MASTEROPPGAVE

Emnekode: MAT5003
Navn: Camilla B. Andreassen (206) & Maiken Lovise Hofstad (213)

Har faglig konsentrasjon i læreplanen i matematikk ført til at elevene oppnår relasjonell kompetanse i temaet brøk?

- En kvalitativ undersøkelse av et utvalg elever på 6.trinn

Dato: 15.03.2023
Totalt antall sider: 128
Antall ord: 28462

NORD universitet
www.nord.no

Sammendrag

Denne studien omhandler forståelsen elever i sjette klasse har for brøk. Vi har derfor sett på aspekter ved brøk, representasjoner av brøk og kompetansemålene knyttet til brøk i LK20. Brøk er et av de mest kompliserte områdene innenfor matematikkundervisningen (Streefland, 1991, s.6). I den nye læreplanen ble det lagt større fokus på prinsipper ved dybdelæring (NOU 2014:7, s. 36, 41) og det legges opp til at hvert skoleår skal gå i dybden på et bestemt tema. På 5.trinn er dette temaet brøk (Kunnskapsdepartementet, 2019). Skemp (1976, s. 9) hevder at det er viktig at elevene får tid og rom for å kunne utvikle det han kaller relasjonell forståelse, kontra den instrumentelle forståelsen. Det vil si at elevene både har forståelse for hvordan de skal utføre prosedyrer og hvorfor. Med tidligere forskning og teori har vi derfor formulert problemstillingen:

Hvilke aspekter ved brøk kan vi identifisere at elever på 6.trinn har forståelse for?

Forskningen ble gjennomført med en kvalitativ metode hvor vi har benyttet oss av oppgavesett i en klasse på 18 elever og oppfølgende intervju av noen deltakere. Hensikten med vår studie var å se på hvilken forståelse elevene viste for brøkbegrepet. Vi ville også knytte våre funn til den nye læreplanen og dybdelæring. Gjennom en fenomenologisk tilnærming har vi analysert besvarelsene og intervju. Vi har sett på vårt tema med et sosiokonstruktivistisk læringsperspektiv.

Vi fant ut gjennom undersøkelsen at det er flere av elevene i studien som viser liten forståelse for flere av aspektene ved brøkbegrepet. På samme måte viser mange av elevene lav oppnåelse for flere av kompetansemålene knyttet til brøk på 5. trinn. Det kan tyde på at det er brøk er et tema som det er vanskelig å lære seg innenfor et år, og at det ikke gir nok rom til at elevene kan oppnå relasjonell forståelse for alle aspektene ved brøk.

Nøkkelord: Brøk, brøk som del av hel, brøk som måling, brøk som divisjon, brøk som operator, brøk som forhold, instrumentell forståelse, relasjonell forståelse, LK20, representasjoner

Abstract

This study deals with sixth grade pupils' understanding of fractions. To do this we have studied the aspects of fractions, representations of fractions and the learning goals related to fractions in LK20. Fractions are one of the most complicated areas within mathematics education (Streefland, 1991, p.6). In the new curriculum, the principals of in-depth learning played a greater role (NOU 2014:7, s. 36, 41) and it is organized such that each school year will be devoted to go in-depth on a specific topic. At grade 5, this topic is fractions (Kunnskapsdepartementet, 2019). Skemp (1976, p. 9) claims that it is important that students are given time and space to be able to develop what he calls relational understanding, as opposed to instrumental understanding. This means that students both have an understanding of how to carry out procedures and why. With previous research and theory, we have therefore formulated the problem:

Which aspects of fractions can we identify that pupils in the 6th grade have an understanding of?

The research was carried out with a qualitative method where we used a set of tasks in a class of 18 students and follow-up interviews with some of the participants. The purpose of our study was to investigate what understanding the pupils expressed for the concept of fraction. We also wanted to connect our findings to the new curriculum and in-depth learning. Through a phenomenological approach, we have analyzed answers from the tasks and interviews. We have looked at our topic with a socio-constructivist learning perspective.

Through this study, we found that several of the students showed little understanding of several aspects of fractions. In the same way, many of the pupils show low achievement for several of the learning goals related to fractions in the 5th grade. This may indicate that fraction is a topic that is difficult to learn within a year, and that this time does not provide enough room for students to achieve a relational understanding of all aspects of fraction.

Key words: Fractions, part-whole, measurement, quotient, operator, ratio, instrumental understanding, relational understanding, LK20, representations

Forord

Så var vi her. Etter fem spennende og innholdsrike år, markerer denne masteroppgaven slutten. Alle studieårene har ledet frem til innholdet i denne teksten, med de erfaringene vi har plukket med oss.

Vi ønsker å takke våre veiledere, Dag Tore Forstrøm Gulaker og Nina Rokne Bye, som har bidratt med gode tilbakemeldinger og råd. Det har vært til stor hjelp å kunne reflektere rundt tanker med andre enn bare hverandre. Vi anser oss selv som heldige som fått verdifull kunnskap og erfaringer.

Vi ønsker deretter å takke forskningsdeltakerne som har bidratt til at vi har fått den oppgaven vi har. Både elever og skoleledelse som har ønsket oss velkommen inn i klasserommet, slik at vi har fått gjennomført undersøkelser.

Vi vil også takke våre utrolig tålmodige samboere, Askild og Marius, for at de har holdt ut med vårt varierende humør og energi. Dere har gjort det mulig å bli oppslukt i oppgaven, uten at alt rundt kollapser. Og så vil vi takke Andrine og Serine, to blide småtroll som har bidratt til smil og latter i en ellers stressende periode.

Til slutt vil vi takke hverandre, det har vært uvurderlig å være to i denne prosessen. Det har vært godt å ha noen å dele frustrasjon, tanker og undringer med. Vi har igjen bevist at vi er et godt samarbeidsteam, hvor det har gått knirkefritt å skrive sammen.

Trondheim og Drammen, mai 2023

Maiken Lovise Hofstad Jensen og Camilla Breivik Andreassen

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

Diagram

Vedlegg

1.0 Innledning

Streefland (1991, s.6) hevder at brøk er et av de mest kompliserte områdene innenfor matematikkundervisningen. Denne påstanden underbygger han ved å vise til forskning som sier at mange barn strever med å oppnå forståelse innenfor dette temaet (Streefland, 1991, s.6). Dette stemmer godt med våre erfaringer fra praksis, hvor vår opplevelse er at brøk er et tema som får frem både fortvilelse og frustrasjon hos flere av elevene. Noe av det som gjør brøk vanskelig, er at mye av kunnskapen elevene har fått gjennom erfaringer med hele tall ikke stemmer lenger (Lamon, 2020, s. 20). Dette gjelder blant annet for skrivemåten for brøk. Der hvor barn tidligere har erfart at en mengde representeres med et tall, skal brøken skrives med to som angir forholdet mellom enheten og andelen av denne (Lamon, 2020, s. 20, 24).

Samtidig er brøk et område av matematikken som det er viktig at elevene oppnår forståelse for. Blant annet har forskning vist at forståelse for brøk er viktig for utviklingen innenfor andre matematiske områder (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012), og for algebraisk utvikling spesielt (Booth & Newton, 2012). Lamon (2020, s. 23) hevder også at elevene ikke kan få en fullstendig forståelse for multiplikasjon og divisjon, før de har blitt introdusert for brøk. Kilpatrick, Swafford & Findell (2001, s. 84) utdyper dette med at de færreste divisjonsstykker vil ha et helt tall som svar. Å ha kunnskap om tallsystemet utover de hele tallene og hvordan vi kan skrive disse, er derfor en viktig del av den matematiske utviklingen. Sammenlagt kan vi si at selv om brøk kan være utfordrende for elevene, er det også viktig for den generelle matematiske utviklingen at de utvikler forståelse for brøk.

Noe av det som gjør brøkbegrepet vanskelig å forstå, er at det er et komplekst begrep. Ofte sier vi at det er sammensatt av fem aspekter. Disse aspektene er brøk som del av en hel, som kvotient, som operator, som forhold og som måling. Forskning har vist at elevene ofte møter kun noen få av aspektene, da oftest brøk som del av en hel. Men for at elevene skal få en helhetlig forståelse for brøkbegrepet, kreves forståelse for flere av brøkaspektene (Lamon, 2020, s. 32).

Språk er en viktig del av læring i henhold til sosiokonstruktivistisk teori. Vygotsky mente at barn bruker språket som en internalisering av den ytre verden, og at språket blir et redskap for tanken (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 4-5, Stengrundet & Valbekmo, 2019, s. 3, Vygotsky, 1978, s. 23). På samme måte sier Valbekmo, Myhre og Tømmerdal (2019, s. 3) at matematikken består av mange abstrakte ideer og begreper. For å kunne arbeide med og kommunisere om matematikk, trenger vi symboler, tegn og handlinger som fungerer som representasjoner for de abstrakte ideene og begrepene (Hana, 2013, s148, 152). I brøkundervisningen, kan brøkmodeller være viktige representasjoner for at elevene skal utvikle forståelse for begrepene de representerer og regneoperasjoner med brøk (Stengrundet & Valbekmo, 2019, s. 3). Men det er også viktig at elevene blir kjent med symbolene som brukes i den formelle skrivemåten av brøk, for å kunne kommunisere om og forstå andres arbeid med brøk (Hana, 2013, s. 148, 152).

I 2015 publiserte Ludvigsenutvalget sin utredning, hvor de kommer frem til hvordan de mener fremtidens skole bør organiseres med tanke på fordeling av fag og innhold. Dybdelæring blir her trukket frem som et viktig element for å lykkes. For at elevene skal kunne utvikle kompetanse og forståelse, mente Ludvigsenutvalget at elevene må gis rom for å gå i dybden på noen tema gjennom utformingen av læreplanen. De mener elevene trenger tid for å utvikle forståelse (NOU 2015: 8, s. 10 & 12). Også Skemp (1976, s. 9) hevder at når elevene får tid og rom til å utvikle det han kaller relasjonell forståelse, vil dette medføre mer varig læring enn instrumentell forståelse. Relasjonell forståelse er når elevene har forståelse for relasjonene mellom tall, begreper og regneoperasjoner. Det vil si at eleven forstår både hva de gjør og hvorfor (Skemp, 1976, s. 8-9). I en pressemelding fra 2019 sa regjeringen at fremtidige læreplaner i større grad kom til å følge dybdelæringsprinsippet (Kunnskapsdepartementet, 2019). I Kunnskapsløftet 2020 ser vi at det er en konsentrasjon av kompetansemål knyttet brøk til 5. trinn, mens det er få kompetansemål på senere trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). Elever som har fullført 5. trinn bør derfor ha utviklet en relasjonell forståelse for brøk.

Basert på dette ønsket vi å undersøke elevers forståelse av brøkbegrepet. For å få innblikk i elevenes forståelse av brøk, er det nødvendig å se på hvordan de løser oppgaver som representerer de ulike aspektene. Basert på dette har vi formulert vår problemstilling:

Hvilke aspekter ved brøk kan vi identifisere at elever på 6. tinn har forståelse for?

Som et ledd i å undersøke denne problemstillingen, har vi i tillegg stilt forskningsspørsmålene:

- Har elevene nådd kompetansemålene som omhandler brøk på 5.trinn?
- Har elevene forståelse for de ulike representasjonene knyttet til brøkbegrepet?

