representere og løse et problem, i stedet for bare å løse det;

4: Et fokus på både tall og bokstaver, i stedet for bare tall. Dette inkluderer:

(i) arbeid med bokstaver som kan være ukjente, variable eller parametere;

(ii) akseptere ufullstendige litterale uttrykk som svar;

(iii) sammenligning av uttrykk for ekvivalens basert på egenskaper i stedet for numerisk evaluering;

5. Et nytt fokus på betydningen av likhetstegnet (Kieran , 2004, s. 3).

Susan Monk og Rachel Nemirovsky (1997) utforsket overgangen fra aritmetikk til algebra i ulike matematiske sammenhenger, og hvordan elever utvikler algebraisk tenkning gjennom disse sammenhengene. De undersøkte hvordan elever tenker og resonerer når de går fra å løse aritmetiske problemer til å løse algebraiske problemer, og hvordan de bruker tidligere kunnskap og erfaringer for å løse nye problemer (Monk & Nemirovsky, 1997, ss. 360-361).

Studien fant at elever som var i stand til å se sammenhenger mellom aritmetikk og algebra, og som kunne generalisere og utvide sine tidligere kunnskaper til å løse nye problemer, var mer vellykkede i overgangen fra aritmetikk til algebra. Forskerne fant også at elevenes tenkning og resonnement var påvirket av konteksten der problemene ble presentert, og at problemer som var relevante for elevenes liv, var mer engasjerende og hjalp elevene med å forstå algebraiske konsepter bedre (Monk & Nemirovsky, 1997, s. 385).

Kızıltoprak og Köse (2017) påpeker også at elever må utvikle grunnleggende aritmetiske ferdigheter, som innebærer å se relasjonene som ligger til grunn for aritmetikkreglene. Relasjonell tenkning, som innebærer å undersøke relasjonene mellom størrelser i stedet for bare å finne resultatet av operasjoner, er viktig for utviklingen av algebraisk tenking (Kızıltoprak & Köse, 2017, s. 132).

Elever må forstå den relasjonelle betydningen av likhetstegnet, og sanne/falske og åpne tallsatser kan brukes for å hjelpe dem med å utvikle relasjonell tenkning (Kızıltoprak & Köse, 2017, s. 132).

Studien fant at elevene først svarte på nummersetningene basert på resultat-orienterte prosesser, men etter hvert klarte de å svare basert på forholdet mellom tall og operasjoner. Studien undersøkte også elevenes forståelse av likhetstegnet og fant at elevene ofte så det som et symbol på en operasjon i stedet for et symbol som viser et forhold. Studien antyder at undervisningsprosesser basert på forholdet mellom åpne og sant/usant nummersetninger kan forbedre studentenes relasjonelle tenkeferdigheter. Teksten fremhever viktigheten av å anerkjenne forholdet mellom tall og operasjoner og antyder at elevene ofte fokuserer på beregninger i stedet for forholdet mellom tall og operasjoner. Teksten antyder også at elevene har vanskelig for å håndtere nummersetninger som inneholder multiplikasjon og divisjon, og med divisjoner på begge sider av en ligning (Kızıltoprak & Köse, 2017, ss. 142-143)

2.5 Misoppfatninger i algebra

Misoppfatninger er en feilaktig forståelse eller tolkning av noe. Dette kan skyldes at en har misforståelse eller manglende oppfatning av begrepet. Det kan også skyldes at en gjør en overgeneralisering, en overføre en tenkemåte som et riktig i spesielle tilfeller til situasjoner der tenkemåten ikke lenger holder (Nygaard & Zernichow, 2006, s. 1).

Misoppfatninger, eller delvis begreper, baserer seg på en bestemt tenkning hos elevene som brukes regelmessig konsekvent og er noe som skiller seg fra å være tilfeldige feil eller misforståelser (Matematikksenteret, u.d., s. 1). I oppgaven så har vi søkelyset på de misoppfatningene som vanligvis oppstår hos elevene innen emneområdet algebra.

I løpet av de siste ti årene har forskere innen matematikkopplæring identifisert en rekke misoppfatninger som er vanlig blant elevene knyttet opp mot algebra. De mest studerte misoppfatningene omfatter likhet/ulikhet, negativitet, variabler, brøk, operasjonsrekkefølge og funksjoner (Booth, et al, 2017, s. 1).

2.5.1 Negative tall og oppløsning av parenteser

Negative tall er en viktig del i algebra, og elevene må ha kontroll på dette område for å kunne løse algebraiske utrykk. Elevene får utfordringer med negative tall i overgangen fra aritmetikk til algebra. I algebra må elevene forstå ikke bare størrelsen, men også retningen til tall (Booth & Koedinger, 2008, s. 572).

Booth og Koedinger (2008) hadde fokus på likhetstegnet og negative fortegn som en viktig funksjon som er nødvendig for å løse algebraisk likninger. Resultater fra studie tyder på at å ha ukorrekt forstålser om likhetstegnet og negative fortegn, gjør at elevene bruke feil strategier for å løse algebraiske likninger (Booth & Koedinger, 2008, s. 575).

Vlassis (2004) fant ut at flere elever på 8.klassinger kan lett forstå betydningen av negative 9 i utrykket n – 9, men har et problem når -9 står alene (Vlassis, 2004, s. 478).

Vlassis sin studie fra 2004 fokuserte på hvilke konseptuelle endringer som skjedde med elevene i møte med negative tall i grunnleggende algebraiske operasjoner (Vlassis J. , 2004, s. 469). Analysen av elevenes muntlige og skriftlige diskurs vitner om tilstedeværelsen av to hovedtyper av konseptuelle endringer:

- Når elevene forsøker å forene deres aritmetiske forutsetninger om naturlige tall og de algebraiske reglene som kreves for å operere med negativer.

- Relatert til minustegnet og utvikles gjennom en utvidet forståelse og en fleksibel bruk av det vi kaller 'negativitet' (Vlassis J. , 2004, s. 469)

Videre argumenteres det for at disse konseptuelle endringer ikke kan skje fullt ut uten at elevene utvikler en meta-konseptuell bevissthet om deres symboliserende aktiviteter.

(Vlassis J. , 2004, s. 469)

I artiklen «*A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra*» så ble det observert tilfeller der deltakerne i studien hadde en tendens til å ignorere minustegnet foran tallet 2 i $4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 - 5$. Det var 16 av 22 elever som la til 2 og 5. I et annet eksempel, $17 + 59 - 59 + 18 - 18 = ?$, observertede 6 elever som ignorerte minustegnet foran 59 og la 59 til 18 (Herscovics & Linchevski, 1994, s. 73). Bakgrunnen for dette mente forskerne mulig kunne komme av operasjonsrekkefølgen. Ved å lære at multiplikasjon og divisjon går foran addisjon og subtraksjon i operasjonsrekkefølgen, kan noen elever konkludere med at addisjon, går foran subtraksjon (Herscovics & Linchevski, 1994, s. 74).

Rett bruk av parenteser er veldig viktig for å lære seg algebra (Aydın-Güç & Aygün, 2021, s. 1109). Tavsan (2020) avslørte at elever gjorde feilen med å ignorere parenteser når de tolket algebraiske uttrykk og skrev dem som setninger. Det er kjent at noen elever ikke tar hensyn til parenteser når de skriver den verbale algebraiske uttrykket, og de skriver det algebraiske uttrykket som svarer til setningen "Legg til n med 5, og multipliser deretter med 3" som "n + 5 · 3 = n + 15. Årsaken til denne misoppfatningen antas å være at elevene opererer fra venstre mot høyre, uten å ta hensyn til operasjonsrekkefølgen, mens de skriver algebraiske uttrykk (Aydın-Güç & Aygün, 2021, s. 1109).

Det er kjent at noen elever anser det som riktig å skrive 6 (x + 3) som 6x + 3. Denne feilen anses å være forårsaket av aritmetiske operasjoner og kalles for å feile å ta hensyn til parenteser når man utfører operasjoner. Her tar elevene ikke hensyn til parentesene og tar heller ikke hensyn til operasjonsrekkefølgen (Aydın-Güç & Aygün, 2021, s. 1109).

2.5.2 Operasjonsrekkefølge

I matematikk er det viktig å kjenne til egenskapene til regneoperasjoner. Alle regneoperasjoner er relatert til hverandre og har både like og forskjellige aspekter.

For eksempel kan man si om multiplikasjon kan angis som gjentatt addisjon. I matematikk er viktig å forholde seg til regler når det gjelder regneoperasjoner, for eksempel, operasjonsrekkefølge. Operasjonsrekefølge med heltall, brøker, og desimaler er en grunnleggende ferdigheter som trengs i algebra (Bush et al, 2013, s. 618)

Operasjonsrekkefølge er en rekkefølge av operasjoner som angir hvilken beregningene skal utføres i et kompleks utrykk (Tabak, 2019, s. 363). Mange elever tenker at det er ikke nødvendig å følge reglene for operasjonsrekkefølge, men de løser heller utrykket fra venstre til høyre (Boot et al., 2017, s. 5). I en undersøkelse som har blitt utført i Tyrkia, undersøkte de elevens kunnskap om aritmetiske operasjoner (operasjonsrekkefølge). Noen oppgaver begynte med multiplikasjon og divisjon, mens andre oppgaver begynte med addisjon og subtraksjon. Studien viste at en høyere prosentandel av elevene ga feil svar når regneoperasjonen begynte med addisjon eller subtraksjon sammenlignet med multiplikasjon og divisjon. Forskerne konkluderte med at dette skyldes at mange elever ikke tok hensyn til rekkefølgen av operasjonene i aritmetiske uttrykk, men utførte dem fra venstre mot høyre. (Tabak, 2019, s. 371). Et eksempel på slik oppgave fra studie var $6 + 5 \times 2 =$?

På denne oppgaven hadde hele 81% av elevene svart feil, og det vanligste svaret var 22. Dette indikerer at elevene utfører operasjonene fra venstre mot høyre, uten å ta hensyn til operasjonsrekkefølgen. (Tabak, 2019, s. 366).

Tabak sin studie fra 2019 forsket på å identifisere misoppfatninger blant elever i 6., 7. og 8. klasse om operasjonsrekkefølge i forbindelse med aritmetiske uttrykk og å stille og løse problemer relatert til aritmetiske uttrykk. Forskningen brukte en totrinns diagnostisk test utviklet av forskeren for å identifisere elevers misoppfatninger (Tabak, 2019, s. 363). Ut ifra resultatene ble det fastslått at elever i 6., 7. og 8. klasse:

- Utførte aritmetiske uttrykk fra venstre mot høyre uten å ta hensyn til operasjonsrekkefølge.

- Utførte operasjoner i parenteser først når det gjelder operasjonsrekkefølge.

- Ikke tok hensyn til operasjonsrekkefølge når de skrev eller løste et aritmetisk uttrykk lik et gitt tall.

- Elevene hadde vanskeligheter med å formulere et problemutsagn som involverte aritmetiske uttrykk og krevde hensyn til operasjonsrekkefølge.

(Tabak, 2019, ss. 371-372)

2.5.3 Brøk

Selv om brøk blir introdusert før algebraiske konsepter, påvirker misforståelser om brøk i stor grad elevens kunnskap i algebra. Ifølge The National Mathematics Advisory Panel (2008) en av de viktigste type kunnskap som er nødvendige for elevene for å lære algebra, er kunnskap om rasjonale tall eller brøk. Brøk i algebra kan sees som koeffisienter/stigningstall, konstanter, og løsninger (Booth, et al, 2017, s. 4).

Når elever jobber med brøk, er det viktig å presisere hvilket aspekt av brøkbegrepet det arbeids med. Det er mange elever som indentifisere brøk med å beherske regler og prosedyre. Elevene skiller ikke mellom forståelse av begrepet brøk, og hvilke ideer som er knyttet til begrepet og algoritmene (Matematikksenteret, u.d.).

Selv om en brøk består av nevner og teller, representerer brøken ett tall, på samme måte som for eksempel de hele tallene, og dette er en av de viktigste grunnleggende ideene elevene må forstå. Når brøk blir betraktet som en tallstørrelse, har den også sin plass på tallinja (rasjonalt tall) (Matematikksenteret, u.d.).

Den mest utbredte misoppfatningen når det gjelder addisjon og subtraksjon av brøker er at elevene ser på teller og nevner som to separate heltall i stedet for ett tall som representerer del-hel-forholdet. De legger til eller trekker fra de to tellerne og de to nevnerne separat. For eksempel $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{4}{6}$, fordi 1+3=4 og 2+4=6 (Matematikksenteret, u.d.). I studien som ble utført av (Aliustaoğlu, Tuna, & Biber, 2018), der de skulle avdekke misoppfatninger hos elever på sjette trinn i ungdomsskolen når det gjelder del-hel relasjon i brøker, representasjon av brøker på tallinjen, sammenligning av brøker og operasjoner med brøker, fant de at de vanlige misoppfatningene om addisjon av brøker er å legge sammen teller med teller og nevner med nevner separat (Aliustaoğlu et al, 2018, s. 596). Ved å reflektere rundt brøker som størrelser vil elevene erfare at denne tenkningen ikke fører fram til riktig svar. I dette eksemplet er begge brøkene en halv eller mer, så elever som har forstått brøk, vil se at summen må bli mer enn en hel (Matematikksenteret, u.d.).

Når det kommer til multiplikasjon og divisjon av brøk, er huske reglen veldig enkel, der man i multiplikasjon har huskeregelen å multiplisere teller med teller og nevner med nevner. I divisjon så kryss-multipliserer vi brøkene. Men likevel er det mange elever som usikre på regelen. De adderer teller med teller og nevner med nevner, eller kryss-multipliserer når de skal multiplisere brøkene (Matematikksenteret, u.d.). Et eksempel på et problem som elevene gjør feil var en oppgave som gikk på multiplikasjon. Da de ble bedt om å løse problemet 2/5 x 3/4, de fleste elevene kryss-multipliserte og svaret deres ble 8/15. Etter at forskeren forklarte det riktige svaret for dem, som var 6/20, argumenterte de fleste av dem med at de er vant til å bruke kalkulatorer for å løse slike problemer. De sa også at de var kjent med den regelen, men at de bare glemte den fordi de sjelden brukte den (Alghazo & Alghazo, 2017, s. 137).

Brown og Quinn sin studie fra 2007 formålet med studien var å bestemme om det finnes en sammenheng mellom ferdigheter med vanlige brøker og suksess i algebra (Brown & Quinn, 2007, s. 9). Ferdigheter i den sammenhengen indikerte at en student ikke bare var i stand til å forstå brøkkonsepter, men også at studenten kunne manipulere brøker for nøyaktig beregning uten hjelp av en kalkulator (Brown & Quinn, 2007, s. 9). Anbefalingene som studien gir, er både basert på tidligere litteratur, og funnene i studiens resultater:

- Barn i 1. – 4. klasse bør få tid til å utvikle hele tallkonsepter og operasjoner med hele tall uformelt med rikelig konkrete referanser. Arabiske symboler bør brukes bare til tellingsformål og alltid knyttes til konkrete objekter eller billedlige representasjoner. Uformell praksis med brøkkonsepter bør begrenses til opplevelser som oppstår naturlig, som rettferdig deling eller situasjoner som involverer penger (Brown & Quinn, 2007, s. 13).

- Elever på 5.trinn bør få erfaringer som utvider helhetstallkonseptet med blikk mot algebra, og involverer en uformell behandling av feltets egenskaper. Disse elevene trenger å få erfaring med partisjon som en metode for å løse muntlige problemer som involverer brøker. Den uformelle behandlingen av brøker bør inkludere manipulering av konkrete objekter og bruk av billedlige representasjoner, slik som enhetsrektangler og tallinjer. Brøknotasjon må utvikles, men formelle brøkoperasjoner ved hjelp av lærer-underviste algoritmer bør utsettes. Læringen av brøk vil sirkulere rundt uformelle strategier for å løse problemer som involverer brøker. Målet på dette nivået er å bygge en bred base med erfaring som vil være grunnlaget for en progressiv mer formell tilnærming til læring av brøker (Brown & Quinn, 2007, ss. 13-14).

- I sjette og syvende klasse må utviklingen av brøkoperasjoner som en utvidelse av helhetstallsoperasjoner gi erfaringer som veileder og oppmuntrer elevene til å lage sine egne algoritmer. Gradvis bør utviklingen lede til mer formelle definisjoner av brøkoperasjoner og algoritmer som forbereder elevene for abstraksjonene som oppstår i studiet av algebra (Brown & Quinn, 2007, s. 14).

Resultatene av denne studien tilsier at hvis elevene skal prestere bedre i algebra, er de nødt til å ha et bedre grunnlag, og være bedre forberedt innenfor alle aspekter av brøk-regning. Hvis algebra skal være for alle, må alle elevene først kunne brøk-regning «flytende» (Brown & Quinn, 2007, s. 15).

2.5.4 Bruk av bokstaver, og begrepet variabel

Variabelbegrepet inneholder to aspekter:

1) Oppfatningen om at noe varierer- i motsetning til det å være konstant. Dette aspektet er velkjent for de fleste elever når variabelbegrepet introduseres i skolen, selv om elevene ikke kjenner ordene variabel og konstant. For eksempel, elevene har erfart at en melkesjokolade koster 8 krone, og det de må betale, varier med hvor mange sjokolader de kjøper (Brekke et al, 2000, s. 9).
2) Måten man bruker bokstaver på til å representere generaliserte tall i matematikk. For eksempel kan $2 * 1 + 1, 2 * 2 + 1, 2 * 3 + 1, 2 * 4 + 1 \ldots..$ erstattes med 2x+1. Man må regene med at elevene ikke har gjort erfaringer med dette aspektet når de begynner å arbeide med algebra i skolen (Brekke et al, 2000, s. 9)

En av de mest vanlige misoppfatningene er i forbindelse med variabler, og elevers forståelse av dem. Ofte så tror elevene at en bokstav satt in i en tall sekvens står for et faktisk objekt eller merkelapp for noe. I tillegg så har elever problem med å skjønne at den samme bokstaven sett flere ganger i en tall sekvens må representere samme verdi (Booth,et al, 2017, s. 3-4).

I en tidligere studie som ble gjort der elevene ble spurt om å legge sammen 4 på 3n, så var det 36% som ga korrekt svar “3n +4”, men 31% svarte “7n”, mens 16% svarte “7” som svar. I et annet eksempel så selv etter undervisning kunne noen elever ikke akseptere 8 x a som arealet av et angitt rektangel med mindre det ble satt inn i formelen "Area av rektangel= 8 x a". Her ser vi at en stor andel av elevene sliter med å forstå variabler (Herscovics & Linchevski, 1994, s. 63). Derfor, hvis elever etter en introduksjon til algebra opplever vanskeligheter med å utføre operasjoner med eller på en bokstav som representerer et ukjent eller et generalisert tall, kan man neppe forvente at de skal gjøre det spontant uten noen instruksjon (Herscovics & Linchevski, 1994, s. 63).

Å overse betydningen av variabler som varierende størrelser kan det føre til at elever ikke betrakter algebraiske uttrykk som enheter. En tendens som nevnes er at elever hadde en tendens til å slå sammen eller fullføre uttrykk når de ble bedt om å forenkle algebraiske uttrykk (for eksempel, 2x + 3 som 5x eller 5). Elevene kan tro at uttrykkene ikke er blitt fullstendige, og derfor forsøker de å fullføre dem (Yıldız & Özdemir, 2021, s. 180).