1.1 Avgrensning av studien

Et stort flertall av kompetansemålene knyttet til brøk tilhører 5. trinn. Derfor vil det være mest hensiktsmessig å se på elever som allerede har fullført dette trinnet for å undersøke hvilken forståelse elevene har av brøk. På bakgrunn av dette har vi valgt å begrense undersøkelsen til 6.trinnselevers forståelse av brøk. Når vi snakker om forståelse i problemstillingen, velger vi å basere oss på Skemps teori og å skille mellom relasjonell og instrumentell forståelse. Fordi vi ønsker å undersøke både om vi kan identifisere forståelse for de ulike aspektene av brøk, samt hvilken forståelse vi kan identifisere, har vi valgt å begrense undersøkelsene til en klasse. Dette er for at vi skal kunne gå i dybden på hvilken forståelse elevene har for brøk, uten at omfanget blir for stort.

1.2 Formål med studien

Som tidligere forskning tilsier, kan brøk være problematisk for mange elever. Med Kunnskapsløftet 2020 kom en ny organisering av læreplanen i matematikk. Dette innebærer blant annet en konsentrasjon av læremål knyttet til brøk på 5. trinn. Vår studie kan bidra til å få frem hvilken forståelse elever sitter igjen med etter dette året. Den vil også gi et innblikk i hvilke aspekter ved brøkbegrepet elevene har forståelse for. Om undersøkelsen avdekker at elever i en 6. klasse viser liten relasjonell forståelse for brøkbegrepet, vil dette også være interessant opp mot dybdelæringen. Dermed kan vår undersøkelse også bidra til å gi et lite innblikk i hvordan dybdelæring av brøk fungerer. Med utgangspunkt i dette og annen forskning om elevers utvikling innen temaet brøk, kan vi diskutere hvorvidt den nye organiseringen av læreplanen er hensiktsmessig for elevenes utvikling av forståelse for brøkbegrepet.

1.3 Oppgavens oppbygning

For å underbygge problemstillingens relevans, vil vi starte med å presentere relevant teori og forskning i kapittel 2. Vi starter med å belyse læring fra et sosiokonstruktivistisk perspektiv, før vi redegjør for relevante begreper som brøk, forståelse og dybdelæring. I kapittel 3 introduserer vi prosessen mot forskningsmetoden vi har valgt å benytte oss av, med både oppgavesett og intervju. Hensikten med dette er å gjøre studien så transparent som mulig ved å gi leseren et godt innblikk i forskningen vår, samt ved å vurdere kvaliteten på studien vår. Videre vil hovedfunnene våre legges frem og analyseres i kapittel 4. Vi har valgt å analysere besvarelsene opp mot aspekter, modeller og kompetansemål. De funnene vi har gjort vil vi diskutere opp mot forskningsspørsmålene i kapittel 5. Avslutningsvis konkluderer vi oppgaven i kapittel 6.

2.0 Teori

I denne delen skal vi ta for oss teori vi anser som relevant for å belyse vår problemstilling. Innledningsvis ser vi på Vygotskys teori om språk og læring. Et begrep som er viktig i vår problemstilling, er forståelse, og vi har valgt å definere forståelse gjennom teori av Skemp. En viktig del av den sosiokonstruktivistiske teorien om læring, er språket. Derfor ser vi også viktigheten i å ha med teori om det matematiske språket, gjennom underkapittelet som vi har kalt matematiske representasjoner. Videre ser vi på teori og tidligere forskning om brøk og hvilke utfordringer elever kan ha i møte med temaet. Samtidig vil vi også definere brøk gjennom brøkens fem aspekter og se på modeller som brukes i brøkundervisning. Avslutningsvis i dette kapittelet vil vi se på teori som setter problemstillingen vår i et større perspektiv. For å kunne gjøre dette skal vi se på teori som belyser den nye læreplanen og innføringen av denne. Med dette blir det også viktig å se på teori om dybdelæring, for å kunne diskutere hvilken betydning det har for elevenes utvikling av forståelse for brøk.

2.1 Sosiokonstruktivistisk læringsteori

Det gjennomgående temaet i vår oppgave, er hva elever på sjettetrinn sitter igjen med av kunnskap om brøk. Dermed blir det også viktig å definere hvordan vi forstår læring og forståelse. I dette underkapitlet skal vi definere læring, med utgangspunkt i den sosiokonstruktivistiske teorien.

På Vygotskys tid så mange av teoriene på læring som noe individuelt og som skjer via indre biologiske prosesser (Boge, Markhus, Moe & Ødegaard, 2009, s. 17). Vygotsky mente derimot at læring må anses som mer enn bare biologiske, indre prosesser. Han mente at utviklingen også vil være påvirket av det sosiale og kulturelle miljøet rundt barnet. Læringen anså han som en sosial prosess, hvor han la vekt på språkets rolle i læring (Vygotsky, 1978, s. 20, 46 & 131). Dette kommer blant annet frem i hvordan Vygotsky beskriver læring. Han mente at læringen kan knyttes til dynamikken i det han kalte den proksimale utviklingssonen.

Vygotsky beskriver denne sonen slik:

> *It is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers (Vygotsky, 1978, s. 131).*

I et sosiokonstruktivistisk perspektiv blir det dermed viktig at barnet får utfordringer, samtidig som det tilrettelegges for veiledning og støtte gjennom den voksne eller samhandling med andre elever. I sosiale sammenhenger vil elevene ha ulik kunnskap og dermed også ulike bidrag inn i felleskapet. Når undervisningen legges innenfor elevenes proksimale utviklingssone, vil sosiale samhandlinger mellom elevene gi et stort potensial for læring (Gjems, 2009, s. 21-22).

En sentral idé i Vygotskys teori, er at språket innehar en essensiell rolle i barnets kognitive utvikling. Han mente at en viktig del av barnets utvikling, er at det internaliserer verden gjennom at språk og at symboler opptrer som mentale representasjoner for omverdenen. Språket blir et viktig verktøy i å forstå omgivelsene og problemer som oppstår, og i det å tilegne seg ny kunnskap. Denne internaliseringen er likevel ikke noe som skjer automatisk og spontant. For et barn vil det ikke automatisk oppstå en relasjon mellom et symbol og hva det representerer, hvis barnet ikke har tidligere erfaringer med dette. Vygotsky viser til eksperimenter hvor barnet først kan bruke symboler som støtte til å huske, når det har dannet en relasjon mellom symbolet og det det skal representere. Hos de yngste barna, krevde dette ofte at relasjonen mellom symbolet og det symbolet skulle representere allerede var til stede, for eksempel gjennom visuelle likheter (Vygotsky, 1978, s. 23, 45-47).

Grunnen til at vi har valgt å basere oss på den sosiokonstruktivistiske teoriretningen, er at vi ønsker å diskutere våre resultater opp mot innføringen av den nye læreplanen, eller LK20 som vi heretter velger å kalle den. I LK20 er det fokus på språk i de grunnleggende ferdighetene i matematikkfaget. Blant annet står det at skriving er et verktøy for elevenes matematiske utvikling og læring, og at muntlig kommunikasjon bidrar til å skape mening i matematikkfaget. Det står også at en sentral del av å lære å regne er å kunne tolke og bruke stadig mer kompliserte matematiske symboler og begreper. Videre skal denne utviklingen skje gjennom samtaler og diskusjoner om matematiske problemer med støtte og veiledning i et fellesskap (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 4-5). Språket og den sosiale settingen spiller altså en sentral rolle i den matematiske læringen og utviklingen i LK20. Dette samsvarer godt med den sosiokonstruktivistiske teorien. På bakgrunn av dette har vi valgt å se på vår forskning gjennom et sosiokonstruktivistisk perspektiv.

2.2 Relasjonell og instrumentell forståelse

Mens vi i forrige delkapittel tok for oss læring med utgangspunkt i sosiokonstruktivistisk teori, skal vi her ta for oss begrepet forståelse. For å definere forståelse, har vi valgt å se på teori fra Richard Skemp.

Skemp mente at det finnes to måter å definere forståelse: Som relasjonell forståelse og som instrumentell forståelse. Instrumentell forståelse beskriver Skemp som «rules without reason». Med andre ord, elevene lærer algoritmer og gjennomfører regneoperasjoner, men uten kunnskapen om hvorfor algoritmene og fremgangsmåten fungerer, eller hvordan de bidrar til å løse et matematisk problem. Selv om læreren får et inntrykk av at elevene har utviklet forståelse for det de gjør, har elevene i realiteten memorert hvordan de skal gjennomføre en prosedyre, steg for steg (Skemp, 1976, s. 2 & 14). I motsetning til instrumentell forståelse, handler relasjonell forståelse om at elevene ikke bare skal lære seg hva de skal gjøre, men også hvorfor. For at elevene skal få en relasjonell forståelse, krever det mer enn å huske en stegvis fremgangsmetode. Det krever at elevene får forståelse for begreper, tall og regneoperasjoner og relasjonene mellom dem (Skemp, 1976, s. 8-9).

I mange tilfeller vil det være den relasjonelle forståelsen vi sikter til når vi snakker om at elevene skal utvikle forståelse. Likevel vil ikke dette gjelde i alle tilfeller. Skemp trekker frem at det vil finnes både elever og lærere som har instrumentell forståelse som mål. Han påstår også at i noen tilfeller vil det til og med kunne være fordelaktig med instrumentell forståelse, fordi det er raskere og enklere å lære seg. Men, som Skemp selv argumenterer for, selv om det tar lenger tid å oppnå relasjonell forståelse, er denne forståelsen mer varig og krever mindre tid på å lære på nytt. Dermed kan den relasjonelle forståelsen være mer tidsbesparende i det lengre løp (Skemp, 1976, s. 2, 8-9).

Skemp kommer med noen teorier om hvorfor matematikken i noen tilfeller blir av den instrumentelle sorten, selv om mange vil anse at den relasjonelle forståelsen er bedre. Han hevder at en årsak kan være at det matematiske emnet som skal læres er for vanskelig til å læres relasjonelt, men at elevene likevel må gjennom det. En annen grunn han trekker frem er at det vil kreve for lang tid å oppnå relasjonell forståelse for elevene. I begge tilfellene kan læreren dermed velge en instrumentell tilnærming (Skemp, 1976, s. 11).

2.3 Matematiske representasjoner

Språket spiller en viktig rolle i elevenes matematiske utvikling, i henhold til både sosiokonstruktivistisk teori og beskrivelsene av grunnleggende ferdigheter i LK20. Elevene skal blant annet gradvis gå fra et mer hverdagslig språk til et mer presist matematisk språk. Det innebærer evnen til å avlese og tolke matematiske begreper og symboler, og samtidig selv kunne produsere hensiktsmessige representasjoner for matematiske begreper (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 4-5). I dette underkapitlet skal vi derfor gjennomgå teori og begreper knyttet til matematisk språk og representasjoner, som vi vil bruke i vår undersøkelse av elevenes forståelse av brøk.

Matematikken inneholder mange abstrakte begreper og ideer (Valbekmo, Myhre & Tømmerdal, 2019, s. 3). Et eksempel, som Kilpatrick, Swafford & Findell (2001, s. 73) trekker frem, er tallene og de fire regneoperasjonene. For å kunne kommunisere og arbeide med matematikkens abstrakte begreper og ideer, må vi ha et system for å representere dem (Valbekmo et al., 2019, s. 3). Representasjonene kan være symboler, ord, bilder eller handlinger (Kilpatrick et al., 2001, s. 95). I hverdagen møter vi mange forskjellige matematiske representasjoner. Camilla N. Justnes (u. å., s. 2) skriver at representasjonene for eksempel kan være tall, tabeller, geometriske figurer og tallinjer. Dette viser til en stor variasjon i hvordan matematikken blir presentert, og denne variasjonen kan være viktig og positiv i elevenes læring av matematikk. Blant annet bidrar det til å gi elevene et bredere matematisk språk og forståelse (Valbekmo et al., 2019, s. 3). Det er tydelig at bruken av representasjoner er viktig for elevenes arbeid med det matematiske innholdet, og for å utvikle forståelse for matematiske begreper. Det å ha en god begrepsforståelse betyr mer enn å bare kjenne til ordene, en må også kunne forklare hva de ulike matematiske begrepene betyr. En viktig del blir å lære elevene hvordan representasjoner kan brukes til å forklare matematiske begreper (Stengrundet & Valbekmo, 2019, s. 3). Representasjonene blir da som et verktøy for å kommunisere, tenke og arbeide med matematikk (Kilpatrick et al., 2001, s. 95). Dette er i tråd med sosiokonstruktivistisk teori om språkets rolle som verktøy.

Det finnes altså en stor variasjon av matematiske representasjoner. Enge og Valenta (2013, s.8) trekker frem at også-symboler er en del av disse representasjonene. Hana viser til Peirce når han beskriver symboler som «tegn som har blitt til gjennom sedvaner, skikker og tradisjoner» (Hana, 2013, s. 152). I matematiske uttrykk er det det en mengde symboler, og disse kan til dels være problematiske fordi de er vilkårlige og ikke følger noen naturlig resonnement. Samtidig er symbolene viktige, da systemet av symbolene utgjør det vi kaller notasjon. Det vil være viktig at elevene lærer seg å bruke den matematiske notasjonen, fordi det legger til rette for presis og effektiv kommunikasjon. Det er likevel viktig å trekke frem at symboler og andre tegn ikke er de matematiske ideene, men representasjoner av dem (Hana, 2013, s148, 152). Når vi møter eller bruker matematiske representasjoner, krever det at vi tolker dem for å få tak i den matematiske ideen eller begrepet som ligger bak (Kilpatrick et al., 2001, s. 95). Det blir viktig å rette fokus på det å benytte seg av ulike representasjoner for å utvikle det viktige matematiske språket. Elevene må derfor lære seg å bruke flere representasjoner og kunne veksle mellom dem, slik at de kan variere i forhold til hva situasjonen ber om (Enge & Valenta, 2013, s. 12). Det å bruke ulike representasjoner og koble dem sammen, fra konkreter og visuelle representasjoner til rene symboler, vil være viktig for at elevene skal kunne forstå og bruke den formelle notasjonen effektivt (Gersten, Beckmann, Clarke, Foegen, Marsh, Star & Witzel, 2009, s. 30).

2.4 Brøk

Brøk er et av de mest problematiske områdene i matematikkundervisningen. For å bygge opp under denne påstanden, peker Steefland mot forskning som viser at barn har utfordringer i møte med brøk. I noen prosjekter til og med konkludert med at brøk er for vanskelig å forstå for barn (Steefland, 1991, s. 6). Også Lamon (2020, s. 20) hevder at matematikken blir mer komplisert når en går fra hele tall og til å utvide tallområdet. Hun peker på at mye av kunnskapen barn har ervervet gjennom erfaringer med hele tall ikke lenger gjelder i møte med brøk. Dermed blir også mange av strategiene barn har benyttet seg av med hele tall, ikke lenger mulig å overføre direkte til brøk (Lamon, 2020, s. 20-23). Forskning tyder nettopp på at barns erfaringer med heltall kan være til hinder for å forstå brøkbegrepet (Post, Wachsmuth, Lesh & Behr, 1985, s. 33). For eksempel lærer barn at når de teller med hele tall, er det en korrespondanse mellom hvert tallord og objekt i det settet som telles, og enheten er alltid én. Når elevene begynner med brøk, stemmer ikke dette lenger. Enheten er ikke nødvendigvis én lenger, men kan for eksempel være en mengde. I tillegg kan hva som defineres som enheten variere mellom ulike kontekster. For eksempel kan et eple bli ansett som en helhet i noen situasjoner. Fem epler utgjør i disse situasjonene fem enheter. I en annen kontekst, kan det handle om en pakke som inneholder fem epler. I dette tilfellet vil enheten bli pakken med fem epler, og et eple utgjør 1/5 av dette. For barn vil det være viktig at læreren bruker tid på forskjellene disse situasjonene gir i notasjon og mening. Dette vil være til hjelp for å unngå forvirring og feilkommunikasjon for barnet senere (Lamon, 2020, s. 20-2).

Streefland viser til forskning når han hevder at utfordringene elevene har med brøk handler om to ting. Det ene er at man velger en mekanisk innfallsvinkel til brøken med fokus på regneregler fremfor realistisk og virkelighetsnær bruk (Streefland, 1991, s. 11). Dette kan minne om det Skemp betegner som instrumentell læring. Det andre er at kompleksiteten i barns læring av brøk undervurderes kraftig (Streefland, 1991, s. 11). I 1980 utviklet Kieren fem aspekter ved brøkbegrepet: brøk som del av en hel, brøk som måling, brøk som forhold, brøk som kvotient og brøk som operator (Gray & Ånestad, 2021, s. 64). I mange tilfeller har elevene kun erfaring med en liten del av brøkens betydning, som del av hel. Dette gjør at elevenes forståelse av et avansert begrep, kun sees og forstås fra et smalt perspektiv. For at elevene skal kunne få en bedre forståelse for brøk, burde læreren vektlegge flere aspekter ved brøkbegrepet slik at elevene får et bredere perspektiv (Lamon, 2020, s. 32). For å definere brøk skal vi derfor se på de ulike aspektene ved brøk.

Aspekter ved brøk	Kontekst
Del av en helhet Antall deler sammenlignet med antall deler i helheten.	De trengte $\frac{3}{4}$ av flaskene i en kasse brus. De spiste $\frac{3}{4}$ av kaken.
Måltall (tallstørrelse) Sammenligner deler av helhet (lengde, beløp, areal o.l.) med helheten. Brøken relateres til en måleenhet. Brøk kan også være et tall som kan relateres til andre tall.	I en oppskrift står det $\frac{3}{4}$ kopp sukker. Camilla sprang $\frac{3}{4}$ mil. Tallet $\frac{3}{4}$ er større enn $\frac{1}{2}$ og mindre enn 1.
Kvotient Brøken er svaret i en divisjon, der to heltall divideres.	3 kaker deles på 4 personer, hver person får $\frac{3}{4}$ kake.
Operator Brøken virker på en størrelse, slik at denne størrelsen blir mindre eller større. Disse situasjonene er alltid multiplikative.	Bruk $\frac{3}{4}$ av 1 kg kjøttdeig. Siri spiste $\frac{3}{4}$ av to pizzaer.
Forhold Sammenligner to (eller flere) deler med hverandre (del-del), eller sammenligner delene med helheten (del-hel).	3 jenter og 4 gutter i gruppen (del-del) 3 jenter av 4 elever i gruppen (del-hel)

Tabell 1, Aspekter ved brøk, Bondø og Tokle (2018)

2.4.1 Del-hel aspektet

Det aspektet som elevene oftest er best kjent med, er brøk som del av en hel (Lamon, 2020, s. 32). Van de Walle, Karp & Bay-Williams (2015, s. 364) hevder at det kan være hensiktsmessig at elevene møter dette aspektet først. En av de sentrale ideene knyttet til dette aspektet, er forståelsen for at delene i brøken må være like store. Hva like stor betyr, vil være avhengig av hvilken modell som er brukt til å representere brøk. I en arealmodell vil like stor referere til arealet, i en lengdemodell til lengden og i en mengdemodell vil det være antallet som skal være like stort (Lamon, 2020, s. 153).

2.4.2 Målingsaspektet

Målingsaspektet involverer å bruke en brøk som målenhet, og deretter bruke denne for å bestemme størrelsen til ulike objekter. For eksempel vil brøken a/b referere til en avstand hvor enheten, 1/b, er gjentatt a ganger. Dette aspektet av brøk er viktig for å utvikle elevenes forståelse av brøk som tall, av at det finnes uendelig med brøk mellom to punkter på tallinja og for å utvikle en dypere forståelse av målenøyaktighet (Lamon, 2020, s 220, 224).

2.4.3 Kvotientaspektet

Brøk kan ofte være svaret på et divisjonsstykke (Lamon, 2020, s. 181). I arbeidet med brøk kan elever ha vanskeligheter med å forstå ulike størrelser på brøkene, og dette aspektet blir viktig for å presisere at i brøker er det et skjult divisjonstegn og at brøk ikke bare kan ses på som enkle tall. Elever burde kunne forstå og være fortrolige med å kunne skrive og lese brøk som svar på et delingsproblem (Flores, Samson & Yanik, 2006, s. 35).

2.4.4 Brøk som operator

Brøk kan også opptre som en operator. I denne forståelsen opptrer brøken som en funksjon, som forstørrer, forlenger, forminsker eller forkorter en størrelse (Lamon, 2020, s. 201). Studier har vist at elever ikke automatisk overfører det de har lært om brøk til nye situasjoner, og derfor vil ikke det å kunne representere brøk i seg selv gjøre elevene i stand til å arbeide med brøk som operator (Johanning, 2008, s. 281). Likevel vil brøk som operator være noe elevene trenger kompetanse med, da det opptrer i andre områder innenfor matematikken (Van de Walle et al., 2015, s. 364).

2.4.5 Brøk som forhold

Et forhold er en sammenligning mellom to størrelser, som ikke lar seg uttrykke gjennom ett enkelt tall. Det vi sammenligner kan være en del mot en annen del, eller en del opp mot det hele. I noen situasjoner, som når vi sammenligner en del mot det hele, blir forhold skrevet som en brøk (Lamon, 2020, s. 237-238). Et område av matematikken hvor dette aspektet av brøken kommer frem, er sannsynlighet (Van de Walle et al., 2015, s. 364).

2.4.6 Viktigheten av brøk

Forskning indikerer at elevers forståelse av brøk har betydning for deres utvikling av forståelse innenfor andre matematiske områder. En studie presenterte blant annet at elever som viste forståelse og flyt i arbeidet med brøk, hadde positiv utvikling innen matematikken året etter. Samme studie viste at en høy generell matematisk kompetanse ikke tilsvarte samme utvikling for forståelse for brøk (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012). En annen studie viste en sammenheng mellom elevenes forståelse av brøk, og hvor klare de er for å starte med algebra (Booth & Newton, 2012, s. 252). Lamon (2020, s. 23) hevder også at før barn har blitt introdusert for brøk, kan de ikke utvikle en fullstendig forståelse for multiplikasjon og divisjon. Dette begrunner hun med at for å få en fullstendig forståelse for brøk og divisjon, kreves evnen til å konstruere sammensatte enheter. For å representere disse sammensatte enhetene og resultatene fra kompleks multiplikasjon og divisjon, trenger elevene å beherske brøknotasjonen (Lamon, 2020, s. 23).