2.5.5 Forståelser av likhetstegnet

Elevenes misforståelser av likhetstegnet begynner i barneskolen når de ofte har misforståelsen om at likhetstegnet betyr «svaret er». Før ungdomskolen er det sjeldent at elevene forstår at likhetstegnet er et relasjonssymbol, og fungerer som en balanse med den totale verdien på begge sider er det samme (Bush et al, 2013, s. 620).

Fra aritmetikken har elever erfaringer med likhetstegn, og kjenner tegnet som en kommando for å utføre en operasjon enn å se på uttrykket som et symmetrisk forhold mellom venstre og høyre siden av likhetstegnet (Russell et al, 2009, s. 417). Elevene har en forståelse av likhetstegnet fra barneskolen er at når likhetstegnet dukker opp så skal man «gjøre» noe eller «gi» noe, (Russell et al, 2009, s. 417), dette fører til at følgene utrykk gir problemer hos elevene 34= 19+15, elevene har vanskeligheter for å akseptere dette (Herscovics & Linchevski, 1994, s. 65), siden skrivemåten er forskjellige fra det elevene er vant til.

Andini og Prabawanto har funnet ut at for å hjelpe elevene med å forstå likhetstegnet som en likhet, er viktig å lære elevene å tenke rasjonelt. Dette er viktig grunnlag for å utvide overgangen til algebra (Andini et al, 2020, s. 6).

Elevene er vant å til at operasjoner er på venstre side av likhetstegnet og svaret på høyre side. Tendensen til å bruke denne strukturen i alle aritmetiske setninger fører til alvorlige misoppfatninger i betydningen av likhetstegnet (González, et al , 2004, s. 2).

Marta Molina González, Rebecca Ambrose, og Encarnación Castro Martínez kom frem med sin studie at den vanligste misoppfatningen elevene hadde av likhetstegnet var at de tolke likhetstegnet som en kommando for å produsere et svare fra venstre til høyre (González, et al, 2004, s. 4)

Denne misoppfatningen kan forårsake alvorlig problemer i algebra, og begrense elevens evne til å reflektere over identiter.

Å ha en riktig forstålse av betydningen av likhetstegnet er avgjørende for å manipulere og løse algebraisk likninger (Booth, et al, 2017, s. 2). noen elever mener at operatører må fra fra venstre side av likhetstegnet, for eksempel, 5+2=3+4 bør skrives om til 5+2=7, og 3+4=7 (Booth, et al, 2017, s. 2)

2.6 Nordisk matematikkundervisning

Norske elever presterer svakt i algebra. Det samme gjør svenske og finske elever. Resultatene tegner noe man kan kalle en nordisk profil. Den kjennetegnes av ensidig vekt på bruk av matematikken til dagligdagse situasjoner, og lite vekt på ren matematikk. Forskere har pekt på endringer i læreplaner i en del land har kommet av et ønske med mer vekt på den dagliglivsmatematikken, og dette på bekostning av mer abstrakt matematikk, slik som algebra. For elevene i grunnskolen ser det ut for å være særlig det som kalles basisferdigheter i algebra som blir forsømt (Grønmo, 2015).

Det er essensielt at elevene mestrer den rene, abstrakte matematikken, spesielt innenfor feltene tall og algebra, som kan betraktes som matematikkens kjerne. Alle trenger gode ferdigheter i tall og tallregning, men det er også viktig at en betydelig del av befolkningen har solide grunnleggende kunnskaper i algebra. Dette er nødvendig for mange videreutdanninger og yrker, enten det er innen ingeniørfag, økonomi, datakunnskap, naturvitenskap eller matematikk. (Grønmo, 2015). Hovedårsaken til frafall i mange studier, for eksempel ingeniørutdanninger, er manglende grunnleggende ferdigheter innenfor algebra. (Grønmo, 2015).

2.7 Algebra introduksjon i matematikkbøkene

Hvilken innfallsvinkel læreboka og læreren har i introduksjonen til algebra, påvirker arbeidet videre, også for elevenes sitt syn på algebra. (Husabø, 2016) I sitt doktorgradsarbeid innen undervisningsvitenskap har Kongelf analysert lærebøker, med fokus på eksempel, illustrasjoner og forklaringer. Resultatene er nedslående. De viser at det er lite informasjon om i hvilken sammenheng elevene skal bruke algebraen. I tillegg så blandes sammenhengene, noe som er veldig uheldig i en introduksjonsfase. Samtidig så velger bøkene ulik tilnærming enn hva læreplanen krever. (Husabø, 2016).

For å gjøre det læreplanen ber om er det viktig å bygge på forkunnskap, altså å knytte det elevene allerede vet, med det nye stoffet de skal lære. For eksempel siden elevene har lært at 1 x 5 = 5, når 1 ganges med 5, så blir svaret 5, og det som ganges med 1 forblir uendret, så er det denne formen for forkunnskap lærerplanen bygges videre på. Ut ifra eksempel så skal man klare å generaliser og forklare ovenfor elevene at det samme gjelder 1 x a = a, ettersom 1 x 5 = 5. (Husabø, 2016).

3.0 Forskningsdesign og metode

I dette kapitlet skal vi presentere de metodiske valgene og vurderingen for studiet, for å besvare følgende problemstilling:

Hvilke sammenhenger er det mellom 10.trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra?

3.1 Vitenskapsteoretisk betraktning

I studiens tidlige fase så må man ta stilling til hva og hvem som skal undersøkes, og hvordan undersøkelsen skal utføres. Utformingen av denne planen kalles forskningsdesign (Johannesen et al., 2021, s.265). Formålet med studien er avgjørende for hvilken metode som bør brukes (Johannesen et al., 2021, s.52). I en kvantitativ empirisk undersøkelse, så er det den empiriske dataen som er viktig. Empiri kommer av det greske empeiria, som betyr «forsøk» eller «prøve» (Johannesen et al., 2021, s.26). Empiri er et utsagn om virkeligheten som gir sitt grunnlag i erfaring og ikke antakelser. I undersøkelsen så er det innsamla empirisk data vi kommer til å ta utgangspunkt i. Virkeligheten er omfattende og dynamisk, og derfor er det derfor ikke mulig å få registeret «alt». Derfor blir dataen mer eller mindre en vellykket representasjon av virkeligheten (Johannesen et al., 2021, s.26). I empirisk forskning er en antakelse om at virkeligheten er noe som eksiterer uavhengig av den som forsker på virkeligheten. Det blir sett på som et skille mellom virkeligheten på den ene siden og forskeren som skal frembringe kunnskap om virkeligheten. Epistemologi er teorien om kunnskap. (Høgheim, 2020, s.21) Ulike syn på hvor sann kunnskap vi kan få om virkeligheten utenfor oss selv, danner grunnlaget for den epistemologiske debatten som har pågått i århundrer (Postholm & Jacobsen, 2022, s.45). Skillet mellom empirisme, synet om at all kunnskap kommer til oss gjennom sansene, og rasjonalisme, synet om at kunnskap skapes gjennom logisk tenking, altså resonnering, handler om hva er det som kan regnes som kunnskap, eller mer bestemt, hvilket bevismateriale, eller argumentasjon som man kan basere seg på som ligger til grunn for kunnskapen. (Høgheim, 2020, s.21) I en slik empirisk studie, så er det viktig å ha noen tanker på hva slags grunnleggende perspektiv man har, som for eksempel syn på skolen. «Hva er egentlig en skole?» (Postholm & Jacobsen, 2022, s.36). Et slikt spørsmål er regnes som et ontologi spørsmål, som handler om det grunnleggende synet vi har på et fenomens natur. Slike ontologi spørsmål om et fenomen er nivådelte, der «Hva er egentlig en skole?» er på makronivå, men vi i vår studie ønsker å se dypere på det, på et mikronivå, for å kunne se på elevers forståelse av matematikk, og mer spesifikk hvilke misoppfatninger de har, og hvilke mangler de har i den nødvendige forkunnskapen, dette for å bedre forståelse deres oppfattelse av matematikken. Alle mennesker møter verden med en forforståelse, med kunnskaper og oppfatninger om virkeligheten som vi bruker for å tolke det rundt oss (Johannesen et al., 2021, s.26). Slik er det for elevene i matematikken, når de møter et nytt spørsmål bruker de den oppfatning om hvordan de skal løse problemet, som de har innlært, til å finne svar på spørsmålet. *Misoppfatninger, eller delvise begreper, bygger på en bestemt tenkning hos elevene som brukes nokså konsekvent og er noe annet enn tilfeldige feil og misforståelser (*Matematikksenteret, u.d). Når elevene har en misoppfatning, så bygger dette på at de har feil oppfatning av hva som faktisk er riktig, og det er disse typer misoppfatning vi ønsker å se nærmere på. Samtidig å undersøke om det er ferdigheter innenfor aritmetikk som elevene gjennom sitt skoleløp ikke har klart å fange opp.

3.2 Design

For å finne svar på vår problemstilling "*Hvilke sammenhenger finnes mellom 10. trinnselevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra?"* ønsket vi å evaluere elevenes prestasjoner i algebra og aritmetikk, da måtte vi å undersøke om det er en sammenheng mellom deres ferdigheter i de to områdene og om kunnskap i det ene feltet kan påvirke det andre, og vice versa. Dette gjorde vi for å avdekke om ferdigheter i aritmetikk kan påvirke elevenes prestasjoner i algebra, eller om dette skyldes misforståelser i algebra som følge av den generelle trenden blant norske elever og i TIMSS-undersøkelsen. Kvantitative datainnsamlingsmetoder er, i motsetning til kvalitative metoder, en mer lukket form for datainnsamling. Dette innebærer at informasjonen som samles inn allerede er bestemt av forskeren på forhånd (Postholm & Jacobsen, 2022, s.165).

Vi har sett over en del tidligere brukte spørreskjemaer brukt i forskningsartikler både for påvisning av misoppfatninger i algebra og testing av ferdigheter innenfor aritmetikk, og vi har funnet noen som var relevant for å bruke i vår studie. I en god del tilfeller så har det blitt gjort omfattende utprøvinger av skjemaer ved at de har blitt utsatt for validitets- og reliabilitetstester. (Johannesen et al., 2021, s.291). Spørreskjema med lukkede svaralternativer er svert flittig brukt for innsamling av primærdata i kvantitative metoder (Postholm & Jacobsen, 2022, s.166), og derfor er det denne formen for datainnsamling vi har valgt å bruke. Ulempen med dette er at det vil være små muligheter når studien er i gang for å justere opplegget når vi har gitt ut spørreskjema. (Postholm & Jacobsen, 2022, s.166). Det blir derfor viktig å gjøre et skikkelig forarbeid i form av å kvalitetssikre spørsmålene og svarsalternativene, og samtidig sørge for at vi får svar på det vi er ute etter å finne svar på. For å få dette til så er det en grunnleggende forutsetning for kvantitative studier at problemstillingen lar seg konkretisere i stor grad, slik at det er mulighet for å stille presise spørsmål, og samtidig ha avgrensede svarsalternativer. (Postholm & Jacobsen, 2022, s.167). Ved bruken av forhåndsoppgitte svarsalternativer blir det lettere for deltakerne å fylle ut skjema, siden de kun trenger å markere det aktuelle svaret. Ulempen med dette er at vi ikke fanger opp informasjon utenom de oppgitte alternativene. Dette kan føre til at deltakeren må tilpasse sine svar til de oppgitte svarsalternativene. (Johannesen et al., 2021, s.292). Vi kommer til å bruke tidligere gitte oppgaver ifra andre studier, i vår studie for å innhente samme typen data fra vår målgruppe. I utformingen av et spørreskjema, så er det en kognitiv prosess i 4 faser vi må ta hensyn til.

- Deltakeren må forstå og tolke spørsmålet riktig. Hva ønsker forskeren å få svar på?
- Deltakeren må aktivere hukommelsen for å hente frem relevant informasjon.
- Deltakeren må vurdere hvilken informasjon som er relevant.
- Deltakeren må formulere eller markere relevante svar.
  (Johannesen et al., 2021, s.294).

I utformingen av spørsmålene, eventuelt oversettelsen, så er det viktig at det kommer tydelig frem hva som det spørres etter. Deltakeren skal forstå ord og utrykk på samme måte og vite hvilken informasjon som er relevant. (Johannessen et al., 2021, s.295)

3.3 Metode

Kvantitative metoder har fordelen av å være mer fokuserte og tillater undersøkelse av flere deltakere samtidig. Dette muliggjør en oversikt over vanlige mønstre eller trender blant deltakerne, og gir dermed et mer representativt bilde av hva som er typisk for flertallet (Postholm & Jacobsen, 2022, s.165). På grunnlag av dette har vi valgt å bruke en kvantitativ metode, ettersom vi ønsker en oversikt over hva som er vanlig blant et utvalg av målgruppen for å skape et mer nøyaktig representativt bilde av målgruppens populasjon. For å gjennomføre en slik undersøkelse, er vi avhengige av å ha en populasjon å samle data fra. Populasjon betyr befolkning og brukes også i en videre betydning, for eksempel for å vise det totale antallet organismer av en bestemt art (Johannesen et al., 2021, s.274). I samfunnsvitenskap kalles populasjonen også for studiepopulasjonen. Populasjonen vi ønsker å studere i vår undersøkelse er norske ungdomsskoleelever. Siden det er utfordrende å gjennomføre en undersøkelse som omfatter hele populasjonen av ungdomsskoleelever i Norge, vil vi utføre undersøkelsen på et mindre utvalg av denne populasjonen.

Forskningsprosjekter har ikke alltid som eneste mål å beskrive og forstå, men også å forsøke å identifisere årsakene bak fenomener som finner sted, eller ikke finner sted (Postholm & Jacobsen, 2022, s.233). Kvantitative og kvalitative metoder har begge både styrker og svakheter. Kvantitative metoder baserer seg på at ved hjelp av tall, formidles informasjon om virkeligheten. Kvalitative metoder innhenter informasjon om virkeligheten ved bruk av ord og språk. (Postholm & Jacobsen, 2022, s.189). men gir ingen informasjon av utbredelse. I valget mellom kvantitativ tilnærming og kvalitativ tilnærming så har vi sett på den informasjon som vi ønsker å finne. Hadde vi gått for en kvalitativ metode, hadde vi fått mer detaljert og utfyllende informasjon om det vi skal studere, og er særlig hensiktsmessig hvis vi skal undersøke noe som det er gjort lite forskning på. (Johannesen et al., 2021, s.23). Det vi er ute etter i vår studie er å samle in data på utbredelsen av både misoppfatninger og mangelfulle ferdigheter i aritmetikk. Kvantitativ forskning retter seg mot måling av omfang og hyppighet av et fenomen. (Postholm & Jacobsen, 2022, s.91). Det finnes ulike måter å samle inn kvantitative data på, i vår studie har vi valgt å bruken av prekodede spørreskjema. I et prekodet spørreskjema, må vi vite på forhånd hva vi skal spørre om, og hva som er aktuelle svar. (Johannesen et al., 2021, s.291).

3.4 Spørreskjema

I begynnelsen av planlegging av hvordan spørreskjemaet skulle være ble det tatt utgangspunkt i følgende punkter:

1) Konkretisere (operasjonalisere) det som er ønskelig å måle.

2) Spørsmålene utformes så korrekt som mulig, slik at utformingen på spørsmålene ikke skaper forvirring og uønskede resultater.

3) Bestemme hvordan spørreundersøkelsen skal utføres.

(Postholm & Jacobsen, 2022, s. 167).

Spørreskjemaet ble utformet ved å bygge på oppgaver hentet fra tidligere fagfellevurderte artikler og refereres til i tabell 1 (s.25), og inkluderer en kort beskrivelse av formålet med spørreskjemaet, samt en forklaring på hvordan oppgavene ble valgt og tilpasset.

Oppgavene i spørreskjema er fordelt inn i 2 hovedkategorier, og 5 underkategorier. Aritmetikk (Alle a-oppgaver) og Algebra (Alle b-oppgaver) som hovedkategori for spørsmålene, der hovedkategoriene videre deles inn i oppgaver relatert til:

Tabell 1: Oversikt over oppgaveemner, oppgaver og kilder

Emne	Oppgaver	Kilder
Negative tegn	1-3 a/b	(Vlassis J. , 2004, s. 475)
Operasjonsrekkefølge	4 og 5 a/b	(Tabak, 2019, s. 366)
Brøk	6-8 a/b	(Brown & Quinn, 2007, s. 14)
Forståelse av begrepet variabel	9 og 10 a/b	(Tofteberg et al, 2021, s. 9)
Likhetstegn	11 og 12 a/b	(Vlassis J. , 2002, s. 345)

3.4.1 Formålet med spørreskjemaet:

Hensikten med et kvantitativt spørreskjema er å innhente numerisk informasjon som kan behandles statistisk for å besvare problemstillingen i denne studien. Formålet med spørreskjemaet i denne studien var å samle inn data fra deltakerne for å undersøke og analysere deres ferdigheter innen aritmetikk og algebra, samt evaluere deres prestasjoner.

3.4.2 Valg og utforming av oppgaver

Under utformingen av spørreskjema var hensikten med spørreskjema klart, målet var å samle inn data som var i tråd med det å kunne svare på problemstillingen. Spørsmålene må formuleres slik at de gir svar på problemstillingen. (Johannessen et al, 2021, s. 292). Ved å bruke oppgaver fra tidligere fagfellevurderte artikler (Johannessen et al, 2021, s. 291) sikrer vi at spørsmålene og oppgavene er vitenskapelig funderte og har et solid teoretisk grunnlag. For å velge oppgaver fra tidligere fagfellevurderte artikler, søkte vi etter relevante studier innenfor aritmetikk og algebra. Vi så etter artikler som hadde blitt publisert i anerkjente tidsskrifter og hadde høy siteringsfrekvens. Dette ga en indikasjon på at oppgavene i disse studiene var av høy kvalitet og godt mottatt av forskningssamfunnet.

En omfattende gjennomgang av relevant forskning ble utført for å finne passende oppgaver til vår studie og som kunne være relevante til å besvare vår problemstilling. Til slutt valgte vil noen artikler som er var fagfellevurderte. Følgende artikler ble valgt: (Vlassis J. , 2004), (Tabak, 2019), (Brown & Quinn, 2007), (Vlassis J. , 2002) også hentet vi ut noen oppgaver ifra en lærebok i matematikk (Tofteberget al, 2021). Når vi hadde funnet relevante artikler med oppgaver som kunne brukes i spørreskjemaet, tilpasset vi dem for å sikre at de passet inn i vår egen studie. Vi gjorde eventuelle nødvendige endringer for å sikre at språk, målgruppe og format var i tråd med vår egen forskning. En del av oppgavene i algebra har vi hentet fra artiklene, der vi selv har lagd tilsvarende oppgaver i aritmetikk. I andre deler har vi gjort motsatt, hentet oppgaver fra artiklene som passer til aritmetikk, og har selv lagd tilsvarende algebra-oppgaver innenfor samme kategori. Dette ble gjort for å kunne se sammenhengen i hvordan elevene svarte innenfor de forskjellige kategoriene (1: Negative tegn, 2: Operasjonsrekkefølge, 3: Brøk, 4: Forståelse av begrepet variabel, 5: Likhetstegn.).

Det er også inkludert et spørsmål om kjønn i spørreundersøkelsen fordi man kan kartlegge og sammenligne eventuelle kjønnsforskjeller. I tillegg er det også inkludert et spørsmål om hvor godt deltakeren liker matte, for å kartlegge sammenheng mellom elevens prestasjoner og hvor godt eleven liker matte.

3.4.3 Testing av spørreskjema

Pilotprosjekt: Vi testet ut spørreskjemaet i en 10. klasse på en lokal skole, mens vi var til stede. Etter at elevene hadde besvart oppgavene i spørreskjemaet spurte vi elevene om hva de syntes om utformingen av spørsmålene, om oppgavene var forståelige, eller om noen av spørsmålene var utydelige og trengte justering i ordlyd etc. Vi målte også tidsbruk for å estimere hvor lang tid spørreskjemaet ville ta å gjennomføre.

Prestudie ble brukt for å sjekke hvordan utførelsen kunne gå, om deltakerne klarte å tolke oppgavene, og for å avdekke eventuelle justeringer som måtte bli gjort, også samtidig sjekke om vi har klart å gjenskape lignende resultater til de studiene/publikasjonene vi har hentet spørsmålene ifra. En prestudie kan være lurt i forkant av en mer omfattende kvantitativ studie. (Johannessenet al, 2021, s. 301). Vi valgte å bruke nettskjema.no for innsamling av data til vår studie. Nettskjema er Norges mest bruke løsning for datainnsamling til forskning i Norge. En sterk side med bruken av web-baserte datainnsamlingsmetoder er lave kostnader (Postholm & Jacobsen, 2022, s.185). I tillegg så er nettskjema veldig arbeidsbesparende ettersom når dataen er blitt samlet inn, så kan dataene lett lastes ned og klargjøres for koding. Dette gjør også rommet for menneskelige feil mindre, ved manuell loggføring av dataene.

3.5 Populasjon og utvalg

Denne studien er basert på en utvalgsundersøkelse og forutsetter en populasjon for å kunne gi relevante resultater. Utvalgsstudier inkluderer ofte et variert utvalg av individer fra forskjellige kontekster, noe som bidrar til økt variasjon og muligheter for statistisk generalisering. (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 80). Utvalgsundersøkelser bygger på premisset om at det finnes et betydelig antall enheter som må undersøkes for å oppnå en fullstendig oversikt. (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 79).

Målgruppen for denne studien er norske ungdomsskoleelever, nærmere bestemt elever på 10.trinn. Dette valget ble gjort for å forsikre oss om at elevene har hatt undervisning i algebra. På grunn av tids- og ressursbegrensninger har vi valgt å fokusere på et utvalg av 50 tilfeldig valgte skoler i Norge. En spørreundersøkelse ble distribuert til disse skolene, og utvalget ble trukket fra en liste over alle skoler som har deltatt i nasjonale prøver.
Kontakt med skolene ble etablert gjennom rektorer via e-post og telefon, og informasjon om undersøkelsen ble formidlet. Imidlertid viste det seg å være utfordrende å finne skoler som ønsket å delta, hovedsakelig på grunn av høyt arbeidspress i 10. klasse i perioden før eksamen. Lærere er opptatte, og skolene mottar mange forespørsler fra studenter som skriver oppgaver, noe som begrenser deres kapasitet for deltakelse.
Etter hvert som tiden gikk uten positiv respons fra noen av de 50 tilfeldig utvalgte skolene, måtte vi endre strategi for å samle nok deltakere til undersøkelsen. Vi kontaktet medstudenter som jobber som matematikklærere ved forskjellige skoler i Norge. Til slutt mottok vi positiv respons fra syv skoler, med totalt 150 elever på 10.trinn som deltok i undersøkelsen.
Vi ønsket å få utført undersøkelsen på et stort antall av deltakere for å få et mer representativt resultat for populasjonen. (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 275). Hvis enhetene i en populasjon har stor variasjon, så kan det være vanskelig å si noe om populasjonen basert på et lite utvalg. (Løvås, 2021, s.28). Dermed så er det viktig for oss å få et stort utvalg fra populasjonen til å delta i vår undersøkelse, for å skape et mer pålitelig bilde av virkeligheten. Jo flere caser som studeres, jo mer styrkes muligheten for å påstå noe man finner til å kunne gjelde for populasjonen. (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 79). «Hvis vi har utvalgsdata, kan vi estimere populasjonsgjennomsnittet på bakgrunn av utvalgsdata» (Johannesen et al., 2021, s.397). Så selv om vi ikke får samlet inn data for hele Norges 10. klasse elever, så kan vi allikevel gjøre et estimat, på hva populasjonsgjennomsnittet ligger på, basert på den utvalgsdataen vi har samlet inn. Dette vil ikke være en nøyaktig refleksjon av virkeligheten, men det vil være en mer generell pekepinn på hva som er vanlig innenfor populasjonen av norske 10.klasse elever.

3.6 Datainnsamling

Datainnsamlingen ble gjort via nettskjema med «multiple choice» alternativer. Totalt endte vi opp med å få svar fra 7 ulike skoler, med totalt 150 elever som deltok i undersøkelsen. Besvarelsene i nettskjemaet ble gjort anonymt, på elevenes egne skoler, uten at vi var til stede. Tanken bak å bruke anonymt nettskjema er at det skulle være enkelt for skolene/lærerne å få gjennomført undersøkelsen uten merarbeid på lærerne i form av innhenting av samtykkeskjema eller andre forberedelser, bortsett fra å frigi noen minutter av en skoletime. For å logge på nettskjemaet med undersøkelsen kunne deltakerne enkelt trykke på en lenke eller skanne en QR-kode, for å komme rett til undersøkelsen. Det var ikke nødvendig med innlogging av noe slag. Undersøkelsen ble gjennomført med et spørreskjema bestående av oppgaver i aritmetikk og tilsvarende algebra-oppgaver. Det ble ikke samlet inn personalia, annet enn at elevene kunne velge å oppgi kjønn.

3.7 Databehandling og koding

Etter å ha foretatt datainnsamlingen begynte vi med databehandlingen og kodingen. Vi startet med å overføre svarene på oppgavene fra nettskjema til en EXCEL-fil og deretter kodet vi svarene i SPSS, ut ifra slik deltakerne hadde svart. Svarene ble gjennomgått flere ganger for å sikre at det ikke hadde blitt lagt inn noen feil , som ville resultere i feilkoding. I SPSS kodet vi i tillegg svarene slik, riktig svar gir 1 poeng, og feil svar gir 0 poeng. Dette for å kunne måle prestasjon til elevene basert på antall poeng. Resultatene fra undersøkelsen var da enten riktig (1 poeng) eller feil (0 poeng), dermed er det to verdier, og det kan ikke betegnes som dikotome variabler. Det er ikke enkelt å bestemme målnivå med dikotome variabler (Johannessen et al, 2022, s. 256). Filen med kodene 1 og 0 for riktig og feil ble lageret i SPSS.

Oppgavene ble delt i to hoved kategorier Aritmetikk og algebra som vist i tabell 3 (s.38), oppgaven 1a til 12 a er aritmetikk og oppgavene 1b til 12b er tilsvarende i algebra. Totalsummen av alle oppgaven ble regnet ut i aritmetikk og tilsvarende i algebra. Videre ble også aritmetikkoppgaver og algebra oppgaver delt inn i fem kategorier: negative tegn, operasjonsrekkefølge, Brøk, likhetstegn, og variabel. Disse kategoreienen ble vidre brukt i ulike tester som ble kjørt i SPSS. For å enklest mulig navngi oppgaver i denne oppgaven vil oppgavenes nummer heretter omtales ut fra oppgavenavn fra tabell 5 (s.39).
Algebraoppgaver som ble brukt i denne undersøklsen kategoriseres som at de måler prestasjoner i algebra. Algebra representerer den delen hvor vi mest systematisk møter på algoritmer og huskerelger for å løse problemer (Wæge & Nosrati, 2015).

3.8 Analysemetode

For å undersøke resultatene valgte vi å sjekke korrelasjon, som betyr «samvar» eller «samvariasjon» (Johannessen & Tufte, 2022, s. 323). En korrelasjon har vi når en verdi på variabelen går systematisk sammen med verdien på en annen variabel (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 203). Innenfor en korrelasjonsanalyse, så kan man ikke si noe om årsak eller virkning ut ifra tallene (Løvås, 2021, s. 429). Sammenhenger kan observeres mellom variabler, men det er ikke mulig å lese ut av dataene om den ene forklarer den andre, eller vice-versa, og om de eventuelt kan begge forklares av en tredje variabel. (Løvås, 2021, S.429). I en korrelasjonsanalyse, så vil en positiv korrelasjon tilsi når en har høy verdi på en variabel, har man også en høy verdi på en annen variabel. I motsetning så vil en negativ korrelasjon tilsvare høy verdi på en variabel, og samtidig en lav verdi på en annen variabel (Johannessen et al., 2021, s.325).

Vi utførte en statistisk analyse ved hjelp av statistikkprogrammet SPSS. Vi undersøkte resultatene for både prestasjoner i algebra og eventuelle mangler i ferdigheter innen aritmetikk for å finne ut hva som er mest vanlig blant elevene. Valget av SPSS i studien er begrunnet med at det er et statistisk analyseverktøy som har eksistert lenge og det er skrevet mange bøker om bruken av det. De fleste utdannings- og forskningsinstitusjoner har lisenser som lar studenter bruke SPSS uten å betale. Det er et godt verktøy for å kjøre statistiske analyser uten kjennskap til den bakenforliggende statistikken. Det er et velegnet program for både enkle og avanserte statistiske analyser, og er samtidig en oversiktlig og brukervennlig programvare (Høgheim, 2020, s. 179).

Signifikantstesting begynte med at vi formulerte en nullhypotese (*H0)*, at det ikke er en sammenheng mellom variablene, og en alternativ hypotese *(H1), at* det er en sammenheng (Johannessen et al, 2021, s. 404). For at noe skal være signifikant forskjellig eller ha en signifikant sammenheng skal p-verdien være mindre enn 0,05 når vi bruker 95% konfidensintervall. Da kan vi si at det er 95% sikkert at sammenhengen er signifikante, at de ikke skyldes tilfeldigheter. Testens signifikansnivå handler om hvor stor sannsynlighet for forkastningsfeil (type I) vi er villige til å akseptere (Løvås, 2018, s. 259). Type I feil er når *H*0 er sann og vi forkaster den feilaktig (Løvås, 2018, s. 232).

En bivariat analyse (bi kommer fra latin bis, som betyr to ganger eller dobbelt) beskrive en undersøkelse av sammenhengen mellom to variabler (Johannessen et al, 2021, s. 317). Det er mange måter å gjennomføre bivariat analyser på, men de tre vanligste måtene å kjøre en bivariat analyser på er kryssetabell, sammenlikning av gjennomsnitt, og korrelasjonsanalyse (Johannessen et al, 2021, s. 317).

Grad av korrelasjon mellom elevenes gjennomsnittspoengsum i aritmetikk og algebra ble gjennomført i statistikkprogrammet SPSS, ved bruk av forskjellige analyser. Oppgavene ble

delt i SPSS i ulike kategorier, der vi summerte antall riktig (1 poeng) og antall feil (0 poeng) elevene hadde innenfor hver enkel kategori. Summen av oppgaver fra aritmetikken som handler om negative tegn og tilsvarende i algebra, summen av oppgaver fra aritmetikken for operasjonsrekkefølge og tilsvarende i algebra, summen av oppgaver fra aritmetikken for brøk og tilsvarende i algebra, summen av oppgaver fra aritmetikken for likhetstegn og tilsvarende i algebra og summen av oppgaver fra aritmetikken for variabler og tilsvarende i algebra. Siden utvalget var ikke normalfordelt det ble det gjennomført en *Spearmans P* og det er det ikke - parametriske alternativet til *Pearson`s r* test, , men i denne testen får vi også korrelasjonskoeffisient som fungerer på samme måten som ved *Pearson`s r*.
Spearmans korrelasjon undersøke samvariasjon mellom to kategoriske variabler (Høgheim, 2020, s. 197)
Absoluttverdien til r antyder hvor sterkt linear sammenheng det er mellom to variabler, jo større absoluttverdi, desto sterkere sammenheng. Ekstremverdiene r=1 og r= -1. vi får korrelasjonskoeffisienten (r) nær null hvis det ikke er en linear sammenheng mellom variablene (Løvås, 2021, s. 290). En korrelasjon rundt 0 er et utrykk for at det ikke er noen lineær sammenheng, men 1 angir et fullstendig positivt sammenfall mellom verdiene på variabelen, noe som betyr at de som skårer høyt på den ene variabelen, skårer høyt på andre variabelen, og de som skårer lavt på den ene, skårer lavt på den andre (Johannessen et al, 2021, s. 325). Pearsons r er et mye brukt korrelasjonsmål, som angis hvor sterk lineær sammenheng det er mellom to variabler (Johannessen et al, 2021, s. 323). Både typen og styrken på samvariasjon angis ved Pearsons r (Johannessen et al., 2021, s. 327). Samvariasjonens type kommer i form av positiv, negativ eller fraværende (Johannessen et al., 2021, s. 326). Det finnes ikke noe fasitsvar på hva som er en høy korrelasjon, det er blant annet avhengig av hva som undersøkes, og av hvor sterk korrelasjon man forventer (Johannessen et al, 2021, s. 327).

Tabell 2: Grad av korrelasjon (Cohen og Holliday (1982); Johannessen, et al, 2021, s. 327).

Verdi korrelasjonskoeffisient	Grad av korrelasjon
0 – 0,19	Ubetydelig korrelasjon
0,2 - 0,39	Svak korrelasjon
0,40 - 0,69	Moderat korrelasjon
0,70 – 0,89	Sterk korrelasjon
0,90 – 1	Veldig sterk korrelasjon

Tabell 2 viser verdiene på korrelasjonskoeffisienten som det videre vises i denne oppgaven. Cohen og Holliday (1982) har foreslått disse betegnelser på nivå for grad av korrelasjon ut fra korrelasjonskoeffisienten (Cohen og Holliday (1982); Johannessen et al, 2021, s. 327).
Når man skal analysere sammenheng mellom to variabler kalles det bivariat analyse (Rød, 2017, s. 167). Det vi ønsker å studere er om det er noen sammenheng mellom verdien av to variabler, om det er en statistisk avhengighet eller statistisk uavhengighet mellom variablene (Rød, 2017, s. 167). Ifølge Rød er det flere aspekter når man skal analysere samvariasjon (Rød, 2017, s. 167).

1) Å måle samvariasjons styrke. Dette er et teknisk statistisk spørsmål som besvares ved hjelp av statistiske mål: korrelasjonskoeffisienter.
2) Å måle samvariasjons retning. Bruken av spredningsdiagrammer er nyttig for å gi indikasjoner på styrken til en samvariasjon, men særlig nyttig for å undersøke om en sammenheng er lineær eller ikke, og om den er positiv eller negativ.
3) Å finne hvorfor variablene samvarierer. Det kan være samvariasjon mellom to variabler uten at det er en årsakssammenheng mellom dem (Rød, 2017, s. 167-168).

I tillegg til at vi kjørte korrelasjonsanalyse, så lagde vi også en krysstabeller for de samme variablene for frekvensen av poengsum innenfor de ulike emnene, for å kunne se på mønstre og tendenser i henhold til variablene og frekvensen til resultatene. I en krysstabell kan man observere variablene sammen, og se hvordan enhetene fordeler seg samtidig på begge variablene. (Johannessen et al, 2021, s. 318)

En tabell (Tabell 5, s. 38) med spørsmålene der det også ble regnet ut hvor mange prosent av deltakerne som valgte hvert enkelt alternativ i hvert spørsmål ble laget for å kunne gi et god og oversiktlig bilde over hvordan deltakerne hadde svart og hvilke alternativer de hadde valgt som svar..

3.9 Forskningsetikk

Vi har valgt å bruke kvantitativ metode, der elevene fyller ut svarene gjennom "multiple choice" svarsalternativer over nett, gjennom nettjenesten nettskjema.no, som er Norges sikreste og mest bruke løsning for datainnsamling til forskning. Et altomfattende etisk prinsipp i forskning er at som forskere, så ligger vår ansvarlighet først ovenfor forskningsdeltakere, deretter ovenfor undersøkelsen, og til slutt ovenfor forskeren selv (Postholm & Jacobsen, 2022, s.246). Det vil

si at vi har størst ansvar for å ivareta forskningsdeltakerne. Vi prioriterte å legge til rette for en anonym studie, med frivillighet i fokus for å unngå at deltakerne føler seg presset til å delta..
Utfyllingen av nettskjema kommer til å være anonymt (uten behov for pålogging). Ved forskning så må man følge lov om behandling av personopplysninger, personopplysningsloven (Johannesen et al., 2021, s.47). I oppgaven vår så ønsket vi å legge til rette for å unngå å samle inn noen form for personopplysninger. Anonymitet bidrar til beskyttelse av personvern, redusere sosial ønskelighet, øke responsraten, bidrar til å ivareta etiske hensyn og kan bidra til økt tillit og troverdighet mellom forsker og deltaker. Spørreundersøkelsen hadde gitte svarsalternativer på plass til hver av spørsmålene slik at målgruppen verken trenger å identifisere seg, eller skille seg ut. Undersøkelsen vil være våre åpent tilgjengelig på nett når vi åpner skjemaet, gjennom nettskjema sine sider. Fordelen er samtidig at det ikke er behov for utstyr, utover den elektroniske enheten de velger å bruke for å fylle ut skjema, dermed er skolene ikke avhengige av å ha tilgang til spesielt utstyr for å kunne delta, noe som igjen hjelper å skjerme hvilke skoler som har deltatt. I forbindelse med tillatelse fra NSD, ettersom personene er anonyme og omfattes ikke av personopplysningsloven, så er det ikke nødvendig med å melde om prosjektet til NSD (Johannesen et al., 2021, s.59). Siden anonymitet blir vektlagt, og det ikke er mulig å kunne spore opp deltakerne basert på dataen, og at vi ikke tar vare på noen form for person data, så krevdes det ikke en søknad. Når forskeren kun skal behandle anonyme opplysninger, er det ikke nødvendig med meldeplikt, da et anonymt datamateriale består av opplysninger som ikke kan brukes i noen form for å identifisere deltakere, direkte eller indirekte, eller gjennom e-post/IP-adresse eller koblingsnøkkel. (Postholm & Jacobsen, 2022, s.253). Dermed har vi gått videre med den kvantitative metoden, uten å sende en søknad til NSD. Innhenting av samtykkeskjema vil i vår studie ikke være nødvendig av denne grunnen ettersom det ikke blir innsamlet personopplysningsdata.
Det er viktig at deltakerne samtykker til å delta, og det er derfor viktig at vi legger vekt på informert samtykke slik at deltakeren tydelig får informasjon om at det er valgfritt å delta, og tilstrekkelig informasjon om innhold og hensikt, men samtidig ikke gi alt for mye unødvendig informasjon for å unngå en overflod av informasjon før undersøkelsen skal utføres, da dette kan virke mot sin hensikt. (Postholm & Jacobsen, 2022, s.248). Men hva regnes som informert samtykke? Postholm & Jacobsen peker på kravet om at de grunnleggende forutsetningene for informert samtykke, er at deltakeren som skal undersøkes, skal delta frivillig i undersøkelsen, og at den frivillige deltakelsen baserer seg på den som skal undersøkes, vet alt om hvilke fordeler og ulemper en deltakelse kan medføre. Dette kravet han deles inn i fire hovedkomponenter:

- Kompetanse: Deltakeren må selv være i stand til å frivillig bestemme om han/hun ønsker å delta i undersøkelsen. Dette innebærer å ha evnen til å vurdere fordeler og ulemper med å delta.
- Frivillighet: Et valg uten noen form for press fra andre.
- Full informasjon: Full informasjon om undersøkelsens hensikt, og fordeler og ulemper med å delta.
- Forståelse: Deltakeren må ha forstått informasjonen, det vil si at den informasjonen som har blitt delt med deltakeren, har blitt forstått riktig av deltakeren. (Postholm og Jacobsen, 2022, s. 247)

Når vi møter opp i klasserommet, så kan dette medføre press på elevene i forhold til at vi står der, og dette medfører et etisk dilemma. Elevene kan føle et press på dem, om resten av elevene i klassen er helt med på undersøkelsen, men de selv opplever at de ikke ønsker å delta allikevel. Som følge av dette så deltar de allikevel, på tross av at de egentlig ikke ønsker det. Det blir da viktig å sørge for å unngå å skape et press for å delta. Den som undersøkes, skal få velge fritt om han eller hun vil delta. Et fritt valg innebærer at deltakeren får velge selv uten noen form for press fra andre. (Postholm & Jacobsen, 2022, s.248). Det er derfor viktig å sørge å unngå å påføre målgruppen press for å delta, og derfor være nøye på at de har et fritt valg på om de ønsker å delta eller ikke. Vi velger å ikke la deltakerne få vite sluttresultatet på antall rette de har hatt, fordi vi ønsker ikke at det skal forekomme noen form for prestasjonspress på deltakerne, på grunn av noen deltakere kan ha en vane for å sammenligne deres prestasjon med andre, og derfor kan det være demotiverende å delta, om de føler de deltar i noe de ikke den nødvendige kunnskapen til å prestere bra i. Det er spesielt disse deltakerne vi ønsker å få med, for å finne ut av hva det er som gjør at matematikken kan virke utfordrende for dem.