Men det er ikke bare i matematikkfaget at brøkkompetanse er viktig. Barn vil også møte brøk utenfor skolen. Det er nødvendigvis ikke klart for elevene hvor de møter på brøk i hverdagen. Neagoy (2017, s. 1 og 2) forklarer at en av årsakene til at barn kanskje ikke ser nytten av brøk, er at de ikke vet når de kan få bruk for det, men at forståelse for brøk er viktig både i skolematematikken og i hverdagen. Ved å gjøre elevene oppmerksomme på det, kan de oppdage brøk flere steder. Det kan blant annet knyttes til å se på klokka, oppskrifter, det å dele noe og måle lengder (Tucker, 2008, s.77). Men forskning viser også at barn ikke automatisk overfører det de har lært om brøk til nye situasjoner, men må læres hvordan brøkkompetansen kan brukes (Johanning, 2008, s. 281). På bakgrunn av dette vil det kunne være nyttig å legge opp undervisningen slik at elevene kan se nytten i det utover arbeidet i matematikkfaget.

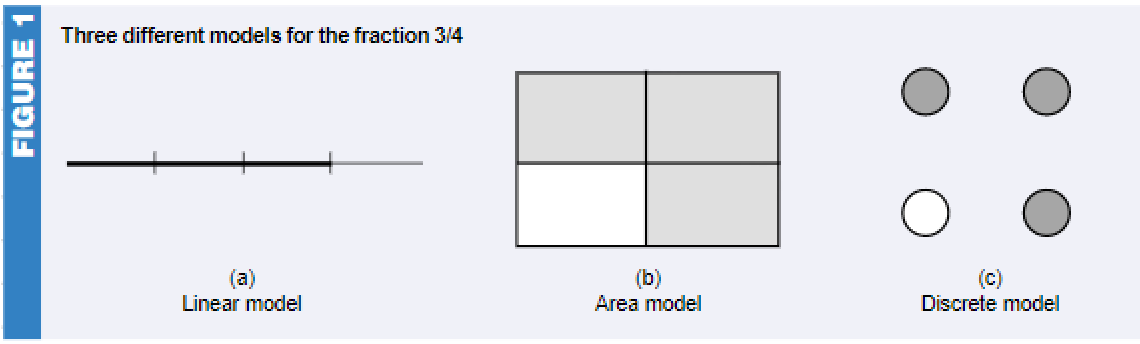
Elevene møter også brøk gjennom beslektede temaer som prosent og desimaltall. Begge disse temaene har utviklet seg fra brøk (Lamon, 2020, s. 28). I arbeid med hele tall, blir det fort tydelig at dette ikke er et system som er tilstrekkelig. I motsetning til multiplikasjon, addisjon og subtraksjon med hele tall, som alltid leder til svar som er hele tall, er ikke dette tilfellet med divisjon. I de fleste tilfeller, vil divisjon med hele tall, lede til resultater som befinner seg mellom hele tall. Brøk blir derfor nødvendig for å utvide tallsystemet tilfredsstillende (Kilpatrick et al., 2001, s. 84). Brøk med potenser av 10 som nevnere, ble senere kalt desimalbrøk. Etter hvert ble det en utvikling på hvordan disse brøkene ble skrevet, som til slutt resulterte i det som i dag kalles desimaltall. En annen type brøk som ble mye brukt, var brøker hvor nevneren var hundre. Også disse utviklet etter hvert en egen notasjon og ble kjent som prosent. Selv om prosent, desimaltall og brøk er nært beslektet, behandles det ofte som separate temaer. Videre har forskning vist at barn på tredje trinn har utviklet en preferanse for å uttrykke seg gjennom prosent og desimaltall fremfor brøk. Det kan derfor være uheldig å vente med å introdusere brøk sammen med desimaltall og prosent. Dette er et av argumentene Lamon har for at barn, helt fra begynnelsen av arbeidet med brøk, bør få muligheten til å uttrykke seg på alle tre måtene (Lamon, 2020, s. 28).

2.4.7 Bruk av modeller ved brøk

Fosnot & Dolk (2019, s. 92) hevder at matematiske modeller fungerer som mentale kart, som matematikere bruker når de skal løse og undersøke matematiske problemer og relasjoner. Dermed blir det å lære å bruke modeller som støtte i arbeid med matematikk, en viktig del av den matematiske utviklingen (Fosnot & Dolk, 2019, s. 93). Elever vil fortsatt være i prosessen med å utvikle sine mentale modeller, og vil derfor ha stort utbytte av å jobbe med fysiske og visuelle modeller (Petit, Laird & Marsden, 2010, s. 5). Flere studier viser til at modeller er viktige også i brøkopplæringen (Cramer, Wyberg & Leavitt, 2008, s. 490, Siebert & Gaskin, 2006, s. 394). Vi skiller gjerne mellom tre typer modeller når vi snakker om brøkundervisning; arealmodellen, lengdemodellen og mengdemodellen. I arealmodellen er brøken deler av et areal, hvor arealet utgjør det hele (Lamon, 2020, s. 158). En australsk studie fra 2022 viser at flertallet av lærerne som deltok foretrakk å bruke arealmodellen i sin undervisning, gjerne i form av sirkel eller rektangel. Det typiske er at tidlig i brøkundervisningen blir arealmodellen i form av en sirkelformet «pizza» ofte brukt, gjerne da sammen med oppgaver hvor en skal vise til hvor mange pizzabiter som er spist. I denne studien trekker de frem arealmodellen som den flertallet av elevene mestrer (Wilkie & Roche, 2022, s.1). Arealmodellen kan være fint å starte med, fordi den lettere får frem den sentrale ideen om like deler (Van de Walle et al., 2015, s. 366-367). Samtidig kan samme modell føre til at elevene får misoppfatninger, i form av at de ikke tar hensyn til brøkdelens størrelse, men kun ser på antall deler (Matematikksenteret, u.å.). Hvordan læreren bruker modellen, er med andre ord ikke uten betydning. Enge og Valenta (2013, s. 11) viser til Lamon når de skriver at ved å gi elevene ferdige representasjoner, med ferdig oppdelte biter, mister elevene muligheten til å få en dypere forståelse for hvordan brøk fungerer. De trekker i sin artikkel frem viktigheten av å la elevene få en forståelse for at bitene skal være like og at det kan være gunstig å la elevene utforske og diskutere dette gjennom utprøving hvor de selv ser at delene må ha lik størrelse (Lamon, 2020, s. 158).

Den andre modellen er mengdemodellen. I denne modellen er enheten en mengde av objekter. I motsetning til arealmodellen, vil ikke størrelsen til de ulike delene ha betydning her. Her er det antallet som må være likt i de forskjellige delene (Van de Walle et al., 2015, s. 369).

Den tredje modellen er lengdemodellen, eller tallinjemodellen. I denne modellen er det lengden som angir enheten istedenfor et areal eller en mengde. Van de Walle et al. (2015, s. 368) viser til studier av Petit, Laird & Marsden (2010) og Siegler, Carpenter, Fennell, Geary, Lewis & Okamoto (2010) når de hevder at lengdemodellen er viktig for å utvikle elevenes forståelse av brøk. Dette er blant annet fordi det bidrar til at elevene utvikler en forståelse av brøk som et tall. Likevel er denne modellen lite brukt i klasserommene (Van de Walle et al., 2015, s. 368). Annen forskning viser derimot at flere elever har vanskeligheter med å bruke tallinje som et verktøy når de regner brøk. Videre viser den at tallinja blir et mer hensiktsmessig verktøy først når elevene har forstått brøk som et tall (Watanabe, 2002, 462-463).



Figur 1, modeller i brøk, Watanabe (2002)

Modellene kan være til stor hjelp for å bygge opp elevenes forståelse for det symbolske brøkuttrykket. Det vil derfor være viktig at elevene lærer hvordan de skal knytte modellene opp mot de rene symbolske representasjonene. Men det kan også være nyttig for elevene å variere mellom bruken av modeller og å lære å oversette mellom de ulike modellene (Lamon, 2020, s. 158). Fordi modellene kan være en støtte for å forstå brøk, og et steg i å internalisere det rene symbolske brøkuttrykket, blir modellene også et godt verktøy og hjelpemiddel (Siebert og Gaskin, 2006, s. 394). Men fordi feilbruk av modellene kan føre til at elevene feiltolker dem og utvikler misoppfatninger, vil matematiske samtaler hvor læreren introduser modellene og forklarer hvordan de kan brukes, være viktig (Kazemi & Hintz, 2019, s. 27).

2.4.8 Brøknotasjon

Steve Chinn skriver at «matematikken er lett helt til den må skrives ned» (Chinn, 2013, s.167). Med dette mener han at dersom en snakker med elever om matematikk så har de lettere for å svare rett. Han viser til eksempel som går på addisjon av brøker. Hvis regnestykket blir sagt høyt, kan sannsynligheten for å få riktig svar fra eleven være større. Når det skrives ned med symboler, kan det forekomme flere svar hvor nevnere også er lagt sammen. Dette kan kobles sammen med det vi skrev i et tidligere delkapittel om matematisk språk og notasjon. Symbolene som brukes representerer noe, og elevene må vite hvilke abstrakte, matematiske ideer symbolene representerer. En utfordring som elevene ofte har i møte med brøk, er nettopp brøknotasjonen. Sammenlignet med barnets tidligere erfaringer med hele tall, tilsvarer ikke et objekt nødvendigvis en enhet lengre. I tillegg til at enheten kan variere, kan den også deles opp i deler. For å referere til de varierende enhetene og delene av denne helheten brukes en ny type notasjon. I motsetning til de hele tallene, bruker man ved brøk to tallsymboler for å representere ett tall. I tillegg finnes det uendelig mange måter å skrive en gitt brøk, fordi denne brøken vil ha uendelig mange ekvivalente brøker (Lamon, 2020, s. 20, 24, 30). For at elevene skal kunne forstå brøknotasjonen og bruke dette i regning, må de vite hvorfor brøken skrives som den gjør, vite hva de ulike tallene symboliserer (Chinn, 2013, s. 167).

2.4.9 Regning med brøk

I denne delen skal vi se på elevers aritmetiske forståelse for regning med brøk. Kerslake (1986, s. 107) trekker frem at det kan være ugunstig å introdusere regning med brøk inntil elevene har en forståelse for at brøk er tall. Denne påstanden underbygger han ved å vise til en studie hvor det kom frem at elever uten denne forståelsen hadde vansker med å regne med brøk. Istedenfor prøvde de derfor å benytte seg av algoritmer de hadde lært tidligere (Kerslake, 1986, s. 53). Enge og Valenta presenterer et tilsvarende utsagn fra Lamon (2006) som går ut på at det kan være hensiktsmessig å utsette introduksjonen av algoritmer for brøkregning, men heller bruke tiden på å la elevene utvikle en forståelse for brøkbegrepet (2013, s.11).