Når vi skal innhenter oppgaver fra tidligere gitte artikler/publikasjoner så vil det være viktig å henvise til studien. Dette er viktig for å kunne gi anerkjennelse til det tidligere arbeidet som har blitt utført. Ved bruk av materiale fra internett, så er det et forskningsprinsipp å oppgi hvor informasjonen er hentet fra (Johannesen et al., 2021, s. 47). Dette for å kunne henvise til hvor man har hentet informasjonen og kontrollere om det er en pålitelig kilde. Samtidig så vil dette bidra til å styrke validiteten til studien i form av at vi utfører en “retest” av tidligere utførte tester.

3.10 Kvalitet i studien

Forskning er både en prosess og det resultatet som blir produktet av prosessen. Prosessen består av stegene fra en famlende problemstilling til en gjennomført analyse av den empiriske dataen.

Forskningens kvalitet kan ikke utelukkende bli knyttet opp mot det resultatet forskeren kommer frem til, men i hovedsak bestemmes ut fra hvordan kunnskapen er produsert. (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 219).
Forskningens kvalitet er avhengig av en dialog om innholdet i de funn som produseres i et forskningsprosjekt, i tillegg så må forskeren også reflekter systematisk over to forhold.

a) Hvilke begrensninger som er knyttet til egen forskning
b) Hvordan forskeren gjennom sin måte å gjennomføre forskningen på kan ha påvirket de endelige resultatene (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 222).

Det første punktet knyttes opp mot forskningens gyldighet, eksempelvis hva slags konklusjoner en forsker egentlig har grunnlag for å trekke ut fra datamaterialet forskeren har samlet. Det andre punktet gjelder forskningens pålitelighet, altså i hvor stor grad vi kan ha tillit til de funnene et forskningsprosjekt har gjort. (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 222). For å sikre oss at studien har kvalitet, må vi derfor sikre oss at studien har validitet og reliabilitet. I vår studie støtte vi på en betydelig utfordring knyttet til datainnsamling, ettersom ingen av de 50 tilfeldig valgte skolene ga positiv respons eller bekreftet deltakelse i undersøkelsen.
Dette førte til at vi måtte revurdere vår tilnærming og utvikle alternative strategier for å sikre tilstrekkelig datagrunnlag og representativitet for studiens resultater. Som et resultat av denne utfordringen, valgte vi å ta kontakt med medstudenter som arbeidet som lærere ved ulike skoler i Norge. Denne alternative strategien viste seg å være vellykket, da vi fikk positiv respons fra syv forskjellige skoler som var villige til å delta i undersøkelsen. Til sammen mottok vi 150 deltakere fra 10. klasse, ifra 7 ulike skoler, noe som ga oss et tilfredsstillende datagrunnlag for å kunne fortsette med analysen og trekke konklusjoner fra studien.
Tiltak som er blitt gjort for å sørge for kvalitet i studien:
- Grundig litteraturgjennomgang: Til forberedelsen av spørreskjema hadde vi valgt å bruke oppgaver fra tidligere fagfellevurderte artikler, for å sikre at spørsmålene og oppgavene er vitenskapelig funderte og har et solid teoretisk grunnlag.
- Pilotstudie: For å teste spørreskjemaet og gjøre eventuelle nødvendige justeringer før den endelige datainnsamlingen.
- Etiske hensyn. Spørreskjema ble gjort helt anonymt for å ivareta deltakernes personvern. Samtidig ble det tatt etiske hensyn for å sørge for at ingen av deltakerne følte noen form for tvang for å delta, deltakelsen var valgfritt, i tillegg fikk de informasjon om hva studien gikk ut på, og hva dataen skulle brukes til.

- Dataanalyse. Etter datainnsamling ble svarene kodet, og analyseverktøyet SPSS ble brukt for å videre analysere den innsamlede dataen.
- Kritisk refleksjon. Dette blir diskutert i kapittel 5.3.1 og kapittel 5.3.2
- Reliabilitet og validitet. Dette går vi inn på i påfølgende delkapittel.

3.10.1 Validitet

Validitet innenfor kvantitative undersøkelser defineres vanligvis i form av spørsmålet «måler det vi tror vi måler?», dette betegnes også som intern validitet. Altså om det er sammenheng mellom fenomenet som undersøkes, og de dataene som samles in. (Johannesen et al., 2021, s.256). Validitet kan dreie seg om på hvilken måte en metode undersøker det den har til hensikt å undersøke, altså «I hvilen grad obversjonene av fenomener eller variabler gjenspeiler virkeligheten til det som undersøkes. (Johannesen et al., 2021, s.256).

Når vi har satt sammen oppgavene i spørreskjema til målgruppen, så har vi brukt tidligere gitte oppgaver som har hatt til hensikt å måle det vi ønsker å måle hos elevene. Dette bidrar til å styrke studiens validitet når spørsmålene som skal brukes for å måle det vi ønsker å måle, har blitt brukt tidligere, dette vil også gi oss muligheten til å sammenligne resultater. Samtidig vil det være spørsmål som andre også har vurdert til å være valide. Den indre gyldigheten dreier seg om forholdet til 2 ting. I hvor stor grad det er samsvar mellom virkeligheten vi påstår at vi studerer og analyserer, og begreper og teorier vi benytter får beskrive virkeligheten. Og til hvilken grad vi har grunnlag for å snakke om hva som ligger bak årsak og virking (kausalitet) basert på den studien som er blitt utført. (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 229).

Vi ønsker å samle in data fra en stor gruppe enheter blant populasjonen for å skape et mer valid bilde av den helhetlige populasjonen. Innenfor kvantitative undersøkelser heter det generaliser barhet, altså resultater kan overføres til beslektede fenomener. (Johannesen et al., 2021, s.258). Dette vil si at den konklusjonen vi trekker fra vår innsamlede data, er generaliserbar og kan derfor også gjelder andre enheter innenfor samme populasjon. I tillegg til de umiddelbare opplysningene som samles inn, så har all forskning til hensikt å kunne trekke konklusjoner utover de umiddelbare opplysningene som innhentes (Johannesen et al., 2021, s.257).

Det vil si at vi kan basert på vår innsamlede data trekke konklusjoner utover de opplysningene vi har samlet in. En av styrkene for denne formen for studie som vi ønsker å gjennomføre og som står spesielt sterkt, er en “indre gyldighet” eller “indre validitet”, ettersom funnene har validitet for det utvalget som har blitt studert (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 79).

Under utførelsen av datainnsamlingen så er vi til stede mens deltakerne tar spørreundersøkelsen. Dette for å unngå fusk og sørge for at oppklare eventuelle misforståelser, samtidig sørge for at utførelsen blir likt for alle deltakerne. Vi tror dette vil bidra til å styrke vår studies validitet

3.10.2 Relabilitet

Når vi skal samle in data så er det viktig å se på hvor pålitelig dataen er. På forskningsspråket har betegnelsen på dette reliabilitet, som kommer fra engelsk «reliability», som betyr «pålitelighet». Da er det viktig å svare på spørsmål som hvor nøyaktig er undersøkelsens data? Hvilke data har blitt brukt? Hvordan innsamlingen har foregått og hvordan det har blitt jobbet med. (Johannesen et al., 2021, s.27). Ved bruk av tidligere studier, så kan måte metoden for innsamlingen av data repliseres, og samtidig kontrolleres om man ved en "retest" av en tidligere utført test, kontrollere om man klarer å reprodusere lignende resultater. I tradisjonelle syn på forskning, knyttet på mot positivistiske idealer, så har reliabilitet blitt definert som forskningsresultatenes konsistens, kan resultatene reproduseres av andre forskere på andre tidspunkt? (Postholm & Jacobsen, 2022, s.223).
Den ultimate testen på reliabilitet blir sett på som muligheten til å gjenta en studie på et annet tidspunkt og se på om resultatene blir de samme. Det underliggende epistemologien (og ontologien) bak slike tester tilsier at det finnes en objektiv og stabil virkelighet som lar seg måle helt klart. (Postholm & Jacobsen, 2022, s.223). Som bakgrunn for vår studie har vi den pågående trenden blant norske elever, som vi har sett fra TIMMS resultatene fra 2011, 2015 og 2019, som tilsier at norske elever gjør det generelt dårligere enn referanse landene i algebra. Dette er også en erfaring vi har tatt med oss fra praksis, der vi har sett at algebra er noe som er utfordrende for norske ungdomsskole elever. Vi bruker tidligere gitte oppgaver fra fagfellevurderte artikler/publikasjoner, for å styrke vår undersøkelses relabilitet. Dette for å kunne bruke tidligere utførte tester, og se om vi klarer gjenskape noen av resultatene for å påvise mulige misoppfatninger his norske elever. Klarer vi dette, så vil dette styrke vår studies relabilitet.

En kvantitativ studie vil være lettere å gjenskape enn en kvalitativt, da en kvalitativ studie er svært vanskelig å replisere både fordi møtet mellom forsker og forskningsfelt, og mennesker som deltar i studien vil fortone seg ulikt, ettersom hver forsker tar med seg sine egne subjektive individuelle teori. (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 224). Mens i en kvantitativ studie, så kan spørsmålene og svarsalternativer være de samme, der det er data som gjenspeiler virkeligheten i en populasjon som er interessant, og ikke selve enheten (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 166). Under utførelsen av datainnsamlingen så vil det faktum at vi er til stedet også styrke studiens relabilitet, da vi kommer til å ha muligheten til å svare på spørsmål angående testen, som sørger for at oppgavene forstås rett, og vil bidra til at dataen blir mer pålitelig.

3.10.3 Generaliserbarhet /Overførbarhet

Generalisering handler om hvorvidt man kan trekk slutninger som går ut over det utvalget man faktisk forsker på (Høgheim, 2020, s. 82). Overførbarhet går på i hvilken grad funn fra en kontekst kan overføres eller generaliseres til andre kontekster som ikke er studert (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 238).

Det er viktighet at forskeren legger frem grunnlaget for egne analyser og tolkninger i teksten for å støtte leserens naturalistisk generaliseringer (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 238). For at overførbarhet skal styrkes, er det viktig for forskeren og skrive slik at leseren opplever å bli invitert inn i forskningsprosessen som er gjennomført. Dette for å fremme studiens overførbarhet til lignende settinger og situasjoner. Det er viktig at forskeren beskriver forskningen og gjør arbeidet som er gjort transparent (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 238).

Statistisk generalisering innebærer at man trekker slutninger/konklusjoner på bakgrunn av resultatene til et utvalg personer, som også vil gjelde for et større utvalg av en populasjon, eller hele befolkningen. Dette krever at man har et tilfeldig utvalg av tilstrekkelig størrelse. Statistisk generalisering vil være best egnet å bruke i en kvantitativ undersøkelse, med mange informanter. Når man har mindre utvalg informanter, som ikke er tilfeldig trukket bruker man ofte begrepet overførbarhet, ettersom det er vanskelig å bruke statistisk generalisering. Det vil si at kunnskap som utvikles i form av fortolkninger, forklaringer og mekanismer i et bestemt forskningsprosjekt kan overføres til andre situasjoner eller fenomener. Man bruker oftest begrepet overførbarhet i kvalitativ forskningsmetode (Johannessen & Tufte, 2022, s. 79-80).

4.0 Resultater

I dette kapittelet kommer vi til å gå gjennom de ulike funnene som har kommet frem gjennom den kvantitative datainnsamlingen. Dette vil bli satt opp mot oppgavens problemstilling: *Hvilke sammenhenger er det mellom 10.trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra?*

Oppgavene deles inn i oppgaver om enkelt regneferdigheter i aritmetikk og Algebra, der "Aritmetikk i matematikk" deles videre inn i kategoriene: Negative tegn, Operasjonsrekkefølge, Brøk, Variabler og Likhetstegn. For å analysere bruker vi de ulike aritmetikk sitt gjennomsnittsresultat satt opp mot gjennomsnittsresultat i tilsvarende oppgaver i algebra.

Tabell 3:Oversikt over kategoriene oppgavene er delt inn i

Oppgavekategori		**Oppgaver nummer**	**Operasjoner/ Tema**	**Hva måles**
Aritmetikk	Negative tegn	1a,2a,3a	Addisjon Subtraksjon Multiplikasjon Divisjon	Elevers prestasjoner i aritmetikk.
	Operasjonsrekkefølge	4a,5a		
	Brøk	6a,7a,8a		
	Variabler	9a,10a		
	Likhetstegn	11a, 12a		
Algebra	Negative tegn	1b,2b,3b	Addisjon Subtraksjon Multiplikasjon Divisjon	Elevers prestasjon i ulike områder i algebra.
	Operasjonsrekkefølge	4b,5b		
	Brøk	6b,7b,8b		
	Variabler	9b,10b		
	Likhetstegn	11b,12b		

Tabell 3 viser en oversikt over hvilke oppgaver som kategoriseres i henhold til de ulike kategoriene, og er de samme som blir brukt under analyseringen. Oppgaver merket med "a" går på aritmetikk i matematikk, og de tilsvarende oppgavene i algebra er merket med "b".

Tabell 4: Kjønnsfordeling blant deltakerne

Deltakere	Antall
Gutter	75
Jenter	62
Ønsker ikke å svare	13
Totalt	150

Tabell 4 viser deltakernes kjønnsfordeling blant de 150 deltakerne, der 8.66% av 150 ikke ønsket å oppgi kjønn.

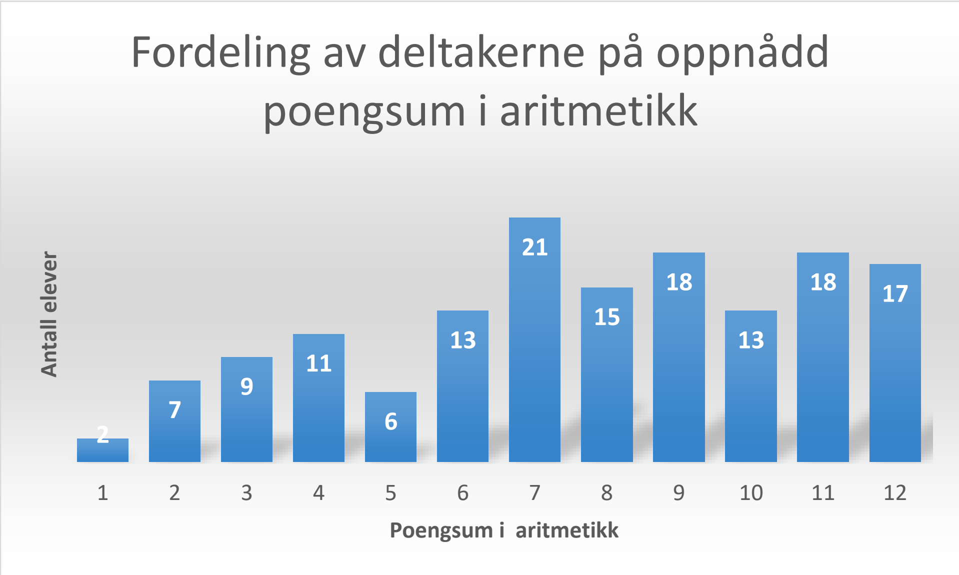
4.1 Prosentandel riktig og feil svar

Tabell 5: Oversikt over spørsmål, alternativer og prosentandel svar for hvert alternativ.

Spørsmål		Alternativ 1	%	Alternativ 2	%	Alternativ 3	%	Alternativ 4	%
1a	Hva blir summen av 5 - (-6) + 8 ?	-9	11.3 %	3	11.3 %	7	19.3 %	19	**58.0 %**
2a	Hva blir summen av 6 - (-4) = ?	-10	9.3 %	-2	14.7 %	10	**63.3 %**	2	12.7 %
3a	Hva blir summen av 4 - (-4) + 6 ?	2	8.0 %	-6	8.0 %	14	**60.0 %**	6	24.0 %
1b	Hva blir summen av 6 - 5a - 3 - 4a ?	7a	6.0 %	9a + 3	13.3 %	3 - 9a	**55.3 %**	9a - 9	25.3 %
2b	Hva blir summen av 4 - 6n - 4n ?	4 - 10n	**30.0 %**	10n+ 4	14.7 %	10n - 4	16.7 %	2n - 4	38.7 %
3b	Hva blir summen av -4n - 3n ?	-7	7.3 %	-7n	**56.0 %**	7n	17.3 %	n	19.3 %
4a	6 + 5 x 2 = ?	22	20.0 %	20	4.0 %	18	6.7 %	16	**69.3 %**
5a	25 x 4 - 38 = ?	78	1.30 %	72	20.70 %	68	8.70 %	62	**69.3 %**
4b	Hva blir summen av 2 + 5 x a ?	2 + 5a	**48.70 %**	7	2.70 %	7 + a	16 %	7a	32.70 %
5b	Hva blir summen av a x 4 - 2 ?	2	6.70 %	4a - 2	**58.70 %**	a + 2	15.30 %	2a	19.30 %
6a	5/12 + 3/8 = ?	2/4	12 %	15/96	10.70 %	19/24	**48 %**	8/20	29.30 %
7a	3/5 - 8 = ?	1	6.70 %	7 2/5	28 %	- 7 2/5	**54 %**	- 1	11.30 %
8a	3/6 + 2/6 = ?	1/6	10 %	6/36	18 %	5/6	**56.70 %**	5/12	15.30 %
6b	x/6 +1/6 = 4/6	2/3	8.70 %	3	**32.70 %**	3/24	20.70 %	3/6	38 %
7b	Hva blir summen av 1/3 x a ?	1/3 + a	26.70 %	a/3	**42.70 %**	a	12.70 %	3a	18 %
8b	3a/6 + a/6 = ?	3aa/6	12 %	3a^2/36	17.30 %	4a/6	**56 %**	4a/12	14.70 %
9a	Jonas kjøper 4 melk og betaler til sammen 48 kroner, hvor mye må han betale hvis han skal kjøpe 6 melk?	74	6.70 %	72	**74.70 %**	54	12 %	52	6.70 %
10a	Hamza kjøper 3 proteinbarer og betaler til sammen 114 kroner, hvor mye må han betale hvis han skal kjøpe 5 proteinbarer?	119	4.70 %	190	**80 %**	114	10 %	76	5.30 %
9b	Hvis 4x = 48, hva er 6x = ?	74	6 %	72	**68 %**	54	18.70 %	52	7.30 %
10b	Hvis 3x = 114, hva er 5x = ?	119	5.30 %	190	**74 %**	114	12.70 %	76	8 %
11a	Er begge sidene lik? 3 + 4 x 2 = 10	Nei	**81.30 %**	Ja	18.70 %				
12a	Er begge sidene lik? 2 (7 - 3) = 8	Nei	44 %	Ja	**56 %**				
11b	Hva er x ? 6x - 3 = -15 - 2x	-4.5	12.70 %	-1.5	**36.70 %**	1.5	35.30 %	4.5	15.30 %
12b	Hva er x ? 2 (x - 3) = 7	1/2	9.30 %	2	23.30 %	6.5	**44.70 %**	5	23 %

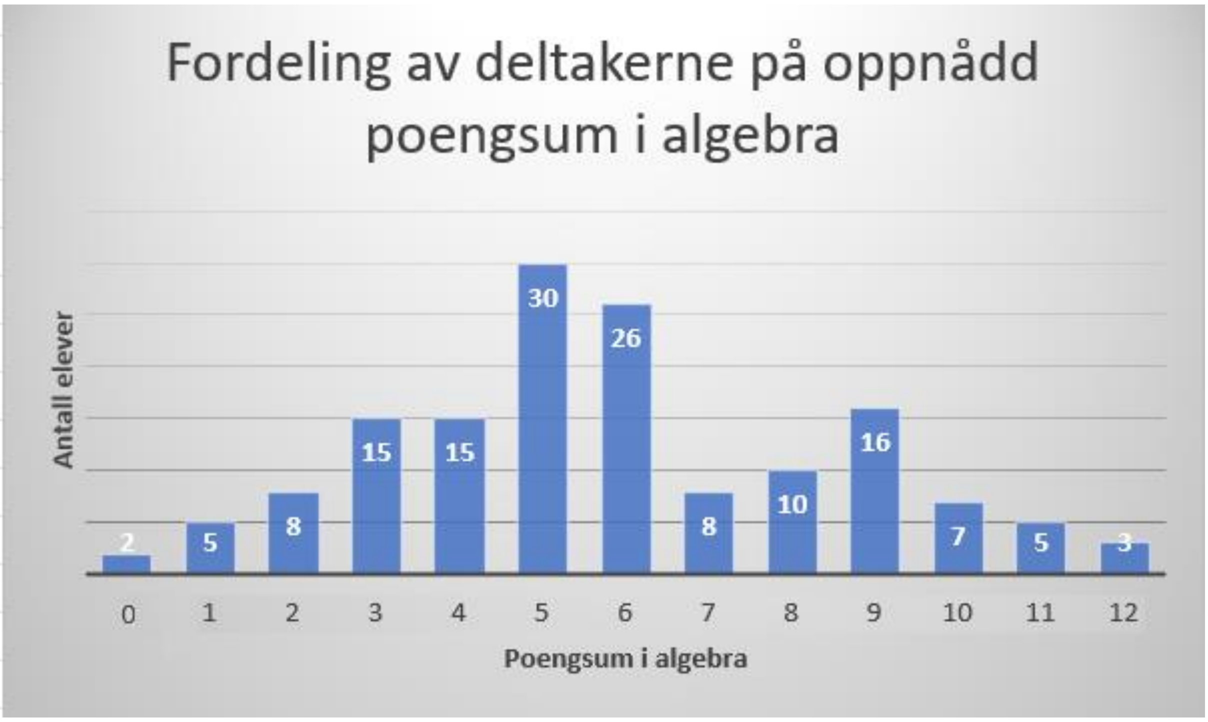
Tabell 5 viser en oversikt over spørsmålene, alternativene og hvor stor prosentandel som har valgt hvert enkelt alternativ til alle spørsmålene. Ut ifra tabell 5, så kan vi se at på spørsmål 11a (Er begge sidene lik? 3 + 4 x 2 = 10), så hadde hele 81.3% deltakere rett, i sammenligning så hadde deltakerne på spørsmål 12a (Er begge sidene like? 2 (7 – 3) = 8, 56% rett. Det er kun 2 alternativer for begge disse oppgavene, men på oppgave 12a, så hadde hele 44% av deltakerne svart feil på spørsmålet.

4.2 Fordeling av rette svar



Figur 2: Fordeling av deltakerne på oppnådd poengsum i aritmetikk

Figur 2 viser fordeling av elevene på oppnådd poengsum i aritmetikk. Vi ser at det er flest deltakere som fikk 7 poeng på oppgavene om aritmetikk, hele 21 deltakere. Laveste frekvens var 2 stykker som kun fikk 1 poeng. Ingen av deltakerne fikk 0 poeng, men hele 17 stykker fikk 12 poeng, som tilsvarer rett på alle spørsmål til aritmetikken.



Figur 3: Fordeling av deltakerne på oppnådd poengsum i algebra

Figur 3 viser fordeling av elevene på oppnådd poengsum i algebra. Vi ser at det er flest deltakere som fikk 5 poeng på oppgavene om aritmetikk, hele 30 deltakere. Laveste frekvens var 2 stykker som kun fikk 0 poeng. Det var kun 3 stykker som fikk 12 poeng, som tilsvarer rett på alle spørsmål til aritmetikken.

4.3 Krysstabell

Krysstabeller for resultatene for hver av de ulike emnene i aritmetikk og tilsvarende oppgaver i algebra blir presentert for å kunne undersøke om det er en sammenheng mellom ferdigheter i aritmetikk og algebra. Krysstabellene er hentet ifra analyseverktøyet SPSS:

4.3.1 Aritmetikk og algebra

Tabell 6: Krysstabell for den totale poengsummen i aritmetikk og algebra. Krysstabellen illustrerer antall deltakere som har fått fra 0 til 12 poeng i aritmetikk, og poeng i algebra.

TotalSum_Agebra * TotalSum_Aritmetikk Crosstabulation

Count

		Total sum_ Aritmetikk												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Total sum _ Algebra	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2
	1	0	0	1	1	0	0	0	2	1	0	0	0	5
	2	0	0	3	2	0	0	3	0	0	0	0	0	8
	3	2	2	2	1	0	1	3	2	2	0	0	0	15
	4	0	1	1	0	3	1	2	0	2	3	1	1	15
	5	0	4	0	3	1	3	8	3	4	3	1	0	30
	6	0	0	2	1	1	5	2	5	5	1	1	3	26
	7	0	0	0	1	0	1	2	1	3	0	0	0	8
	8	0	0	0	1	0	1	1	0	0	3	4	0	10
	9	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	8	4	16
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	4	7
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	5
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3
Total		2	7	9	11	6	13	21	15	18	13	18	17	150

Tabell 6 viser krysstabellen for poengsummen mellom antall poeng på spørsmålene relatert til aritmetikk og algebra. i krysstabellen ser vi at det er 11,33% av de 150 som fikk rett på alle oppgavene i aritmetikk, i motsetning til 2% i alle oppgavene i algebra. Av alle deltakerne var det kun 0.66% (1 av 150) om fikk alt rett på både aritmetikk og algebra spørsmålene. Bare 2 av deltakerne fikk ingen rett på algebra spørsmålene, sammenlignet med ingen som fikk null poeng på alle aritmetikk-spørsmålene.

4.3.2 Negative tegn i aritmetikk og algebra

Tabell 7: Krysstabell poengsum for negative tegn i aritmetikk og negative tegn i algebra. Krysstabellen illustrerer antall deltakere som har fått 0, 1, 2 og 3 poeng innenfor negative tegn i aritmetikk, og innenfor negative tegn i algebra.

Sum_N * SumN_A Crosstabulation

Count

		SumN_A				
		0	1	2	3	Total
Sum_N	0	8	14	12	1	35
	1	6	13	5	1	25
	2	6	10	6	1	23
	3	7	19	22	19	67
Total		27	56	45	22	150

Tabell 7 viser krysstabellen for poengsummen mellom antall poeng på spørsmålene relatert til negative tegn i aritmetikk og negative tegn i algebra. Det er 3 oppgaver innenfor hvert emne, der hvert rette svar 1 poeng, dermed er høyst mulig poengsum 3 innenfor hvert emne. I krysstabellen ser vi at det er tydelig forskjell i antall som fikk alt rett i oppgavene for negative tegn i aritmetikk, hele 44.6% sammenlignet med alt rett i oppgavene for negative tegn i algebra. 14.6%. Av de 22 som fikk alt rett på oppgavene om negative tegn i algebra, hadde hele 86.3% også fått alt rett på oppgavene om negative tegn i aritmetikk, i motsetning hadde bare 28.3% av de 67 som hadde fått alt rett på negative tegn i aritmetikk, fått alt rett på negative tegn i algebra.

4.3.3 Operasjonsrekkefølge i aritmetikk og algebra

Tabell 8: Krysstabell poengsum for operasjonsrekkefølge i aritmetikk og operasjonsrekkefølge i algebra.. Krysstabellen illustrerer antall deltakere som har fått 0, 1, og 2 poeng innenfor operasjonsrekkefølge i aritmetikk, og innenfor operasjonsrekkefølge i algebra.

Sum_O * SumO_A Crosstabulation

Count

		SumO_A			
		0	1	2	Total
Sum_O	0	17	7	2	26
	1	18	18	4	40
	2	23	30	31	84
Total		58	55	37	150

Tabell 8 viser krysstabellen for poengsummen mellom antall poeng på spørsmålene relatert til operasjonsrekkefølge i aritmetikk og operasjonsrekkefølge i algebra. Det er 2 oppgaver innenfor hvert emne, der hvert rette svar 1 poeng, dermed er høyst mulig poengsum 2 innenfor hvert emne I krysstabellen ser vi at det er hele 56,0% av de 150 som fikk alt rett på oppgavene om operasjonsrekkefølge i aritmetikk, i motsetning til 24.6% i oppgavene om operasjonsrekkefølge i algebra. Samtidig så hadde 83.7% av de 37 som hadde alt rett på oppgavene om operasjonsrekkefølge i algebra, også alt rett på operasjonsrekkefølge i aritmetikk. Sammenlignet hadde kun 36.9% av de 84 som hadde alt rett på oppgavene om operasjonsrekkefølgen i aritmetikk, rett på oppgavene om operasjonsrekkefølge i algebra.

4.3.4 Brøk i aritmetikk og algebra

Tabell 9: Krysstabell poengsum for brøk i aritmetikk og brøk i algebra. Krysstabellen illustrerer antall deltakere som har fått 0, 1, 2 og 3 poeng innenfor brøk i aritmetikk, og innenfor brøk i algebra.

Sum_B * SumB_A Crosstabulation

Count

		SumB_A				
		0	1	2	3	Total
Sum_B	0	12	8	8	0	28
	1	11	23	10	1	45
	2	7	14	13	4	38
	3	1	9	21	8	39
Total		31	54	52	13	150

Tabell 9 viser krysstabellen for poengsummen mellom antall poeng på spørsmålene relatert til brøk i aritmetikk og brøk i algebra. I krysstabellen ser vi at det er kun 26,0% av de 150 som fikk alt rett på oppgavene om brøk i aritmetikk, i motsetning til kun 8.6% i oppgavene om brøk i algebra. Samtidig så hadde 61.5% av de 13 som hadde alt rett på oppgavene om brøk i algebra, også alt rett på brøk i aritmetikk. Sammenlignet hadde kun 20.5% av de 39 som hadde alt rett på oppgavene om brøk i aritmetikk, rett på oppgavene om brøk i algebra.

4.3.5 Variabler i aritmetikk og algebra

Tabell 10: Krysstabell poengsum for variabler i aritmetikk og variabler i algebra. Krysstabellen illustrerer antall deltakere som har fått 0, 1 og 2 poeng innenfor variabler i aritmetikk, og innenfor variabler i algebra.

Sum_V * SumV_A Crosstabulation

Count

		SumV_A			
		0	1	2	Total
Sum_V	0	9	8	2	19
	1	7	15	8	30
	2	10	12	79	101
Total		26	35	89	150

Tabell 10 viser krysstabellen for poengsummen mellom antall poeng på spørsmålene relatert til variabler i aritmetikk og variabler i algebra. I krysstabellen ser vi at det er hele 67.4% av de 150 som fikk alt rett på oppgavene om variabler i aritmetikk, i motsetning til 59.3% i oppgavene om variabler i algebra. Samtidig så hadde 88.7% av de 89 som hadde alt rett på oppgavene om variabler i algebra, også alt rett på variabler i aritmetikk. Sammenlignet hadde 78.2% av de 101 som hadde alt rett på oppgavene om variabler i aritmetikk, rett på oppgavene om variabler i algebra.

4.3.6 Likhetstegn i aritmetikk og algebra

Tabell 11: Krysstabell poengsum for likhetstegn i aritmetikk og likhetstegn i algebra. Krysstabellen illustrerer antall deltakere som har fått 0, 1, og 2 poeng innenfor likhetstegn i aritmetikk, og innenfor likhetstegn i algebra.

Sum_L * SumL_A Crosstabulation

Count

		SumL_A			
		0	1	2	Total
Sum_L	0	5	10	1	16
	1	33	21	8	62
	2	22	27	23	72
Total		60	58	32	150

Tabell 11 viser krysstabellen for poengsummen mellom antall poeng på spørsmålene relatert til likhetstegn i aritmetikk og likhetstegn i algebra. I krysstabellen ser vi at det er 48% av de 150 som fikk alt rett på oppgavene om likhetstegn i aritmetikk, i motsetning til 21.3% i oppgavene om likhetstegn i algebra. Samtidig så hadde 71.8% av de 32 som hadde alt rett på oppgavene om likhetstegn i algebra, også alt rett på likhetstegn i aritmetikk. Sammenlignet hadde 31.9% av de 72 som hadde alt rett på oppgavene om likhetstegn i aritmetikk, rett på oppgavene om likhetstegn i algebra.

4.4 Korrelasjonsanalyse

Vi undersøker sammenhengen mellom elevens forståelse av aritmetikk i matematikk og eleven prestasjon i de tilsvarende algebra oppgavene. Vi velger å bruke Spearman's korrelasjonsanalyse ettersom dataen ikke er normalfordelt. Bakgrunnen for valg av analysemetoden kommer fra at korrelasjon er et mål på om to variabler henger sammen (Løvås, 2018, s.159). Dette gjøres ved å sjekke gjennomsnittspoengsum i de 5 ulike kategoriene. Resultatene av korrelasjonsanalysen blir nå presentert.

Tabell 12: Oversikt over resultatene fra de utførte korrelasjonsanalysene i studien.

Korrelasjonsanalyse (Spearman's rho)	Korrelasjons koeffisient	Korrelasjonsnivå
Totalsum - aritmetikk mot algebra	,584	Moderat
Negative tegn - aritmetikk mot algebra	,303	Svak
Operasjonsrekkefølge - aritmetikk mot algebra	,349	Svak
Brøk - aritmetikk mot algebra	,432	Moderat
Variabler - aritmetikk mot algebra	,541	Moderat
Likhetstegn - aritmetikk mot algebra	,215	Svak

4.4.1 Aritmetikk og algebra

Tabell 13: Korrelasjonsanalyse mellom den totale poengsum for aritmetikk og algebra.

Correlations

			TotalSum_Aritmetikk	TotalSum_Agebra
Spearman's rho	TotalSum_Aritmetikk	Correlation Coefficient	1,000	,584**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	150	150
	TotalSum_Agebra	Correlation Coefficient	,584**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	150	150

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 13 viser at det er en positiv moderat signifikant korrelasjon mellom deltakernes totale poengsum i aritmetikkoppgavene og tilsvarende i algebra, ($\rho = 0{,}584, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Da kan man ut fra Tabell 13 si at det er en moderat positiv korrelasjon mellom disse to gruppene. Men for å undersøke litt nærmere mellom aritmetikk og algebra ble både aritmetikkoppgavene og tilsvarende i algebra delt inn i fem kategorier (negative tegn, operasjonsrekkefølge, brøk, likhetstegn, og variabler). Disse er også analysert i analysevektøyset SPSS.

4.4.2 Negative tegn i aritmetikk og algebra

Tabell 14: Korrelasjonsanalyse mellom poengsum for negative tegn i aritmetikk og negative tegn i algebra.

Correlations

			Sum_Negative tegn i aritmetikk	Sum Negative tegn i Algebra
Spearman's rho	Sum_Negative tegn i aritmetikk	Correlation Coefficient	1,000	,303**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	150	150
	Sum Negative tegn i Algebra	Correlation Coefficient	,303**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	150	150

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

.

Tabell 13 viser at de er en positiv signifikant svak korrelasjon mellom elevenes poengsum for negative tegn i aritmetikk og negative tegn i algebra ($\rho = 0{,}303, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Da kan man ut fra Tabell 13 si at det er en svak positiv korrelasjon mellom disse gruppene.

4.4.3 Operasjonsrekkefølge i aritmetikk og algebra

Tabell 15: Korrelasjonsanalyse mellom poengsum for operasjonsrekkefølge i aritmetikk og operasjonsrekkefølge i algebra

Correlations

			Sum_ operasjons-rekkefølge i aritmetikk	Sum_ operasjons-rekkefølge i algebra
Spearman's rho	Sum_ operasjons-rekkefølge i aritmetikk	Correlation Coefficient	1,000	,349**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	150	150
	Sum_ operasjons-rekkefølge i algebra	Correlation Coefficient	,349**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	150	150

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 15 viser at det er en positiv signifikant svak korrelasjon mellom elevenes poengsum for operasjonsrekkefølge i aritmetikk og operasjonsrekkefølge i algebra, ($\rho = 0{,}349, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Siden korrelasjonskoeffisienten er positiv kan man si at det er en positiv korrelasjon mellom disse to. Tabell 15 viser også korrelasjonskoeffisientens verdi, og det vil si at det er en svak korrelasjon mellom poengsum for operasjonsrekkefølge i aritmetikk og operasjonsrekkefølge i algebra.