Gjennom tidligere skoletrinn møter elevene flere standardalgoritmer de pugger for å løse gitte oppgaver. Det kan være at elevene benytter seg av de standardalgoritmer som de har øvd inn tidligere. Standardalgoritmer kan være effektive og nyttige, men fungerer ikke nødvendigvis på alle områder og i alle situasjoner i matematikken. Standardalgoritmer er en betegnelse på de prosessene og metodene som benyttes til å utføre og løse matematiske problemer (Keeton, 2022). Dersom elevene utvikler en instrumentell forståelse for regneoperasjoner i brøk, vil det, sett opp mot Skemps teori kunne skape problemer ved at elevene ikke forstår hvordan algoritmen brukes. Dermed kan det også bli en fare for at de blander hvilken algoritme de skal bruke når.

Andre misoppfatninger elevene har når de skal regne med brøk, er at elevene kan addere og subtrahere både tellerne og nevnerne ved addisjon og subtraksjon. Det er fordi elevene ved addisjon og subtraksjon er vant til å anse tallene før og etter + eller -, som uavhengige tall. Da kan det bli en misforståelse hvor de kan regne slik: $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{5}{8}$. Samtidig må elevene lære seg å gjøre om brøker slik at de kan regnes sammen. Det er viktig at elevene forstår konseptet om at brøkene ikke endrer verdi når de utvides eller forkortes for å få like nevnere på brøkene som regnes med (Chinn, 2013, s. 166-167). Måten addisjon og subtraksjon av brøk utføres, er ulikt måten en multipliserer og dividerer brøk. Reglene for multiplikasjon og divisjon er i utgangspunktet enklere å pugge, ved multiplikasjon skal både teller og nevner regnes ut og i divisjon skal en snu opp ned på den bakerste brøken før den multipliseres (Matematikksenteret, u.å).

2.5 Dybdelæring

Kunnskapssamfunnet, med sine teknologiske nyvinninger, stiller andre krav og gir andre utfordringer enn tidligere samfunn. Flere hevder derfor at det gir nye krav til hvilke ferdigheter og kunnskap elevene trenger, og dermed at vi må endre hvordan vi tenker om og gjennomfører læringsprosessen. En tanke er at vi må skifte fokus fra å kun se på hva vi trenger av kunnskaper, til å også se på hvilke kompetanser vi trenger (Fullan, Quinn & McEachen, 2018, s.37, 41). Fullan et al. (2018, s. 41) har identifisert seks kompetanser som elevene trenger i det nye verdenssamfunnet. Prosessen med å utvikle disse seks kompetansene er det som da blir definert som dybdelæring. De seks globale kompetansene som ble identifisert er karakter, medborgerskap, samarbeid, kommunikasjon, kreativitet og kritisk tenkning. Kompetansen karakter handler om å lære å lære, utvikle mot, målrettethet og utholdenhet, samt selvregulering, ansvar og integritet. Medborgerskap handler om å tenke som globale borgere og vurdere globale problemer basert på en dyp forståelse av ulike verdier og verdensbilder, en interesse i å løse virkelighetsnære problemer, samt medfølelse og empati for andre. Samarbeid handler om å lære sosiale ferdigheter, og kunne bruke dem til å samarbeide og lære av hverandre. Kommunikasjon handler om å kunne bruke ulike fremstillinger, metoder og verktøy til å kunne kommunisere effektivt, og kunne reflektere og forbedre egen kommunikasjon. Kreativitet handler om å kunne stille relevante, utforskende spørsmål, vurdere og forfølge ideer og løsninger og gjøre dem om til handling. Den siste kompetansen er kritisk tenkning, som handler om å kunne evaluere informasjon og argumenter, lage koblinger og identifisere mønstre, kunne løse problemer og eksperimentere, reflektere og handle ut fra ideer i den virkelige verden. Læringssituasjoner som fremmer de seks kompetansene er når elevene utfordres i kognitive prosesser og dykker ned i tematikk og problemer for å få en dypere forståelse av innhold og problemer (Fullan et al., 2018, s. 42 & 45).

Når Ludvigsenutvalget i 2013 skulle utrede hvordan fremtidens skole burde se ut i henhold til fagenes fordeling og innhold, trekker de frem dybdelæring som et viktig element. Dette begrunner de med at utvikling av kompetanse og forståelse er nært knyttet dybdelæring, fordi det krever at eleven aktivt reflekterer over, har innsikt i og leder sin egen læringsprosess. At eleven vet hva hen har lært, og hvordan og når hen kan bruke det (NOU 2015: 8, s. 10). I utredningen sammenligner Ludvigsenutvalget dybdelæring og det de kaller overflatelæring (Tabell 2). I denne sammenligningen blir dybdelæring forklart på denne måten: Det er når elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap. Når elevene organiserer det i et system som henger sammen og ser etter mønstre og underliggende prinsipper. Det er når de vurderer og knytter nye ideer opp til konklusjoner. Til slutt er dybdelæring når elevene forstår hvordan kunnskap blir til, er bevisst og reflekterer over egen læringsprosess, og hensikten er at det fører til varig læring (NOU 2014:7, s. 36, 41). Dette sammenfaller med Fullan et al. sin beskrivelse av de seks kompetansene på flere måter. Blant annet fokuset på å kunne vurdere og bruke nye ideer, finne mønster, kunne løse problemer og reflektere over og styre egen læringsprosess.

Overflatelæring	**Dybdelæring**
Eleven jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til det de kan fra før.	Eleven relaterer nye ideer og begreper til kunnskap og erfaringer de har fra før.
Eleven behandler lærestoff som separate kunnskapselementer.	Eleven organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen.
Eleven memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.	Eleven ser etter mønster og underliggende prinsipper.
Eleven har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.	Eleven vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner.
Eleven behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.	Eleven forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.
Eleven memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier	Eleven reflekterer over sin egen forståelse og sin eigen læringsprosess.

Tabell 2, forskjell på overflatelæring og dybdelæring (Voll, 2019)

Med utgangspunkt i Ludvigsenutvalgets beskrivelse, har Nosrati og Wæge (2018) spesifisert hvordan dybdelæringen vil se ut i matematikken. De trekker frem fem komponenter de mener beskriver dybdelæring i matematikk: begrepsmessig forståelse, prosedyrekunnskap, anvendelse, resonnering og metakognisjon og regulering. Begrepsmessig forståelse handler om å få forståelse for ulike matematiske begreper og sette dem i sammenheng med ideer og prosedyrer (Nosrati & Wæge, 2018, s. 4), som når forståelse for brøkbegrepet gir en mer helhetlig forståelse av multiplikasjon og divisjon (Lamon, 2020, s. 23). Prosedyrekunnskap handler om å ha kunnskap om ulike matematiske prosedyrer, og kunne gjennomføre dem med nøyaktighet, fleksibilitet og kunne veksle mellom ulike prosedyrer. Anvendelse handler om å kunne gjenkjenne og formulere et matematisk problem, representere det på ulike måter, legge en strategi for å løse problemet og vurdere løsningen kritisk (Nosrati & Wæge, 2018, s. 4-6). Som for eksempel når elever møter problemer i hverdag eller skolematematikk som omhandler brøk, og må velge hvilke strategier som er effektive for å komme frem til en løsning. I noen tilfeller vil bruk av standardalgoritmer være en effektiv strategi i regning med brøk, mens det i andre situasjoner kan være unødvendig tungvint. Resonnering handler om å være bevisst hvordan en tenker og kunne forklare det, samt kunne følge og vurdere andres logiske resonnementer. Til sist handler metakognisjon og regulering om å lære seg å være bevisst, reflektere over og kritisk vurdere egen kognitiv aktivitet knyttet til læring og problemløsning (Nosrati & Wæge, 2018, s. 4-6).

2.6 Nye læreplanen

I skoleåret 2020-2021 ble det innført en ny læreplan for 1.-9.trinn, LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Læreplaner, som skal være forpliktende for skoler og lærere, kan også anses som et løfte til samfunnet om hva en kan forvente at elevene får ut av grunnskolen (Blikstad-Balas, 2021). På bakgrunn av samfunnets utvikling, er den nye læreplanen lagt opp med tanke på at elevene skal få de kompetansene som ventes å bli relevante (Utdanningsdirektoratet, 2021, s. 1). Heie (2019) skriver at et aspekt av læreryrket er å kontinuerlig være i endring. I forkant av implementeringen av LK20, var det viktig å gå igjennom hva som var nytt, hvordan det skulle jobbes med de ulike fagene og hva undervisningen skal omhandle.

Den nye overordnede delen kan benyttes for å forstå de ulike delene av læreplanen. Samtidig kan en planlegge skoleåret i forhold til tverrfaglige temaer (Utdanningsdirektoratet, 2022, s.2). Opplæringens verdier blir også presentert i denne delen av læreplanen. Disse verdiene skal prege hvordan opplæringen gjennomføres for å ivareta elevenes beste (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.4).

2.6.1 Kompetansemål knyttet til brøk

For at elevene skal kunne utvikle forståelse og nødvendige kompetanser, mente Ludvigsenutvalget at læreplaner må formes slik at det gis rom til at elevene kan gå i dybden på noen tema. Det baserte de på at det tar tid å utvikle forståelse (NOU 2015: 8, s. 12). I en pressemelding fra 2019 sier regjeringen at de nye læreplanene i større grad ville legge til rette for dybdelæringen (Kunnskapsdepartementet, 2019). I den nye læreplanen for matematikk ser vi at kompetansemål knyttet til brøk i stor grad er lagt til 5. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019), mens det i langt mindre grad er fokusert på brøk på de andre trinnene. Dette ser en dersom det sammenlignes med tidligere læreplan hvor brøk kom i nesten like stor grad over flere år (Kunnskapsdepartementet, 2013). Vi skal gjennom vår forskning vurdere om kompetansemålene er nådd basert på de funnene vi har gjort, og det blir derfor viktig å gjøre rede for disse. Det første kompetansemålet er at elevene skal kunne *beskrive brøk som del av hel, del av mengde og som et tall på tallinja og vurdere og navngi disse størrelsene* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). En kan se dette kompetansemålet mot aspektet del av hel, samtidig som det inneholder mengdemodell, arealmodell og lengdemodell. Et annet kompetansemål er at elevene skal kunne *representere brøk på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonene* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Begge disse kompetansemålene handler om kommunikasjon ved bruk av modeller og andre representasjoner. Dette sier noe om viktigheten ved å kunne bruke disse modellene eller representasjonene i arbeid med brøk. Disse representasjonene kan elevene benytte seg av i ulike sammenhenger gjennom de erfaringene de har, og i matematiske samtaler (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

Videre er det et kompetansemål som går på at elevene skal *utvikle og bruke ulike strategier for regning med positive tall og brøk og forklare tenkemåtene sine* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Som vi trakk frem i kapittel 2.4.9 kan det være ugunstig å introdusere regning med brøk dersom elevene ikke har forståelse for at brøk er tall. Hvis det har seg sånn at elevene ikke får forståelse for dette når de begynner å jobbe med brøk, kan oppnåelse av dette kompetansemålet være problematisk. Dette kompetansemålet kan ses i sammenheng med modellering og anvendelser. Modell blir i matematisk sammenheng forklart som en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Det fjerde kompetansemålet knyttet til brøk i læreplanen sier at elevene skal *utforske og forklare sammenhenger mellom brøker, desimaltall og prosent og bruke det i hoderegning* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Videre skal elevene kunne *diskutere tilfeldighet og sannsynlighet i spill og praktiske situasjoner og knytte det til brøk* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). De to sistnevnte kompetansemålene ses i sammenheng med kjerneelementet resonnering og argumentasjon; elevene skal kunne bevise og argumentere for at løsninger er gyldige (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Det er lagt vekt på tverrfaglighet i den nye læreplanen, hvor det ene temaet er *Folkehelse og livsmestring.* Dette betyr at elevene skal utvikle forståelse for blant annet matematiske representasjoner og modeller som kan hjelpe dem til å gjøre ansvarlige livsvalg (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 4). Dette temaet ser vi i kompetansemålet som går på at elevene skal kunne *formulere og løse problemer fra egen hverdag som har med brøk å gjøre* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9).