4.4.4 Brøk i aritmetikk og algebra

Tabell 16:Korrelasjonsanalyse mellom poengsum for brøk i aritmetikk og brøk i algebra

Correlations

			Sum_ brøk i aritmetikk	Sum_ Brøk i algebra
Spearman's rho	Sum_ brøk i aritmetikk	Correlation Coefficient	1,000	,432**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	150	150
	Sum_ Brøk i algebra	Correlation Coefficient	,432**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	150	150

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 16 viser at det er en positiv signifikant moderat korrelasjon mellom elevenes poengsum for brøk i aritmetikk og brøk i algebra, ($\rho = 0{,}432, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Siden korrelasjonskoeffisienten er positiv kan man si at det er en positiv korrelasjon mellom disse to. Ut fra korrelasjonskoeffisientens verdi kan man si at det er en moderat korrelasjon mellom poengsum for brøkoppgavene i aritmetikk og brøkoppgavene i algebra.

4.4.5 Variabler i aritmetikk og algebra

Tabell 17: Korrelasjonsanalyse mellom poengsum for variabler i aritmetikk og variabler i algebra

Correlations

			Sum_ variabler i aritmetikk	Sum_ variabler i algebra
Spearman's rho	Sum_ variabler i aritmetikk	Correlation Coefficient	1,000	,541**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	150	150
	Sum_ variabler i algebra	Correlation Coefficient	,541**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	150	150

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 17 viser at det er en positiv signifikant moderat korrelasjon mellom elevenes poengsum for variabler i aritmetikk og tilsvarende i algebra, ($\rho = 0541, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Siden korrelasjonskoeffisienten er positiv kan man si at det er en positiv korrelasjon mellom disse to. Tabell 17 viser også korrelasjonskoeffisientens verdi, og det vil si at det er en moderat korrelasjon mellom poengsum for variabler i aritmetikk og variabler i algebra.

4.4.6 Likhetstegn i aritmetikk og algebra

Tabell 18:Korrelasjonsanalyse mellom poengsum for likhetstegn i aritmetikk og likhetstegn i algebra.

Correlations

			Sum_ likhetstegn i aritmetikk	Sum_ likhetstegn i algebra
Spearman's rho	Sum_ likhetstegn i aritmetikk	Correlation Coefficient	1,000	,215**
		Sig. (2-tailed)	.	,008
		N	150	150
	Sum_ likhetstegn i algebra	Correlation Coefficient	,215**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,008	.
		N	150	150

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 18 viser at det er en positiv signifikant svak korrelasjon mellom elevenes poengsum for likhetstegn i aritmetikk og likhetstegn i algebra, ($\rho = 0{,}215, p = 0{,}008 < 0{,}05$). Siden korrelasjonskoeffisienten er positiv kan man si at det er en positiv korrelasjon mellom disse to. Tabell 18 viser også korrelasjonskoeffisientens verdi, og det vil si at det er en svak korrelasjon mellom poengsum for likhetstegn i aritmetikk og likhetstegn i algebra.

5.0 Diskusjon

I denne delen av oppgaven analyseres, tolkes og vurderes resultatene fra forskningen i lys av problemstillingen, relevant teori og tidligere forskning. Funnene representeres i resultatdelen, og bygger opp under problemstillingen: *Hvilke sammenhenger er det mellom 10.trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra?*

5.1 Sammenligning mellom aritmetikk og algebra

Slik vi ser i tabell 13 (s.47), så viser resultatene våre at finnes det en moderat signifikant sammenheng mellom prestasjon i aritmetikk og prestasjon i algebra ($\rho = 0{,}584, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Dette tilsier at det er en sammenheng mellom hvordan deltakerne presterer i aritmetikk og deres prestasjon i algebra, altså at eleven sin evne til å prestere i algebra, har sammenheng med hvor godt eleven prestere i aritmetikk. Dette støtte opp av litteraturen som viser til at algebraferdighetene bygger på ferdigheter og regler fra aritmetikken. (Booth L. R., 1988, s. 29).

For å bedre kunne sammenligne svarene for aritmetikk og algebra oppgavene i forhold til hverandre, så er det tatt hensyn til at oppgavene er av lignende type. Tabell 6 viser en klar forskjell på antall deltakere som fikk alt riktig på spørsmål til aritmetikken og spørsmål til algebra. 17 av 150 (11.3%) hadde klart å få alle rett på aritmetikk, og bare 3 av 150 (2%) hadde klart å få alt rett på spørsmål om algebra. Vi ser i tillegg på tabell 6 (s.40-41) at de som klarer å få 7 poeng eller mer i oppgavene i aritmetikk, så er dette 102 av 150 (68%) deltakerne, i motsetning så er det 51 av 150 (34%) deltakere som presterer å få 7 poeng eller mer i algebra. Dette vises også i figurene viser deltakerfordeling på oppnådd poengsum i aritmetikk (Figur 2, s.40) og algebra (Figur 3, s.41). Dette viser en tendens til at når det er snakk om å jobbe med det abstrakte, så klarer halvparten ikke å anvende kunnskapen fra aritmetikken, over på algebra. Funnene våre kan forklares ved at deltakerne i deres overgang fra aritmetikken til algebra ikke har klart å generalisere den kunnskapen de har lært ifra aritmetikken, og derfor klarer de ikke anvende den i algebra. Ettersom algebra er en generalisering av aritmetikken, så kan utfordringer i algebra, komme fra forskjellen mellom aritmetikk og algebra (Booth L. R., 1988, s. 29). Det skal også nevnes at forskere har pekt på endringer i læreplanen til fordel for mer dagliglivsmatematikk, på bekostning av mer abstrakt matematikk, slik som algebra (Grønmo, 2015).

Et annet relevant punkt er ifra kapitel 2.3 om overgangen fra aritmetikk til algebra så står det at utfordringer som elevene får i algebra, kommer fra forskjellen mellom aritmetikk og algebra, siden algebra er generalisering av aritmetikk. Algebraferdighetene bygger på ferdigheter og regler fra aritmetikken (Booth L. R., 1988, s. 29). En annen faktor som kan påvirke eleven i overgangen fra aritmetikk til algebra er lærerens kompetanse, ettersom kompetanse nivået til læreren er spesielt viktig på ungdomsskolen for å bidra til en bedre overgang fra aritmetikk til algebra. (Yıldız & Özdemir, 2021, s. 172). Forskning har vist at fagkunnskapen til en lærerer påvirker måten de underviser på. Det innebærer felles innholdskunnskap (dvs. matematisk kunnskap og ferdigheter som ikke er spesifikke for undervisning) og spesialisert innholdskunnskap (dvs. kunnskap om forskjellige former for representasjon av matematiske innhold og forklaringer av matematiske regler og prosedyrer som er spesifikke for matematikkundervisning(Yıldız & Özdemir, 2021, s. 173).

Grunnskole aritmetikken er ofte stert fokusert på å *finne svar*, i motsetning til representasjon a relasjoner (Kieran , 2004, s. 140). Dermed å har elevene som opererer innenfor en aritmetiske referanserammer, en tendens til å ikke se på de relasjonelle aspektene ved operasjonen; de er opptatt av beregningen (Kieran , 2004, s. 140). Elevene må derfor tilpasse sin kunnskap, når det oppdages at deres eksisterende kunnskap ikke er tilstrekkelig for å forstå ny informasjon, så må de justere eller «akkommodere» den kunnskapen eleven allerede kan, med den nye kunnskapen. (Skott et al, 2019, s. 70). For å utvikle en algebraisk tenkemåte, så kreves det derfor betydelige justeringer. (Kieran , 2004, s. 140)

5.1.1 Negative tegn

I denne delen av diskusjonen skal vi vurdere resultatene ifra studien rundt negative tegn, opp mot litteraturen. Under korrelasjonsanalysen mellom poengsumen for negative tegn i aritmetikk og negative tegn i algebra, tabell 14 (s.47), viste det seg å være en positiv signifikant svak korrelasjon. ($\rho = 0{,}303, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Dette tyder på en svak sammenheng mellom elevers prestasjon i negative tegn i aritmetikk og i algebra. Funnene indikerer at det er en svak sammenheng som tilsier at prestasjonen elvene har i oppgavene om negative tegn i aritmetikk, også har en sammenheng med deres prestasjon i negative tegn i algebra.

Det er også viktig å ta hensyn til andre forklaringer på hva som mulig kan være årsaken for at bak at noen av deltakerne svarer feil. Ifra tabell 5 (s.39), oppgave 3a (Hva blir summen av 4 – (-4) + 6?) så ser vi at hele 24% svarer (6) som svar. Dette resultatet kan komme av at deltakerne velger å ignorere fortegnet forran (-4), og ser ut til å være en misoppfating noen av deltakerne har, som gjør at de velger å se bort ifra fortegnet. Dette fenomenet har også blitt observert i Booth & Koedinger sin studien sin fra 2008, der det ble observert av at elevene har problem med å forstå retningen til (-4), og dermed så får elevene 6, og ikke 14 til svar. I tillegg til å også bli støttest opp av Herscovics & Linchevski (1994, s.73) der det ble observert tilfeller der deltakerne i studien hadde en tendens til å ignorere minustegnet foran tallet 2 i 4 + n – 2 + 5 = 11 + 3 -5.

På en annen side, så kan det også være at deltakerne har problem med å forstå retningen av tallene når det er et fortegn foran. Dette støttes også opp av litteratur, som viser til at negative tegn er noe elevene får utfordringer med i overgangen fra aritmetikk til algebra, i algebra må elevene både forstå størrelsen, men også retningen til tallene (Booth & Koedinger, 2008, s. 572). Å ha kunnskap om likhetstegnet og negative fortegn er en viktig funksjon som er nødvendig for å løse algebraiske ligninger. Resultatene fra studie tyde på at det å ha ukorrekt forstålse av likhetstegnet og negative fortegn, gjør at elevene bruker feil strategier for å løse algebraiske likninger (Booth & Koedinger, 2008, s. 575).

På tabell 7 (s.43) så ser vi at det var 67 stykker som hadde alt rett på spørsmålene om negative tegn i aritmetikk, i motsetning til kun 22 i algebra. Når elevene går fra aritemteikk til algebra, vil de møte nye utfordinger i algebra, som er ulike de ifra aritmetikken, der de både må assimilere ny kunnskap og akkomodere kunnskap som endrer deres forståelse av konsept de har lært ifra aritmetikken. Assimilasjon og akkomodasjon pågår ofte samtidig, men i ulik grad, det er ofte en av prossesene som dominerer (Glasersfeld, 2007, s.75).

Ifra tabell 7 (s.43) så ser vi at av de 67 av 150 (44.6%) som fikk alle rett på oppgavene om negative tegn i aritmetikken, så er det kun 19 av de 67 (28.3%) som også får til alle rett på oppgavene om negative tegn i algebra. Det kan da være slik at så mange som 48 (71.6%) av disse deltakere som hadde klart alle oppgavene om negative tegn i aritmetikk, ikke klarer å anvende den kunnskapen videre i like stor grad, i forhold til prestasjon, til algebra.

5.1.2 Operasjonsrekkefølge

I denne delen av diskusjonen skal vi vurdere resultatene ifra studien rundt operasjonsrekkefølge, opp mot litteraturen. Under korrelasjonsanalysen mellom poengsumen for operasjonsrekkefølge i aritmetikk og operasjonsrekkefølge i algebra, tabell 15 (s.48), viste det seg å være en positiv signifikant svak korrelasjon. ($\rho = 0{,}349, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Dette tyder på en svak sammenheng mellom elevers prestasjon i operasjonsrekkefølgen i aritmetikk og i algebra. Funnene indikerer at det er en svak sammenheng som tilsier at prestasjonen elvene har i oppgavene om operasjonsrekkefølge i aritmetikk, også har en sammenheng med deres prestasjon i operasjonsrekkefølge i algebra.

Ifra tabell 5 (s.39) er oppgavene 4a og 5a er hentet fra Tabak sin artikkel fra 2019, og 4b og 5b er tilpasset i forhold til at oppgavene skal være av lignende type, men tilpasset for algebra. I begge oppgavene 4a og 5a, så hadde 69.3% av deltakerne rett svar på oppgavene. I oppgave 4b og 5b var tallet mindre. 48.7% hadde rett på oppgave 4b, og 58.7% rett på oppgave 5b. I oppgave 4b (Hva blir summen av 2 + 5 x a ?) så hadde 32.7% svart at svars alternativet (7a) var riktig. Funnene våre tyder på at noen av deltakerne regner fra venstre, til høyre, uten hensyn til operasjonsrekkefølgen. Dette er også blitt observert av Booth i sin artikkel fra 2017, der elevene tenker ikke at det nødvendig å følge reglene for operasjonsrekkefølge, men de løser heller utrykket fra venstre til høyre. I oppgaven vil de derfor først foreta operasjonen (2 + 5), også (7 x a), og derfor ende opp med svaret (7a) som i denne oppgaven er feil svar.

Det å kunne operasjonsrekefølgen med heltall, brøker og desimaler er en grunnleggende ferdighet som trengs i algebra (Bush et al, 2013, s. 618). Dette støttes også opp ved det som ble observert og fastslått som en vanlig misoppfatning som elevene gjorde i Tabak (2019) sin studie, der elevene utførte aritmetiske uttrykk fra venstre mot høyre uten å ta hensyn til operasjonsrekkefølgen. (Tabak, 2019, ss. 371-372). Resultatene tyder på at det er noen av elevene som ikke har generalisert kunnskapen om operasjonsrekkefølgen for å anvende denne til algebra. I en slik sammenheng er det viktig at læreren bruker sin kompetanse for å hjelpe med å støtte elevene for å forbedre overgangen fra aritmetikk til algebra, og hjelpe dem å generalisere kunnskapen ifra aritmetikken. Kompetansen læreren har er spesielt viktig for matematikken på ungdomsskolen for å forbedre overgangen fra aritmetikk til algebra. (Yıldız & Özdemir, 2021, s. 172)

Ifra tabell 8 (s.43) så ser vi at av de 84 av 150 (56%) som fikk alle rett på oppgavene om operasjonsrekkefølgen i aritmetikken, så er det kun 31 av de 84 (36.9%) som også får til alle rett på oppgavene om operasjonsrekkefølge i algebra. Det kan da være slik at så mange som 53 (63%) av disse deltakere som hadde klart alle oppgavene om operasjonsrekkefølge i aritmetikk, ikke klarer å anvende den kunnskapen videre i like stor grad, i forhold til prestasjon, til algebra. Operasjonsrekkefølge er en rekkefølge av operasjoner som angir hvilken beregningene skal utføres i et kompleks utrykk (Tabak, 2019, s. 363). Mange elever tenker at det er ikke nødvendig å følge reglene for operasjonsrekkefølge, men de løser heller utrykket fra venstre til høyre (Boot et al., 2017, s. 5).

5.1.3 Brøk

I denne delen av diskusjonen skal vi vurdere resultatene ifra studien rundt brøk, opp mot litteraturen. Under korrelasjonsanalysen mellom poengsumen for brøk i aritmetikk og brøk i algebra, tabell 16 (s.48), viste det seg å være en positiv signifikant moderat korrelasjon. ($\rho = 0{,}432, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Dette tyder på en moderat sammenheng mellom elevers prestasjon i brøk i aritmetikk og i algebra. Funnene indikerer at det er en moderat sammenheng som tilsier at prestasjonen elvene har i oppgavene om brøk i aritmetikk, også har en sammenheng med deres prestasjon i brøk i algebra.

I oppgaven 6b, så hadde elevene skjønt at (x/6) måtte tilsvare (3/6), men da istedenfor å erstatte (x) med (3) for at leddet skulle bli (3/6), valgt alternativet (3/6), og tenkt at hele leddet (x/6) blir erstattet med (3/6), og dermed har de svart feil på oppgaven. Funnene tyder på at i overgangen fra aritmetikk til algebra, så er det en del av deltakerne om ikke klarer å generalisere kunnskapen om brøk, og derfor har ikke de den nødvendige kunnskapen fra aritmetikken for å kunne klare å prestere i møte med brøk i algebra. Oppgaven 6b, fra tabell 5 (s.39), er den eneste oppgaven der det alternative som deltakerne hadde svart prosentvis høyest på, var feil. 38% av deltakerne hadde svart at svaret på 6b (x/6 +1/6 = 4/6, hva er x?) er (3/6). Ifra Brown og Quinn sin studie fra 2007, så konkuderte de med at studien tilsier at hvis elevene skal prestere bedre i algebra, er de nødt til å ha et bedre grunnlag, og være bedre forberedt innenfor alle aspekter av brøk-regning.

Det kan også hende deltakerne har en misoppfatning innen brøk, som gjør at de svarer feil. Dette støttes opp med det som nevnes på matematikksenteret (u.d.) at den mest utbredte misoppfatningen når det gjelder addisjon og subtraksjon av brøker er at elevene ser på teller og nevner som to separate heltall i stedet for ett tall som representerer del-hel-forholdet. Resultatet fra 6b tyder på at elevene har delt opp (x/6), og ansett tallene som 2 separate enheter. Ifra kapittel 2.3 Overgang fra aritmetikk til algebra, for at overgangen fra aritmetikken til algebra skal lykkes, må elevene ha en solid forstålser av tallbegrepet, og kunne beherske ferdigheter i tallbehandlingen (Brekke, et al, 2000, s. 7).

Ifra tabell 9 (s.44) så ser vi at av de 39 av 150 (26%) som fikk alle rett på oppgavene om brøk i aritmetikken, så er det kun 8 av de 39 (20.5%) som også får til alle rett på oppgavene om brøk i algebra. Det kan da være slik at så mange som 31 (79.5%) av disse deltakere som hadde klart alle oppgavene om brøk i aritmetikk, ikke klarer å anvende den kunnskapen videre i like stor grad, i forhold til prestasjon, til algebra. Dette er nødvendig hvis elevene skal prestere bedre i algebra, å ha et bedre grunnlag, og være bedre forberedt innenfor alle aspekter av brøk-regning. Hvis algebra skal være for alle, må alle elevene først kunne brøk-regning «flytende» (Brown & Quinn, 2007, s. 15). Hvis elevene skal prestere bedre i algebra, er de nødt til å ha et bedre grunnlag, og være bedre forberedt innenfor alle aspekter av brøk-regning. Hvis algebra skal være for alle, må alle elevene først kunne brøk-regning «flytende» (Brown & Quinn, 2007, s. 15).

5.1.4 Variabler

I denne delen av diskusjonen skal vi vurdere resultatene ifra studien rundt variabler, opp mot litteraturen. Under korrelasjonsanalysen mellom poengsumen for variabler i aritmetikk og variabler i algebra, tabell 17 (s.49), viste det seg å være en positiv signifikant moderat korrelasjon. ($\rho = 0{,}541, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Dette tyder på en moderat sammenheng mellom elevers prestasjon i variabler i aritmetikk og i algebra. . Funnene indikerer at det er en moderat sammenheng som tilsier at prestasjonen elvene har i oppgavene om variabler i aritmetikk, også har en sammenheng med deres prestasjon i variabler i algebra.

Ifra tabell 1(s.25) er oppgavene 9a og 10a basert på oppgavene 9b og 10b, men tilpasset for aritmetikk. Oppgavene 9b og 10b er hentet ifra en lærebok i matematikk og blitt tilpasset (Tofteberg et al, 2021, s. 9). I oppgave 10a er det hele 80% av deltakerne som svarer rett, sammenliknet er det 74% som svarer rett på 10b. Dette kan tyde på at det er noen få av elevene som ikke har helt klart å anvende kunnskapen fra aritmetikken videre til algebra ettersom tallene brukt i begge oppgavene er den samme, med unntak av vartiabelen (x). Ifra kapitell 2.3 Overgang fra aritmetikk til algebra, så vet vi at i overgangen fra aritmetikk til algebra må elevene gjøre mange justeringer, selv de elevene som er ganske dyktige i aritmetikk. (Kieran , 2004, s. 140).

Ifra tabell 10(s.45) så ser vi at av de 101 av 150 (67.3%) som fikk alle rett på oppgavene om variabler i aritmetikken, så er det 79 av de 101 (78.2%) som også får til alle rett på oppgavene om variabler i algebra. Det kan da være slik at 22 (21.7%) av disse deltakere som hadde klart alle oppgavene om variabler i aritmetikk, ikke klarer å anvende den kunnskapen videre i like stor grad, i forhold til prestasjon, til algebra.

En interessant ting som observeres i oppgave 4b er noe som nevnes som en tendens blant studien til Yıldız & Özdemir fra 2021. Elevene hadde en tendens til å slå sammen eller fullføre uttrykk når de ble bedt om å forenkle algebraiske uttrykk (for eksempel, 2x + 3 som 5x eller 5). Elevene kan tro at uttrykkene ikke er blitt fullstendige, og derfor forsøker de å fullføre dem. I oppgave 4b (Hva blir summen av 2 + 5 x a?), så er det hele 32.7% som svarer (7a) som svar. Det elevene muligens gjør her er å begynne med (2+5) og får da (7), og videre ganger de med (a), og ender da opp med (7a).

Ofte så tror elevene at en bokstav satt in i en tall sekvens står for et faktisk objekt eller merkelapp for noe. I tillegg så har elever problem med å skjønne at den samme bokstaven sett flere ganger i en tall sekvens må representere samme verdi (Booth,et al, 2017, s. 3-4).

5.1.5 Likhetstegn

I denne delen av diskusjonen skal vi vurdere resultatene ifra studien rundt likhetstegn, opp mot litteraturen. Under korrelasjonsanalysen mellom poengsumen for likhetstegn i aritmetikk og likhetstegn i algebra, tabell 18 (s.50), viste det seg å være en positiv signifikant svak korrelasjon. ($\rho = 0{,}215, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Dette tyder på en moderat sammenheng mellom elevers prestasjon i likhetstegn i aritmetikk og i algebra. . Funnene indikerer at det er en moderat sammenheng som tilsier at prestasjonen elvene har i oppgavene om likhetstegn i aritmetikk, også har en sammenheng med deres prestasjon i likhetstegn i algebra.

Ifra tabell 1 (s.25) er oppgavene 11a og 12a tilpasset aritmetikken og basert på oppgavene 11b og 12b som er hentet ifra Vlassis (2002). Oppgave 11a har sammenlignet med oppgave 12a, 11b og 12b høyest prosent deltakere som svarer rett. Hele 81.3% svarer rett på spørsmål 11a (Er begge sidene lik? 3 + 4 x 2 = 10). På oppgave 12a (Er begge sidene lik? 2 (7 - 3) = 8), så er det i forhold til 11a, bare 56% som svarer rett. Denne observasjonen tilsier at deltakerne kan ha valgt å ignorere parentesen, for så å regne uttrykket fullstendig ut, for å sjekke om begge sidene får lik verdi. Rett bruk av parenteser er veldig viktig for å lære seg algebra (Aydın-Güç & Aygün, 2021, s. 1109). I oppgave 12a, så er det tydelig at en del av deltakerne gjorde det som Tavsan (2020) avslørte i sin studie, det at elever gjorde feilen med å ignorere parenteser når de tolket algebraiske uttrykk og skrev dem som setninger. Dermed ved å ignorere parentesen, så kommer du frem til feil svar i oppgaven. Oppgavene 11a og 12a er de eneste oppgavene som kun har 2 alternativer i svaret, der resterende oppgaver har 4 alternativer. I oppgave 11b (Hva er x? 6x - 3 = -15 - 2x), så var det nesten like mange som hadde svart rett 36.7% og valgt alternativ (-1.5), som de som hadde feil og valgt alternativet (1.5). Det å ha en riktig forstålse av betydningen av likhetstegnet er avgjørende for å manipulere og løse algebraisk likninger (Booth, et al, 2017, s. 2). I oppgaven 11b, så er det mulig at det at det er fortegnet som har gjort deltakerne usikre. En studie som er utført av Booth, og Koedinger som nevnes i kapittel 2.5.1 hadde fokus på likhetstegnet og negative fortegn, og så på dem som en viktig funksjon som er nødvendig for å løse algebraisk likninger. Resultatet fra studien tydet på at ukorrekt forstålse av likhetstegnet og negative fortegn, gjør at elevene bruke feil strategier for å løse algebraiske likninger (Booth & Koedinger, 2008, s. 575). På barneskolen er det sjeldent at elevene forstår at likhetstegnet er et relasjonssymbol, og fungerer som en balanse med den totale verdien på begge sider er det samme (Bush et al, 2013, s. 620).

Ifra tabell 11(s.45) så ser vi at av de 72 av 150 (48%) som fikk alle rett på oppgavene om liketstegn i aritmetikken, så er det 23 av de 72 (31.9%) som også får til alle rett på oppgavene om liketstegn i algebra. Det kan da være slik at 49 (68%) av disse deltakere som hadde klart alle oppgavene om liketstegn i aritmetikk, ikke klarer å anvende den kunnskapen videre i like stor grad, i forhold til prestasjon, til algebra.

Ifra tabell 5(s.39), oppgaven 12b (Hva er x? 2 (x – 3) = 7) så er (6.5) rett svar, men 23% velger å svare (5) i tillegg til at 23.3% velger å svare (2) som rett svar. Bakgrunnen for dette kan være at elevene gjør samme feil som observeres i Aydın-Güç & Aygün sin studie fra 2021, der deltakerne ikke tar hensyn til parantesen og dermed så får de (2 (x – 3)) til å bli (2x – 3). Videre så kan en feil forståelse av likhetstegnet gjøre at elevene ender opp med løsningene (5) og (2). Å ha en riktig forstålse av betydningen av likhetstegnet er avgjørende for å manipulere og løse algebraisk likninger (Booth, et al, 2017, s. 2). I tilfelle der elevene får (5) til svar, tas utgangspunktet i at de har ignorert parantesen og endt opp med (2x – 3 = 7), så flytter de (-3) over, og endrer fortegnet, og får (2x = 7 + 3), som videre blir (2x = 10). Ved så å dele på 2 på begge sider ender de opp med (x = 5). I samme tilfelle for svaret (2), tas det utgangspunkt i feilen ved å ignorere parantesen, og elevene ender opp med (2x – 3 = 7), men elevene flytter (-3) over uten å endre fortegnet, og får derfor (2x = 7 – 3). Videre ender de opp med (2x = 4), og ved å dele på 2, så får de da (x = 2) til svar. Det kan altså være tilfelle at begge gruppene som hadde svart (2) og (5) som svar på oppgave 12b, har gjort samme feilen som ble observert av Aydın-Güç & Aygün i sin studie fra 2021, ved å ignorere parantesen (Aydın-Güç & Aygün, 2021, s. 1109).

5.2 Sammenligning og kontraster med tidligere forskning

Det som funnene indikerer i våre resultater er at deltakerne gjør det bedre i aritmetikk enn i algebra, men at en del sliter i overgangen ifra aritmetikk til algebra. Det som er relevant i forhold til å sammenligne norske elever med andre studier, er å nevne at endringer i læreplanen har ført til mer fokus på den dagliglivsmatematikk, og dette kommer på bekostningen av den mer abstrakte matematikken (Grønmo, 2015).

I oppgavene 4a og 5a fra tabell 5 (s.39), hadde 69.3% svart rett på både 4a og 5a. Til sammenligning hadde deltakerne i Tabak sin studie (Tabak, 2019, s. 366) svart 19 % rett på oppgave 4a og 85% rett på oppgave 5a. I motsetning til vår studie som ble utført på 10. klassinger, så utførte Tabak sin studie på 6, 7 og 8 klassinger (Tabak, 2019, s. 364).

Det kan konkluderes med at resultatene fra vår studie viser en høyere andel korrekte besvarelser enn Tabaks studie på oppgave 4a, men en lavere andel korrekte besvarelser på oppgave 5a. Forskjellene kan skyldes forskjeller i aldersgruppe og muligens også metodologiske forskjeller mellom studiene.

I tabell 5 (s.39) fremgår det at 55,3%, 30%, og 56% av deltakerne besvarte oppgave 1b, 2b og 3b korrekt, henholdsvis. Til sammenligning viser resultatene fra Vlassis' studie (Vlassis, 2004, s. 475) at 66%, 73% og 89% av deltakerne besvarte oppgave 1b, 2b og 3b korrekt, henholdsvis. Det er verdt å merke seg at Vlassis utførte sin studie på 8. klasse elever (Vlassis , 2004, s. 473), mens vår studie ble utført på 10. klassinger.

Det kan konkluderes med at resultatene fra vår studie viser en lavere andel korrekte besvarelser enn Vlassis sin studie på de samme oppgavene. Dette kan skyldes en rekke faktorer, inkludert forskjeller i aldersgruppe og muligens også metodologiske forskjeller mellom studiene. Igjen så kan også hvor fokuset ligger i matematikken ha en viktig rolle for hvor godt elever lærere den mer abstrakte matematikken.

I tabell 5 (s.39) viser resultatene fra vår studie at 36,70% av deltakerne besvarte oppgave 11b korrekt, mens 44,70% besvarte oppgave 12b korrekt. Til sammenligning viser resultatene fra Vlassis sin tidligere studie (Vlassis, 2002, s.342) at kun 53% av deltakerne på slutten av 8. klasse klarte å løse ligninger av typen 10x-15=5x+20. Det er verdt å merke seg at deltakerne i vår studie var i 10. klasse, som er to år eldre enn deltakerne i Vlassis sin studie. Her også kan det være faktorer som påvirker elevene evne til å prestere, kompetanse nivået til læreren er spesielt viktig på ungdomsskolen for å bidra til en bedre overgang fra aritmetikk til algebra. (Yıldız & Özdemir, 2021, s. 172). Eventuelt manglende grunnleggende ferdigheter i algebra, som har hovedårsaken til frafall i mange studier, som ingeniørutdanninger. (Nokut, 2012, s.7).

5.3 Implikasjon av funnene

I lys av funnene i denne studien, er det viktig å vurdere de potensielle implikasjonene disse funnene kan ha. Å forstå betydningen av funnene kan også bidra til å gi en pekepinn på hva som eventuelt må forskes videre på, samtidig som det kan gi informasjon om konsekvenser, eventuelt potensielle endringer i dagens matematikk undervisning for å fremme læring hos elevene.

I lys av resultatene fra korrelasjonsanalysen, tabell 12(s.46), så ser vi at ut ifra resultatene så måles det en svak til moderat signifikant korrelasjons mellom variablene, totalsum i aritmetikk og algebra, og totalsum innenfor variablene i aritmetikk, og variablene i algebra. Dette tyder på at det er en sammenheng mellom prestasjonene i aritmetikk og algebra. Det er størst signifikant korrelasjon mellom variablene innenfor emnet variabel. ($\rho = 0{,}541, p = 0{,}001 < 0{,}05$), etterfulgt av brøk ($\rho = 0{,}432, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Begge disse målte til et moderat korrelasjonsnivå og tyder på at prestasjon innenfor variabler og brøk i aritmetikk, har mer å si for deres prestasjon i variabler og brøk i algebra å si, enn likhetstegn, negative tegn og operasjonsrekkefølge.

Det som er en gjenganger i en del av oppgavene, 2b, 4b, 6b, 12a, og 11b, viser til at deltakerne har ikke tilstrekkelige ferdigheter innenfor aritmetikk, og dermed så blir overgangen fra aritmetikk til algebra vanskelig. Ifra kapittel 2.3, når man snakker om grunnleggende algebraferdigheter, må man gå tilbake til ferdighetene man lærer i aritmetikken, dette betyr at algebraferdighetene bygger på ferdigheter og regler fra aritmetikken. Utfordringer som elevene får i algebra, kommer fra forskjellen mellom aritmetikk og algebra, siden algebra er generalisering av aritmetikk (Booth L. R., 1988, s. 29). Dette kan tyde på at for at elevene skal kunne prestere bedre i algebra, så må de ha et bedre grunnlag innenfor aritmetikk.

Ifra tabell 12 (s.46), så ser vi at det er en moderat positiv korrelasjon ($\rho = 0{,}584, p = 0{,}001 < 0{,}05$) mellom hvordan deltakerne gjør det i aritmetikk og hvordan de gjør det i algebra. Dette tyder på at ferdighetene innenfor aritmetikk, påvirker elevenes prestasjon i algebra. Det vil si at hvis elevene ikke har det grunnleggende å plass innenfor aritmetikk, også skal gå over til å lære algebra, så kan dette føre til store utfordringer for å prestere godt innenfor algebra. Når norske elever presterer dårlig i algebra på TIMMS undersøkelsen, så kan det mulig komme på bakgrunn av at elever ikke har tilstrekkelig konseptuell forståelse i aritmetikk, for kunne videreføre den samme kunnskapen til algebra. Dette kan vi også se tendenser til ved å sammenligne figur 2, som viser fordelingen av deltakernes oppnådde poengsum i aritmetikk, med figur 3 som viser fordelingen av deltakernes oppnådde poengsum i aritmetikk. Det observeres at selv om flesteparten av deltakerne 102 av 150 (68%) får 7 poeng eller mer i aritmetikk, så er det kun 49 av 150 (32.6%) som klarer å prestere å få 7 poeng eller mer innenfor algebra.

Overgangen fra aritmetikk til algebra er noe som må jobbes mer med. Ifra Monk & Nemirovsky sin studie fra 1997, så argumenterer de for at elever som var i stand til å se sammenhenger mellom aritmetikk og algebra, og som kunne generalisere og utvide sine tidligere kunnskaper til å løse nye problemer, var mer vellykkede i overgangen fra aritmetikk til algebra (Monk & Nemirovsky, 1997, s. 385).

5.4 Forutsetninger og bias

Deltakernes forutsetninger for dagen kan påvirke hvordan de løser oppgaver og hvor godt de presterer. Hvis de har en god dag, kan de være mer motiverte til å delta i spørreundersøkelsen. Hvis de har en dårlig dag, kan det påvirke deres prestasjon. Tidspunktet for undersøkelsen kan også påvirke resultatene, der de som gjennomførte den senere på dagen kanskje hadde dårligere resultater enn de som gjorde det tidligere, eventuelt også om det er på starten eller slutten av uken. Om deltakerne har spist frokost og lunsj den dagen kan også påvirke deres evne til å prestere mentalt.

Oppgavenes rekkefølge kan være en feilkilde. Deltakerne være mer motiverte for de første oppgavene, også bli mindre motivert i de senere oppgavene. Tidsbruken på oppgavene kan også påvirke resultatet. Hvis undersøkelsen tar for lang tid, kan noen elever miste interessen og ikke fullføre alt, eventuelt gjette på svarene. Uro i klasserommet, støy ifra nærmiljøet, og andre forstyrrende element kan også påvirke elevers evne til å konsentrere seg.

Hvor godt en lærer kan faget den underviser i kan ha mye å si for nivået til elevene. Er det mye bruk av vikarer uten faglig kompetanse så kan dette påvirke elevene negativt ettersom elevene ikke får den støtten som er nødvendig for dem, for å fremme sin læring. Studier har vist at lærere sin konseptuelle og prosedyremessige forståelse av brøk kan begrense deres evne til å støtte elevens læring i brøk. (Rodrigues & Thacker, 2019, s. 1).

5.5 Ytre validitet

Ytre validitet handler om hvorvidt slutninger fra den aktuelle forskningen kan generaliseres til andre mennesker, steder eller tider enn dem/den det faktisk er forsket på (Høgheim, 2020, s. 155). Ytre validitet dreier seg om i hvilke grad resultater fra en undersøkelse kan overføres i rom og tid (Johannessen et al, 2021, s. 427).

Det er mange faktorer som kan påvirker undersøklsen for eksempel, omgivelsen, tid, og mengden av oppagvene, og rekefølge av oppgavene. Siden populasjonen i denne studie er elever som går på 10. trinn i de 7 ulike skolene som deltok i undersøklsen, vil det være misvisende dersom man overførte resultatet til å gjelde alle 10. trinns elever i andre land også. Det hadde vært svært intersesant å gjennomføre studien med et større utvalg, for å se hvordan resultatene endre seg.

Å gjennomføre samme undersøkelse i forskjellige kontekster og på forskjellige tidspunkter, eventuelt sammenlikne resultater fra tilsvarende undersøkelser, er den beste måten å kontrollere ytre validitet på (Johannessen et al, 2021, s. 428). Siden dette er en masteroppgave som skal ferdigstilles på seks måneder er det ikke mulighet til å kontrollere ytre validitet på denne måten. Denne undersøkelsen ble gjennomført i 7 forskjellige skoler på ulike tidspunkter. Dette kan også være med på å kontrollere ytre validitet, siden var det ikke så store forskjeller i besvarelsen fra de ulike skoler. Alt til slutt er samlet i et dokument.

Det er også et spørsmål om hvilken tidsepoke det er aktuelt å overføre resultatene til. Det er ikke sikkert at resultatene fra en undersøkelse som ble gjennomført tidlig på 1990-tallet gjelder i 2023 (Johannessen et al, 2021, s. 428). Dette er noe man må være oppmerksom på når det er brukt en del artikler fra tidligere forskning som inspirasjon til oppgavene. Men det har blitt tatt hensyn til dette slik at oppgavene passer til 10. trinn og at nivået på oppgavene ikke er for vanskelig, slik at det kan forventes at en elev på 10.trinn skal kunne utifra kompetansemålene i delkapittel 1.3 Aritmetikk i læreplanen i matematikk 1-10 klasse og 1.4 Algebra i læreplanen i matematikk 1-10 klasse.

6.0 Avslutning

Denne studien har hatt som formål å undersøke hvilke sammenhenger det er mellom 10. trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra. For å undersøke dette ble en kvantitativ tilnærming brukt, det ble lagd et nettskjema med oppgaver i aritmetikk og tilsvarende i algebra. Undersøkelsen ble gjennomført på 7 ulike skoler på 10. trinn. Det var 150 deltakere med i studien. Som en avslutning på denne oppgaven så ønsker vi å oppsummere funnene i denne studien og samtidig komme med en konklusjon for å besvare oppgavens problemstilling:

«*Hvilke sammenhenger er det mellom 10.trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra?*

Dette ved å gjennomgå hovedfunnene og trekke en konklusjon. Avslutningsvis vil det også reflekteres over forskningsprosessen, metoden og funnen på en kritisk og analytisk måte.

6.1 Hovedfunn

I dette kapitlet skal vi presentere og beskrive de viktigste funnene fra analysen av dataene som er samlet inn gjennom denne studien. Målet med dette kapitlet er å gi en oversikt over de mest betydningsfulle resultatene

Vi har funnet en positiv moderat signifikant korrelasjon mellom deltakernes totale poengsum i aritmetikkoppgavene og tilsvarende i algebra, ($\rho = 0{,}584, p = 0{,}001 < 0{,}05$). Dette tyder på at det er en sammenheng mellom elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra. Det er en positiv korrelasjon som betyr at jo bedre deltakerne presterer i aritmetikk, jo bedre vil de prestere i algebra, i funnene våre var det størst sammenheng mellom aritmetikk og algebra i variabler og brøk, .