Etter 5. trinn blir fokuset på brøk mindre. På 6. trinn finner vi et kompetansemål som tar for seg brøk, hvor det står at elevene skal *formulere og løse problemer fra sin egen hverdag som har med desimaltall, brøk og prosent å gjøre, og forklare egne tenkemåter* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.9). På 7. trinn finner vi to kompetansemål som tar for seg brøk. Det ene sier at elevene skal *utvikle og bruke hensiktsmessige strategier i regning med brøk, desimaltall og prosent og forklare tenkemåtene sine* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 10). Det andre er at elevene skal kunne *representere og bruke brøk, desimaltall og prosent på ulike måter og utforske de matematiske sammenhengene mellom disse representasjonsformene* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.10). På ungdomsskolen finner vi kun et kompetansemål som tar for seg brøk. Dette er på 8. trinn, hvor det står at elevene skal kunne *utforske og beskrive primtallsfaktorisering og bruke det i brøkregning* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 11).

3.0 Metode

Vårt hovedfokus med denne studien er å se på elevers forståelse av brøkbegrepet, med problemstillingen:

Hvilke aspekter ved brøk kan vi identifisere at elever på 6. trinn har forståelse for?

I denne delen vil vi ta for oss hvordan vi har samlet inn data med utgangspunkt i problemstillingen vår, og de valgene vi har gjort i utforming av metode. Først vil vi redegjøre for vårt vitenskapelige ståsted, før vi sier noe om utvalget for studien. Deretter redegjør vi for vårt forskningsdesign. Vi har valgt en metode der elevene besvarte et sett med oppgaver knyttet til brøk, med et oppfølgende semistrukturert intervju av noen av elevene. Vi vil redegjøre for oppbyggingen av oppgavesettet, utvelgelsen til intervju og samtidig se på hvordan vi analyserte dataene. Avslutningsvis i kapittelet ser vi på studiens kvalitet og etiske betraktninger. Deler av dette kapitlet er hentet fra vår eksamen i VIT5002/5002.

3.1 Fenomenologisk tilnærming

Vitenskapsteorien sier noe om hvordan vi ser på kunnskap, og er et viktig grunnlag i arbeidet med forskningsmetode. Det finnes ulike vitenskapsteoretiske tilnærminger som rettes både mot kvalitativ og kvantitativ forskning (Nyeng, 2012). En vitenskapelig teoriretning vi har vurdert som passende for vår oppgave er den fenomenologiske tilnærmingen. Fenomenologien har en ontologi som anser det subjektive som utgangspunktet for kunnskapen, altså individenes egen opplevelse av fenomener og situasjoner. Innenfor fenomenologien er den epistemologiske betraktningen å undersøke spørsmål rundt menneskers opplevelse av situasjoner; hva de opplever, hvordan de opplever det og hvordan dette beskrives (Del Busso, 2018, s.46). Fenomenologisk forskning kan derfor ses på som en beskrivende vitenskap (Thoresen, Rugseth & Bondevik, 2020, s.27). Det er i hovedsak kvalitative metoder fenomenologisk forskning tar i bruk, hvor empirien ofte kommer fra dybdeintervjuer (Nyeng, 2012, s.36). Våre semistrukturerte intervjuer gav oss tilnærmet samme empiri som dybdeintervjuer, når vi la det sammen med elevbesvarelsene fra oppgavesettet. I tillegg gjorde vi, med utgangspunkt i teoretiske rammer, en tolkning av datamaterialet vi hentet inn. Derfor synes vi at den fenomenologiske teoriretningen passet best med vårt studieformål.

3.2 Forskningsdesign

I prosessen med å designe forskningen vår, har vi reflektert rundt ulike retninger innenfor forskningsteori. Vi har blant annet sett på hvorvidt vår forskning vil passe inn under en deduktiv eller induktiv metode, men også om det passer med et ekstensivt eller intensivt design.

En induktiv metode handler om at forskeren går inn i en undersøkelse uten noen hypoteser eller teorier om det som skal utforskes, men nærmer seg empiri uten forventinger. En kan si at en går fra empiri til teori. Forskeren skal kun ta inn de observasjonene og resultatene som kommer frem (Postholm & Jacobsen, 2016, s. 40). I den andre retningen, deduktiv metode, tilnærmer man seg problemet gjennom hypoteser som skal bekreftes eller avkreftes (Busch, 2021, s. 50-51). Det ligger et teoretisk grunnlag for de hypotesene en har før datainnsamling (Postholm & Jacobsen, 2016, s.40). I motsetning til induktiv metode, kan en si at den deduktive går fra teori til empiri.

I denne studien hadde vi på forhånd gjort oss opp noen tanker om hva vi kom til å finne. Teori, tidligere forskning og egne erfaringer tilsier at brøk er et vanskelig og komplisert tema for barn. Det forventet vi å finne i denne studien også, selv om vi var åpne for andre resultater. Derfor plasserte vi vår undersøkelse i en deduktiv tilnærming, hvor vi skulle bekrefte eller avkrefte våre tanker om tematikken.

Et forskningsdesign kan også være ekstensivt eller intensivt. I et ekstensivt design vil en hente inn data fra mange deltakere, som for eksempel gjennom et spørreskjema med fokus på tallmateriale. Et intensivt forskningsdesign går mer i dybden på det som forskes på, med fokus på få deltakere, gjennom for eksempel observasjon eller intervju (Busch 2021, s. 53). Begge designtyper bærer med seg både fordeler og ulemper når problemstillinger skal svares på, avhengig av det som faktisk skal undersøkes. I vårt tilfelle reflekterte vi rundt hva som ble mest hensiktsmessig for oss. Vi kom frem til at det var nyttig å gå i dybden med færre deltakere, ettersom vi var ute etter forståelsen. Dersom vi skulle sett mot et ekstensivt design ville undersøkelsen vår blitt forenklet for å kunne gjennomføres med mange deltakere. Ulempen ved dette ville blitt at det ble et omfattende prosjekt hvor vi ikke fikk hentet ut den informasjonen vi trengte. Å fokusere på færre deltakere var beste alternativ for å svare på vår problemstilling.

Vi har vurdert at vår forskning baserer seg på en deduktiv, intensiv metode som blir gjennomført som en tverrsnittsundersøkelse. Dette vil si at vi samlet inn dataen i løpet av kort tid, som i vårt tilfelle var tre dager. Ettersom vi kun har benyttet oss av data fra én klasse, har vi kun funnet ut hvilken forståelse denne elevgruppen sitter igjen med etter brøkundervisningen i 5.klasse. Her ville kanskje en forskningsperiode over flere år, med flere klasser, vært hensiktsmessig. Men på bakgrunn av vår forsknings satte tidsspenn ble det problematisk. Vi får gjennom en tverrsnittsundersøkelse data som er et utgangspunkt for hva vi kunne forventet gjennom datainnsamling på flere ulike tidspunkt.

3.3 Kvalitativ forskning

Kvantitativ og kvalitativ forskning blir presentert som to grunnleggende tenkemåter i samfunnsforskningen (Tjora, 2021, s. 26). Vi har vurdert hvilken av de to tenkemåtene som er mest egnet for å svare på problemstillingen vår. Noe av det som skiller metodene fra hverandre, er om det er forståelse eller forklaring som blir vektlagt. I den kvantitative metoden blir det ofte hentet inn data for å forklare et fenomen, gjerne med rene tallmaterialer fra mange deltakere. I den kvalitative forskningsmetoden undersøker man færre deltakere for å få en dypere forståelse for et fenomen (Tjora, 2021, s. 27). Vi ønsket gjennom vår studie å få mer kunnskap om elevenes forståelse for begrepet brøk. For å få et mer detaljrikt innblikk gjennom elevenes resonnering om hvordan de har tenkt i møte med oppgaver knyttet til brøk, ble det naturlig å rette oss mot en kvalitativ tilnærming til problemstillingen vår.

3.4 Metode for datainnsamling

På bakgrunn av vitenskapelig ståsted og forskningsdesign tok vi en vurdering av hvordan og fra hvem vi tenkte å samle inn data, for å besvare problemstilling og forskningsspørsmålene våre på en mest mulig egnet måte. Ettersom vi benyttet oss av en kvalitativ forskningsmetode, sto vi litt friere i forhold til hvordan vi kunne foreta datainnsamling. Vi vil her legge frem de forskjellige delene i vår datainnsamling.

3.4.1 Oppgavesett

For å studere elevers forståelse for brøkbegrepet, ga vi elevene oppgaver knyttet til de ulike aspektene og kompetansemålene knyttet til brøk på 5.trinn. Ofte vil vi det være flere av aspektene i samme oppgave. Vi har likevel gjort en vurdering av hvilke av aspektene som er mest fremtredende i hver oppgave, og fordelt dem som vi ser i Tabell 3.

Aspekt	**Oppgaver**
Del av en hel	1A, 2, 4A, 6, 8 og 10
Brøk som måling	1A, 1B, 7A og 7B
Brøk som kvotient	5
Brøk som operator	9
Brøk som forhold	3, 4B og 11

Tabell 3, fordeling av oppgaver i aspekter

Tidligere har vi satt et skille mellom to typer forståelse; instrumentell og relasjonell forståelse. For å undersøke hvilken type forståelse elevene har, ble noen av oppgavene designet på en slik måte at det krevde en annen fremgangsmåte enn en standardalgoritme.

Vi har valgt å la elevene støtte seg på modeller i alle oppgavene, bortsett fra oppgave 10. I Tabell 4 har vi fordelt oppgavene basert på de ulike modellene som er brukt.

Type modell	Oppgaver
Arealmodellen	2, 3, 5, 6, 8 og 9
Mengdemodellen	4 og 11
Tallinje	1 og 7
Kun rene symboler	10

Tabell 4, fordeling av oppgaver i modeller

Om det ble for mange oppgaver, kunne elevene blitt slitne og latt være å svare. Det kunne blitt en mulig feilkilde som kunne resultert i misvisende resultater. Vi tok derfor en beslutning om at vårt oppgavesett ble på 11 oppgaver. Oppgavene er hentet fra Multi 5A og 5B, Lamon og gjennom diskusjon med veiledere. Oppgavesettet kan ses i Vedlegg 1.

3.4.2 Semistrukturert intervju

Vår erfaring er at det kan være utfordrende for elevene å få tak i og forklare sin fremgangsmåte skriftlig. Derfor valgte vi ut noen av elevene til intervju, basert på elevbesvarelsene. De som ble valgt ut til intervju var elever som vi ikke forstå fremgangsmåten til, og i noen tilfeller at vi ville vite mer om hvordan eleven kom frem til riktig svar. Gjennom intervju fikk deltakerne sette ord på det de hadde erfart, tenkt og gjort, og hvilke vanskeligheter de opplevde i møte med oppgavesettet.

Vi valgte å bruke en semistrukturert intervjuform for å komme i dybden på det elevene tenkte gjennom å gi elevene rom til å forklare selv. Vi hadde en liten intervjuguide som en kan se i Vedlegg 2, men vi ville også stille oppfølgingsspørsmål slik at elevene kunne utdype svarene sine. Gjennom å anvende semistrukturert intervju, var vi ikke like bundet til intervjuets struktur som hvis vi hadde gjennomført et strukturert intervju. Dersom vi hadde brukt et strukturert intervju, kunne konsekvensen blitt at vi i mindre grad fikk frem de tankene og forståelsen elevene hadde. Vi dro nytte av at vi kunne møte elevene der de var med spørsmål de kunne svare på under våre intervju.

3.5 Utvalg av forskningsdeltakere

Målet for studien er å undersøke elevers forståelse av brøk, sett i lys av LK20 og fokuset på dybdelæring. Derfor var det naturlig for oss å gjennomføre undersøkelsen i en sjetteklasse med bakgrunn i fokuset på brøk på 5.trinn. Det ville ikke gitt oss en helhetlig forståelse om vi hadde brukt en femteklasse, da de fortsatt hadde vært i prosessen med å utvikle forståelse for brøk. Ved å benytte oss av en 6. klasse, kunne vi se hvilken forståelse elevene sitter igjen med etter en stor konsentrasjon av læremål knyttet til brøk på 5. trinn. Vi fikk tillatelse til å gjennomføre undersøkelsen i en 6. klasse med 24 elever. Av disse var det 18 som samtykket til deltakelse. For å beholde forskningen som kvalitativ, besluttet vi å kun benytte oss av denne klassen i den offisielle forskningen. Vi fikk i tillegg tillatelse til å benytte oss av to av de andre klassene på samme trinn til pilotundersøkelser.

3.6 Pilotstudie

En pilotstudie har som formål å kvalitetssikre informasjonen man henter inn svarer til problemstillingen, og unngå at det oppstår misforståelser hos deltakerne. En pilotstudie kan ses på som en forstudie hvor en også kan forbedre forskningsspørsmål eller hypoteser, metode- og analysedesign. Resultatene fra en pilotundersøkelse kan gi nyttig informasjon i forhold til gjennomføring av hovedstudien (Nord, Jerpseth & Fagermoen, 2012, s. 46-47). Det ble viktig for oss å utføre en pilotstudie for å kvalitetssikre oppgavesettet vi ønsket å bruke i innhentingen av data. Intensjonen med pilotstudien var å finne ut hvor lang tid det ville ta for elevene å svare på oppgavesettet, men også om det var noen uklarheter knyttet til oppgavene. Elevene fikk derfor stille spørsmål underveis, for at vi kunne plukke opp eventuelle misforståelser knyttet til oppgavenes oppbygging og formulering. Noen av spørsmålene elevene stilte var forbundet med forståelsen de hadde av brøk, for eksempel «hvordan kan vi finne 1 på tallinja når det står $\frac{1}{3}$ der?» Disse spørsmålene ga ikke grunnlag for å endre oppgavenes oppbygging.

Da pilotstudien var gjennomført, så vi over både resultatene og spørsmålene som ble stilt i gjennomføringen. Vi ble oppmerksomme på at det var enkelte oppgaver hvor vi ble nødt til å endre litt på formuleringen, slik at elevene lettere forsto hva oppgaven spurte etter. Flere av spørsmålene som ble stilt av elevene ved gjennomføringen av pilotundersøkelsen var knyttet til deloppgave 4B. Spørsmålene handlet om hva ordet «forhold» betyr. Til tross for at flere elever viste usikkerhet ved denne oppgaven, valgte vi å beholde den opprinnelige ordlyden.

Dette avgjorde vi på bakgrunn av vårt ønske om å se om elevene har forståelse for begrepet «forhold», fordi språk er en viktig del av læringen i henhold til sosiokonstruktivistisk teori. Vi la derimot inn en forholdsoppgave til hvor vi ikke bruker begrepet forhold. Pilotstudien viste oss at en skoletime skulle holde for gjennomførelse av oppgavesett. Med tanke på at deltakerne ikke kan stille spørsmål under hovedstudien, valgte vi likevel at det ikke skulle stilles noen makstid, slik at de fikk den tiden de trenger for gjennomføringen.

3.6.1 Sekundær pilotundersøkelse

Det ble som nevnt gjort noen justeringer på oppgavesettet i etterkant av pilotundersøkelsen. Vi ønsket å teste ut endringene før vi gikk i gang med selve forskningen. Dette gjorde vi ved å gjennomføre en ny pilotundersøkelse. Disse elevene fikk de samme beskjedene som i den første pilotundersøkelsen, men vi la mer vekt på hvordan elevene mottok oppgavene. I denne gjennomførelsen var det noen av elevene som ikke forsto noen av oppgavene. Men ved å sammenligne med gruppen som helhet, vurderte vi det som at det handlet om disse elevens forståelse av brøkbegrepet framfor oppgaveformuleringen. I etterkant av den andre pilotundersøkelsen, med de observasjonene og opplevelsene vi satt igjen med, besluttet vi å beholde oppgavesettet slik det var. Ved å gjennomføre to pilotundersøkelser var vi mer sikre på oppgavesettet vårt, og hva vi eventuelt måtte gi av informasjon til deltakerne på forhånd.

3.7 Gjennomførelse av undersøkelse og oppfølgende intervju

På dagen hvor elevene skulle besvare oppgavesettet var 16 av 18 elever til stede. De to siste elevene gjennomførte undersøkelsen ved et senere tidspunkt. Elevene fikk utdelt oppgavesettet samtidig, og fikk vite at de fikk den tiden de trengte til å gjennomføre oppgavene. Ingen av elevene brukte mer enn 50 minutter på å gjennomgå oppgavesettet. Vi observerte derimot kun et fåtall av elevene som så over oppgavene og gjorde endringer før de leverte. Det var flere elever som vi fikk inntrykk av at bare hoppet raskt over enkelte oppgaver, uten å ta seg tid til å forstå oppgaven.

I intervjudelen ville vi at elevene skulle forklare hvordan de hadde tenkt da de løste oppgavene. For at dette skulle være mulig, var en forutsetning at elevene var i stand til å tenke tilbake på selve gjennomføringen. Derfor var det viktig at tidsrommet mellom den skriftlige gjennomføringen og intervjuet ble kort, sånn at det fortsatt var ferskt i minne for elevene. Elevene som ble valgt ut ble derfor intervjuet 1-2 dager etter den skriftlige undersøkelsen. I forkant av intervjuet hadde vi valgt ut hvilke oppgaver fra oppgavesettet vi ville spørre hver av elevene om. Selve intervjuet ble gjennomført ved at en av oss var til stede fysisk, mens den andre deltok digitalt. Intervjuet ble startet med en introduksjon av intervjuerne. Elevene fikk så presentert oppgavene vi ville undersøke sammen med dem, og fikk spørsmål om hvordan hen hadde tenkt da de løste oppgaven. Under intervjuet fikk elevene en blank kopi av oppgavesettet som de kunne forklare ut ifra. For de elevene som trengte mer støtte for å huske hvordan de hadde tenkt, fikk etter hvert også se på egen besvarelse. Oppfølgingsspørsmålene vi stilte underveis var basert på det elevene fortalte. Hensikten med oppfølgingsspørsmålene var å oppklare usikkerheter vi hadde til elevens forklaring og for å vite mer om elevens forståelse av brøkbegrepet. Ved noen tilfeller veiledet vi elevene forsiktig i møte med oppgavene. Hensikten med dette var å få innsikt i om misoppfatningene de hadde til brøkbegrepet var knyttet til oppgaveteksten, og om det kun var forsiktige oppklaringer som skulle til for at de klarte å løse oppgaven, eller om misoppfatningen satt dypere. Elevene ble spurt om to til fire oppgaver hver, og intervjuene varte fra ti til femten minutter. I etterkant ble intervjuene transkribert og anonymisert. Eventuelle dialekter ble skrevet om til bokmål og omtale av stedsnavn ble fjernet (Vedlegg 5).

3.8 Analyse

Elevenes svar ble analysert i to omganger; en gang hvor vi dannet oss et raskt overblikk og en gang hvor vi gikk i dybden. Vi gjorde tidlig en vurdering på om det var nyttig å intervjue alle deltakerne, men vi kom frem til at det hadde blitt et for stort datamateriale med tanke på studiens tidsramme og omfang. Derfor måtte vi gjøre oss et utvalg. Utvelgelsen ble gjort ved at vi gjennomgikk elevbesvarelsene samme dag som elevene svarte på oppgavesettet, og noterte oss besvarelser vi var usikre på eller ikke kunne forstå tenkemåten gjennom en overfladisk analyse. Vi valgte ikke bare ut besvarelser med feil svar, men også de hvor vi ikke klarte å fastslå hvordan de hadde kommet fram til svaret. Hos noen elever valgte vi i tillegg ut oppgaver som hen hadde besvart riktig, for å høre hvordan elevene tenkte når de løste oppgaver de mestret. På bakgrunn av ønsket om at elevene skulle ha svarene sine friskt i minne til intervju, begynte vi å analysere de 16 besvarelsene vi hadde samme dag. Vi analyserte også besvarelsene vi fikk fra de to siste deltakerne samme dag som de gjennomførte oppgavene.

Da intervjuene var gjennomført, gikk vi grundig over alle besvarelsene. Vi startet prosessen med å se på alle besvarelsene samlet. Ved at vi startet analysen her fikk vi en oversikt og et sammenligningsgrunnlag som ble nyttig da vi igjen så på oppgavene på bakgrunn av de andre kriteriene. Da vi hadde fått en oversikt over svarene samlet, grupperte vi deloppgavene i oppgavesettet på tre ulike måter; etter brøkaspekt, oppgavens bruk av modell og kompetansemål, og så på hvordan elevbevarelsene fordelte seg da. Vi gikk også i dybden på flere av oppgavene for å få frem elevenes forståelse knyttet til aspekt, bruk av modeller og oppnåelse av kompetansemål. Det vi da kunne undersøke var hvor mange som har brukt modellen som støtte, hvilke ulike svar elevene produserer og hvor mange ganger disse svarene gjentok seg. Dette sammenlignet vi videre opp mot det elevene fortalte i intervju. Fordi vi så på elevbesvarelsene gjennom tre ulike grupperinger, så vi over enkelte oppgaver flere ganger fra ulike perspektiver.