Vi observere en tydelig forskjell i forhold til fordelingen av deltakerne på total poengsum innenfor aritmetikk og algebra. Det er færre deltakere som prester få 7 poeng eller mer i algebra, sammenliknet med aritmetikken. Hele 53 (35.3%) deltakere færre. Denne utfordringen kan komme av vansker med å anvende den kunnskapen de har ifra aritmetikken, over til algebra, og presterer derfor dårligere. Utfordringer som elevene får i algebra, kommer fra forskjellen mellom aritmetikk og algebra, siden algebra er generalisering av aritmetikk (Booth L. R., 1988, s. 29).

6.2 Konklusjon

I dette kapittelet ser vi på hovedfunnene i lys av problemstillingen «*Hvilke sammenhenger er det mellom 10.trinn elevers prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra?*» og ut ifra dette trekke vi vår konklusjon.

Korrelasjonsanalysen bekreftet at det er en sammenheng mellom deltakernes prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra hos de 10. trinns elevene som deltok i undersøkelsen. Selv om elevene som deltok i denne undersøkelsen har prestert bedre i oppgavene i aritmetikk enn tilsvarende i algebra, fant vi en moderat korrelasjon mellom begge kategoriene, slik at vi kan bekrefte at det er en sammenheng mellom prestasjon i aritmetikk og prestasjonen i algebra.

Våre funn indikerte at deltakerne opplever utfordringer i å anvende kunnskapen de har fra aritmetikk over til algebra, noe som resulterer i lavere prestasjoner. Elever som er i stand til å se sammenhenger mellom aritmetikk og algebra, og som klarer å generalisere og utvide sine tidligere kunnskaper i møte med nye utfordringer, er mer vellykkede i algebra (Monk & Nemirovsky, 1997, s. 385). Disse funnene har både teoretiske og praktiske implikasjoner. På den ene siden understreker de behovet for videre forskning på de underliggende årsakene til disse utfordringene og hvordan de kan overvinnes. På den andre siden kan funnene bidra til å informere utdanningspraksis og utvikling av læremidler, slik at lærere kan støtte elevene i å mestre algebra bedre.

I lys av våre funn er det klart at det er behov for økt fokus på styrking av algebraferdigheter hos deltakerne og utvikling av strategier for å lette overgangen mellom aritmetikk og algebra. Det er tydelig i funnene at det er gjerne i overgangen fra aritmetikk til algebra, at mange av elevene får problemer med å tilegne seg den nye kunnskapen ettersom kunnskapen alltid er tilegnet seg av individuelle oppfatninger og erfaringer (Skott et al, 2019, s. 69). Det er viktig å støtte opp elevenes læring under overgangen fra aritmetikk til algebra, og da er det nødvendig å ha lærere med god faglig kompetanse ettersom kompetanse nivået til læreren er spesielt viktig på ungdomsskolen for å bidra til en bedre overgang fra aritmetikk til algebra (Yıldız & Özdemir, 2021, s. 172). I overgangen fra aritmetikk til algebra må elevene gjøre mange justeringer, selv de elevene som er ganske dyktige i aritmetikk (Kieran , 2004, s. 140).

6.3 Kritisk Refleksjon

Selv om resultatene i denne undersøkelsen indikerer at det er en sammenheng mellom elevenes prestasjoner i aritmetikk og deres prestasjoner i algebra, har vi ikke undersøkt hvordan denne sammenheng er i dybden.. Dersom deltakerne hadde blitt intervjuet, kunne det ha gitt mer innsikt i hvordan deltakernes tankeprosesser pågår. Slik at det er mulig å gå mer i dybden enn hva man kan gjøre i en kvantitativ tilnærming. Ved bruk av en kvalitativ undersøkelse kunne man stilt spørsmål i intervju samtidig som elvene løste oppgaver. Fordi kvalitativmetode kan hjelpe med å avdekke bakenforliggende årsaker og sammenhenger, samt utforske fenomenet fra flere perspektiver og kontekster.

I denne studien elevene hadde høyere gjennomsnitts poengsum i aritmetikkoppgavene enn i algebraoppgavene, dette kan komme av ulike grunner, noen nevnes i kapittel 5, men det er mulig at det er andre faktorer som spiller inn. Om oppgavene innenfor algebra har vært av for høy vanskelighetsgrad for deltakerne, eller om de ikke forstår algebra, er det vanskelig å få svar på ved å bruke kvantitativ tilnærming. Fordi kvantitativ metode gir et begrenset bilde av et fenomen, da har man ofte ikke mulighet til å undersøke bakgrunnen eller konteksten for hvorfor et fenomen oppstår. Dette kan føre til overfladiske eller misvisende konklusjoner. For det andre kan det være begrensninger i spørsmålene man stiller og hvordan man tolker resultatene. Kvantitativ metode gir ofte svar på spørsmål som er konstruert på forhånd, og det kan derfor være vanskelig å fange opp uventede eller uforutsette resultater eller nyanser i datasettet.

En viktig faktor å huske på er muligheten for menneskelige feil. Hvis en deltaker som fikk riktige svar ble kodet som feil, eller at de som fikk feil svar ble kodet som riktig svar. En begrensning med denne metoden er at elevene kun hadde et sett med svaralternativer å velge mellom, noe som kan føre til at eventuelle misforståelser av oppgaven resulterer i feil svar.

I denne studien var vi ikke i stand til å identifisere slike misforståelser ettersom vi ikke var til stede under datainnsamlingen; dermed ble eventuelle feil, feilaktig kodet som feil. Hvis vi hadde gjennomført intervjuer samtidig som elevene løste oppgavene, ville det ha vært mulig å avdekke og rette slike feil.

Denne undersøkelsen inkluderte flere ulike skoler og 10. klasser, og det er derfor nødvendig å ta hensyn til de ulike undervisningsmetodene som er blitt benyttet av de ulike skolene. Disse kan nemlig påvirke hvordan deltakerne besvarte undersøkelsen. Som en tverrsnittstudie gir denne undersøkelsen imidlertid ikke innsikt i hvordan elevene har jobbet med fagstoffet tidligere. Vi får kun et øyeblikksbilde og kan bare utlede antagelser basert på svarene i undersøkelsen.

6.4 Forslag til videre forskning

Siden dette er en kvantitativ studie, kommer det ikke fram hvilke tanker og refleksjoner elevene har når de svarer på oppgavene. Veien videre vil derfor kunne være å bruke flere metoder for å få et bedre bilde av forskning. Kombinasjon «mixed- method» av kvantitativ og kvalitativ metode kan brukes for å se tankeprosessene bak utregningene til deltakere.

Det kan også forskes på hvordan algebra kan brukes til å forbedre undervisningen i aritmetikk. Algebraiske teknikker kan være en kraftig måte å hjelpe elever med å forstå og generalisere aritmetiske konsepter. Forskning kan undersøke hvordan man kan integrere algebraiske ideer og metoder inn i undervisningen av aritmetikk, og hvordan dette kan bidra til å øke elevenes forståelse og ferdigheter.

Det kan også være mulig å sammenligne og kontrastere ulike pedagogiske tilnærminger til aritmetikk og algebra. Det finnes mange forskjellige måter å undervise aritmetikk og algebra på, og forskning kan undersøke hvordan ulike pedagogiske tilnærminger påvirker elevenes læring og forståelse av disse to emnene. Dette kan inkludere sammenligning av tradisjonelle metoder med mer eksperimentelle eller kreative tilnærminger.

Det kan være interessant å utforske hvordan digitale verktøy kan brukes til å integrere aritmetikk og algebra. Digitale verktøy, som simuleringer og virtuelle manipulative, kan være en effektiv måte å visualisere og manipulere matematiske ideer på. Forskning kan undersøke hvordan disse verktøyene kan brukes til å integrere aritmetikk og algebra, og hvordan dette kan bidra til å forbedre elevenes forståelse og ferdigheter i begge emnene.

Litteraturliste

Alghazo, Y. M., & Alghazo, R. (2017, mars 30). Exploring Common Misconceptions and Errors about Fractions among College Students in Saudi Arabia. *Canadian Center of Science and Education,* 133-139.

Aliustaoğlu, F., Tuna, A., & Biber, A. Ç. (2018, juni 07). Misconceptions of Sixth Grade Secondary School Students on Fractions. *International electronic journal of elementary education*, 591-599.

Andini, M., & Prabawanto, S. (2021). Relational thinking in early algebra learning: A systematic literature review. *Journal of Physics: Conference Series, 1806*(1), 12086. 1-7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1806/1/012086

Aydın-Güç, F., & Aygün, D. (2021, februar 21). ERRORS AND MISCONCEPTIONS OF EIGHTH-GRADE STUDENTS REGARDING OPERATIONS WITH ALGEBRAIC EXPRESSIONS. *International Online Journal of Education and Teaching (IOJET),* 1106-1126.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra.* Kluwer Acadmic Publisher.

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag.* Universitetsforlaget.

Booth, J. L., & Koedinger, K. R. (2008). Key Misconceptions in Algebraic Problem Solving. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 30.

Booth, J. L., Lange, K. E., Koedinger, K. R., & Newton, K. J. (2013, 4 30). Using example problems to improve student learning in algebra: Differentiating between correct and incorrect examples. *Learning and Instruction*, 25, 24–34. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.11.002.

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., & Young, L. K. (2016). Misconceptions and Learning Algebra. In *And the Rest is Just Algebra* (pp. 63–78). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_4

Brekke, G., Grønmo, L. S., & Rosen, B. (2000). *Veiledning til algebra.* Nasjonalt Læremiddelsenter.

Brown, G. M. (2002). Investigating the relationship between fraction proficiency and success in algebra. *ProQuest Dissertations Publishing*. 8-15.

Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of mathematical behavior*, 613-632.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J. (2007). *Early algebra is not the same as algebra early*. I J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton, *Algebra in the Early Grades*, 235-272. Erlbaum.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 87-115.

Educational Leadership (2007, november 01). From Arithmetic to Algebra, *Educational Leadership, 65(3). https://www.ascd.org/el/articles/from-arithmetic-to-algebra*

Glasersfeld, E. V. (2007). *Key works in radical constructivism.* Sence Publishers.

González, M. M., Ambrose, R., & Martínez, E. C. (2004, Januar). IN THE TRANSITION FROM ARITHMETIC TO ALGEBRA: MISCONCEPTIONS OF THE EQUAL SIGN. *The 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 14-18.

Grevholm, B. (2013). *Matematikkundervisning 1-7.* Cappelen Damm.

Grønmo, L. S. (2015, juli 02). Algebra og tall er motoren i matematikken – derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. *Utdanningsforskning*. https://utdanningsforskning.no/artikler/2013/algebra-og-tall-er-motoren-i-matematikken--derfor-gar-matematikkfaget-i-norden-for-halv-fart/

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994, juli). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59–78. https://doi.org/10.1007/BF01284528

Husabø, I. (2016, november 16). Difor er algebra vanskeleg for norske elevar, *Forskning*. https://forskning.no/skole-og-utdanning-matematikk-hogskulen-i-sogn-og-fjordane/difor-er-algebra-vanskeleg-for-norske-elevar/384107?fbclid=IwAR2PcG9Y42lXu31EoIoPvje0JLwoZo7-YsJcbSKRNaRs67WYOum2KI_v85Y

Høgheim, S. (2020). *Masteroppgaven i GLU.* Fagbokforlaget.

Johannessen, A., & Tufte, P. A. (2022). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode.* Abstrakt forlag.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2021). *Samfunnsvitenskapelig Metode.* (6.utg): Abstrakt forlag AS.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*. 139-151.

Kızıltoprak, A., & Köse, N. Y. (2017). Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *10*(1), 131–145. https://doi.org/10.26822/iejee.2017131893

Løvås, G. G. (2021). *Statistikk for universiteter og høgskoler.* (4.utg): Universitetsforlaget.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2014). *Å lære algebraisk tenkning.* Caspar Forlag.

Matematikksenteret (u.d.). Hva er en misoppfatning? *Matematikksenteret.* https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/hva-er-en-misoppfatning?fbclid=IwAR0ZC49_Ble87T4RzRJyRqL8IN2kUWeszqSYbn393ILYNirWeCl2cdNsItw

Matematikksenteret. (u.d.). Andre problemer knyttet til brøk, *Matematikksenteret*. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/andre-problemer-knyttet-til-br%C3%B8k

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1997). The transition from arithmetic to algebra in different contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 28(3),* 360-388.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 INTERNATIONAL RESULTS IN MATHEMATICS AND SCIENCE.* TIMSS & PIRLS *International Study Center*.

Nickson, M. (2004). *Teaching and learning mathematics.* (2.utg): Continuum.

Nokut. (2012, november 20). Evaluering av ingeniørutdanningen i Norge 2008, *nokut.* https://www.nokut.no/contentassets/40568ec86aab411ba43c5a880ae339b5/ingeva_nokut_sammendrag.pdf

Nygaard, O., & Zernichow, A. G. (2006). Den blokkerende misoppfatning. 34-38.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2022). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen Damm akademisk.

Robinson, K. M., Price, J. A. B., & Demyen, B. (2018). Understanding arithmetic concepts: Does operation matter? *Journal of Experimental Child Psychology*, *166*, 421–436. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.09.003

Rodrigues, J., & Thacker, I. (2019). Refuting a fraction misconception: a brief intervention promotes. *Joan Herman and Richard Rasiej Mathematics Initiative at the University of Southern California*, 1-5. http://ianthacker.com/Rodrigues%20&%20Thacker%20(2019)_PME-NA.pdf

Russell, M., O'Dwyer, L. M., & Miranda, H. (2009). Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study. *Behavior Research Methods*, *41*(2), 414–424. https://doi.org/10.3758/BRM.41.2.414

Rød, J. K. (2017). *Innføring i GIS og statistikk.* Fagbokforlaget.

Skott, J., Skott, C. K., Jess, K., & Hansen, H. C. (2019). *Matematikk for lærerstuderende delta 2.0 fagdidaktik 1.-10. klasse.* Samfundslitteratur.

Strømskag, H. (2017). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 71-91.

Sanem Tabak. (2019). 6th, 7th and 8th Grade Students' Misconceptions about the Order of Operations. *International Journal of Educational Methodology*, *5*(3), 10.12973/ijem.5.3.363. https://doi.org/10.12973/ijem.5.3.363

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Bråthe, L. T., & Stedøy, I. (2021). *Maximum 10.* Gyldendal.

Utdanningsdirektoratet (2020). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn, *Udir*. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 341–359. https://doi.org/10.1023/A:1020229023965

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity' *Learning and Instruction*, *14*(5), 469–484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

Welder, R. M. (2007). *Preservice elementary teachers' mathematical content knowledge of prerequisite algebra concepts*. ProQuest Dissertations Publishing.

Wu, H. (2009, februar 20). From arithmetic to algebra. *University of Oregon*. https://math.berkeley.edu/~wu/C57Eugene_3.pdf

Wæge, K., & Nosrati, M. (2015, april 30). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. *Utdanningsforskning*. https://utdanningsforskning.no/artikler/2015/sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk/

Yetkin Özdemir, İ. E., & Yıldız, P. (2021). Teacher subject matter knowledge for the meaningful transition from arithmetic to algebra. *Journal of Pedagogical Research*, *5*(4), 172–188. https://doi.org/10.33902/JPR.2021474587

Aarnes, J. F. (2020, januar 30). Aritmetikk, *Store norske leksikon*. https://snl.no/aritmetikk

Vedlegg 1
<u>Spørreskjema</u>

Kjønn?

Gutt ☐

Jente ☐

Ønsker ikke å svare ☐

Hvor godt liker du matematikk?

Lite godt ☐

Nokså godt ☐

Godt ☐

Veldig godt ☐

Negative tegn

(1a) Hva blir summen av 5 – (-6) + 8?

19 ☐

7 ☐

3 ☐

-9 ☐

(2a) Hva blir summen av 6 - (-4) =?

2 ☐

10 ☐

-2 ☐

-10 ☐

(3a) Hva blir summen av 4 - (-4) + 6?

6 ☐

14 ☐

-6 ☐

2 ☐

(1b) Hva blir summen av 6 - 5a - 3 - 4a?

9a – 9 ☐

3– 9a ☐

9a + 3 ☐

7a ☐

(2b) Hva blir summen av 4 - 6n - 4n?

2n – 4 ☐

10n – 4 ☐

10n + 4 ☐

4 - 10n ☐

(3b) Hva blir summen av -4n - 3n?

n ☐

7n ☐

-7n ☐

-7 ☐

<u>Op</u><u>erasjonsrekkefølge</u>

(4a) Regn ut 6 + 5 x 2 =?

16 ☐

18 ☐

20 ☐

22 ☐

(5a) Regn ut 25 x 4 - 38 =?

62 ☐

68 ☐

72 ☐

78 ☐

(4b) Hva blir summen av 2 + 5 x a?

7a ☐

7 + a ☐

7 ☐

2 + 5a ☐

(5b) Hva blir summen av a x 4 - 2?

2a ☐

a + 2 ☐

4a – 2 ☐

2 ☐

Brøk

(6a) Regn ut. 5/12 + 3/8 = ?

8/20 ☐

19/24 ☐

15/96 ☐

2/4 ☐

(7a) Regn ut. 3/5 - 8 = ?

-1 ☐

-7 2/5 ☐

7 2/5 ☐

1 ☐

(8a) Regn ut. 3/6 + 2/6 = ?

5/12 ☐

5/6 ☐

6/36 ☐

1/6 ☐

(6b) Regn ut. x/6 +1/6 = 4/6, hva er x?

3/6 ☐

3/24 ☐

3 ☐

2/3 ☐

(7b) Hva blir summen av 1/3 x a?

3a ☐

a ☐

a/3 ☐

1/3 + a ☐

(8b) Regn ut. 3a/6 + a/6 =?

4a/12 ☐

4a/6 ☐

$3a^2/36$ ☐

3aa/6 ☐

Variabler

(9a) Jonas kjøper 4 melk og betaler til sammen 48 kroner, hvor mye må han betale hvis han skal kjøpe 6 melk?

52 ☐

54 ☐

72 ☐

74 ☐

(10a) Hamza kjøper 3 proteinbarer og betaler til sammen 114 kroner, hvor mye må han betale hvis han skal kjøpe 5 proteinbarer?

76 ☐

114 ☐

190 ☐

119 ☐

(9b) Hvis $4x = 48$, hva er $6x =$?

52 ☐

54 ☐

72 ☐

74 ☐

(10b) Hvis $3x = 114$, hva er $5x =$?

76 ☐

114 ☐

190 ☐

119 ☐

Likhetstegn

(11a) Har begge sidene lik verdi? 3 + 4 x 2 = 10

Ja ☐

Nei ☐

(12a) Har begge sidene lik verdi? 2 (7 - 3) = 8

Ja ☐

Nei ☐

(11b) 6x - 3 = -15 - 2x, hva er x?

4.5 ☐

1.5 ☐

-1.5 ☐

-4.5 ☐

(12b) 2 (x - 3) = 7, hva er x?

5 ☐

6.5 ☐

2 ☐

1/2 ☐