3.9 Studiens kvalitet

Når vi undersøker kvaliteten i vår studie, ser vi på studiens validitet og reliabilitet. Det som kjennetegner studier med høy validitet er at de finner data som gir svar på forskningsspørsmålet og hvor leseren kan følge studiens oppbygning og teoretiske ståsted (Jacobsson & Skansholm, 2020, s. 104-106). Når vi skal sikre validitet i vår studie, krever det blant annet en bevissthet fra vår side. Vi må være bevisste de valgene vi tar og hvordan vi begrunner dem. For eksempel er det flere begreper i vår problemstilling, som brøkbegrepet og forståelse. En tydelig definisjon på disse begrepene, slik at det blir tydelig hva vi legger i dem, vil være med å styrke studiens validitet.

Reliabilitet brukes derimot for å diskutere stabiliteten i målingene (Svartdal, 2020). Det handler, ifølge Jacobsson & Skansholm (2020, s. 106), om hvordan en går frem for å få tak i dataene. Hvordan vi går frem i vår undersøkelse kan påvirke resultatene, fordi hvis mye overlates til tilfeldighetene kan resultatene preges av feil (Jacobsson & Skansholm, 2020, s. 106). Det er viktig med tanke på de resultatene vi hentet inn gjennom disse oppgavene. Det måtte være gode oppgaver som ga svar å stole på. For at et forskningsresultat skal være til å stole på, er en avhengige av at oppgavene er slik at flertallet av elevene skal kunne svare. I forkant av gjennomførelsen tok vi en vurdering på oppgavesettets reliabilitet, altså om oppgavesettet vårt er pålitelig. Dette gjorde vi blant annet ved å sikre at alle aspektene, modellene og kompetansemålene ble dekt gjennom oppgavene i oppgavesettet. En annen måte vi sikret reliabilitet var å sørge for at elevene hadde modeller de kunne støtte seg på i de fleste av oppgavene. Dette var for å i større grad få frem elevenes forståelse av aspektene, og unngå at elevene ble hindret i å vise denne gjennom manglede evne til å tolke de rene symbolene i brøknotasjonen. Ved å bruke kun symboler, ville det også blitt vanskelig å skille på relasjonell og instrumentell forståelse i flere av oppgavene. Dette mener vi fordi gjennom modellene fikk elevene muligheten til å vise at de forsto relasjonen til begrepet, istedenfor å bare ha lært seg en mekanisk fremgangsmåte med de rene symbolene. Det tredje tiltaket vi tok i bruk for å øke oppgavens reliabilitet, var gjennomføringen av pilotundersøkelsen i to omganger. Det er viktig med tanke på de resultatene vi hentet inn gjennom disse oppgavene. Det skal være gode oppgaver som gir svar som en kan stole på. For at et forskningsresultat skal være til å stole på, er vi avhengige av at oppgavene er slik at flertallet av elevene skal kunne svare. For å sikre at vi vurderte elevbesvarelsene likt, gjennomgikk vi besvarelsene sammen. Det la opp til diskusjon og økt bevisstgjøring rundt analysen, samtidig som alle besvarelsene vurderes gjennom de samme kriteriene. Både i forkant og etterkant av undersøkelsen diskuterte vi hvordan vi mente at en relasjonell og instrumentell forståelse ville gi utslag. Dette var for å sikre at analysen ble gjort på et stabilt teoretisk grunnlag fremfor mer tilfeldige, spontane vurderinger.

Generalisering handler om hvorvidt vi kan dra generelle slutninger basert på vår undersøkelse av en spesifikk gruppe. Mens generaliserbarheten i en kvantitativ undersøkelse handler om å få et utvalg som er representativ for populasjonen, blir det mer komplisert når det gjelder kvalitative undersøkelser. Utvalget vil være langt mindre, og det kan dermed være vanskelig å si at det er representativt for den generelle populasjonen. Likevel ønsker vi at forskningen skal kunne være overførbar til andre lignende studier. Noen mener at det som kreves er tydelige og transparente beskrivelser av metode, analyse og resultater som er det viktigste for å kunne vurdere resultatenes overførbarhet. Når en får flere studier som viser samme resultat som ens egen studie, vil dette kunne bidra i diskusjonen om generalisering. Men generalisering kan også handle om den teoretiske generaliserbarheten. Da mener man hvordan man klarer å generalisere studiens resultater tilbake til den generelle teorien og de teoretiske begrepene. Den teoretiske gen, og like gjennomførbar i både kvalitative og kvantitative studier Den teoretiske generaliseringen er tett knyttet til studiens validitet (Jacobsson & Skansholm, 2020, s. 107-108). Vår studies generaliserbarhet knytter seg til beskrivelsene av våre valg i metode og analyse, men også bruken av teori. De valgene vi har gjort for utforming av oppgavesett, intervju og analyse er basert på teori om elevenes møte med brøk, om relasjonell og instrumentell forståelse, og om sosiokonstruktivistisk syn på læring. Vi ser også at våre resultater i stor grad stemmer overens med tidligere forskning og teori på samme område.

3.10 Etiske betraktninger

I all forskning som inkluderer mennesker, vil det være etiske aspekter som er nødt til å overveies (Jacobsson & Skansholm, 202, s.109). De nasjonale forskningsetiske komiteene utarbeidet i 2014 noen generelle forskningsetiske prinsipper. Prinsippene inkluderer blant annet respekt for personene som deltar i forskningen, og at en skal etterstrebe at forskningen har gode konsekvenser. Et av prinsippene er at forskningen bør preges av kvalitet. I det ligger blant annet at forskerne sørger for forsvarlig innhenting, behandling og oppbevaring av datamaterialet (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2019). I vår forskning var det nødvendig at datainnsamling i første omgang ikke var anonym, fordi vi måtte vite hvem vi skulle ta videre til intervju basert på svarene fra oppgavesettet. Det vil si at vi måtte oppbevare datainnsamlingen fra oppgavesettet på en måte som muliggjorde å identifisere de ulike deltakernes svar. Samtidig er et annet prinsipp at forskeren skal ivareta deltakernes konfidensialitet (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2019). For at vi skulle kunne ivareta dette prinsippet, ga vi hver elev et eget nummer som de skrev på oppgavesettet istedenfor navn. Listen over navn ble i denne perioden oppbevart på en sikker server, separert fra besvarelsene og kryptert med kode, og så destruert etter forskningsperioden. På denne måten kunne vi holde de ulike besvarelsene anonyme med nummer, samtidig som vi hadde muligheten til å finne identiteten på de besvarelsene vi hadde behov for å utdype videre. Fordi vi ønsket å gjennomføre semistrukturert intervju på et utvalg av elevene, var vi nødt til å søke til NSD med tanke på å få tillatelse til å ta opptak av lyd ved intervjuet slik at vi fikk en nøyaktig transkribering fra det elevene sa.

Videre er et annet etisk prinsipp at samtykket til deltakelse i forskningsprosjekt skal være frivillig og informert. I dette ligger det at det skal gis samtykke, og det skal gis informasjon om hva deltakerne skal være med på, at det er frivillig og det skal kunne dokumenteres at samtykke er blitt gitt. For å kunne samtykke, må en også ha samtykkekompetanse, og en skal være særlig forsiktig i de tilfeller hvor deltakerne av studiet står i en avhengighetsposisjon til forskerne (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2019). Våre deltakere vil ikke være i stand til å gi samtykke selv, samtykke må komme fra foresatte. For å overholde det etiske prinsippet om frivillig og informert samtykke har elever derfor både fått informasjon direkte, samtidig som at foresatte har fått informasjon både gjennom foreldremøte og gjennom skriv som har blitt sendt hjem. Alle elevene har fått med seg samtykkeskjemaet en finner i Vedlegg 3 hjem, og det har blitt informert om at deltakelsen er frivillig og at det ikke trengs å oppgi noen grunn til hvorfor man ikke ønsker å delta. Det er de foresatte som gir samtykke gjennom samtykkeskjema, men vi har også informert om at elever som ikke ønsker å delta skal respekteres. Det har ble laget et alternativt opplegg for de elevene som ikke ønsket å delta, og det har ble gitt informasjon om at det ikke ville ha noen negative konsekvenser for elevene som ikke deltok. Vi har også sendt inn samtykkeskjema og informasjonsskriv til NSD og fått dette godkjent (Vedlegg 4).

I forkant av intervjuet av elevene måtte vi også reflektere over konfidensialitetsprinsippet, fordi vi gjorde opptak av samtalene vi hadde med barna. For å unngå at sensitiv informasjon om barna kom på avveie, var vi nøye med hvordan vi tok opp og lagret datamateriale. Vi brukte appen fra universitetet i Oslo for å gjøre lydopptakene, og lagret dette på en sikker server. Deretter transkriberte vi lydopptakene, på en måte som anonymiserte deltakerne og fjernet lydopptakene når prosjektet var over. Også dette har vi søkt om og fått godkjent hos NSD. Da vi intervjuet elevene, var vi også nødt til å være bevisste på vår egen fremgangsmåte og kommunikasjon. Det vi ønsket å undersøke er om vi kan identifisere forståelse for de ulike aspektene hos elevene, for å undersøke om de pedagogiske rammene rundt læringssituasjonen er gode nok for at elevene skal oppnå den viktige brøkkompetansen. Elevene kunne likevel fort oppfatte det som en testsituasjon hvor målet var å undersøke om elevenes kompetanse var god nok. Om elevene oppfattet at de ikke mestret oppgavene, kan det ha gitt opphav til en ubehagelig opplevelse. Dette gjaldt spesielt i intervjusituasjonen, hvor elevene i tillegg til å svare på oppgavene skulle svare direkte til oss om hvordan de tenkte og løste oppgavene. Dette kan bidra negativt til elevens matematiske selvbilde. Derfor var det viktig at vi som forskere var bevisste hvilke signaler vi sendte ut, både gjennom den verbale og nonverbale kommunikasjonen. Et annet aspekt ved intervjuene og transkriberingen, er at oppstarten til intervjuene ble en introduksjon, og litt løsere prat for å trygge elevene. Her kom det frem informasjon som kunne si noe om elevene. Dette ble derfor kuttet ut når det skulle overføres til transkribering.

4.0 Analyse

I denne delen skal vi presentere og analysere datamaterialet fra undersøkelsen. Vi har analysert besvarelsene med utgangspunkt i vår problemstilling "*Hvilke aspekter ved brøk kan vi identifisere at elever på 6. trinn har forståelse for?"* og våre forskningsspørsmål:

- Har elevene forståelse for de ulike representasjonene knyttet til brøkbegrepet?
- Har elevene nådd kompetansemålene som omhandler brøk på 5.trinn?

Innledningsvis har vi valgt å starte med en analyse av oppgavene samlet, for å få et overblikk over resultatene. I hvert underkapittel har vi delt inn oppgavene i oppgavesettet etter problemstilling og forskningsspørsmål. Først har vi delt oppgavene etter hvilke brøkaspekt vi mener de tilhører. I neste underkapittel har vi delt oppgavene etter hvilken modell vi har lagt ved oppgavene som visuell representasjon. I siste del av dette kapittelet har vi delt inn oppgavene etter de kompetansemålene vi mener oppgavene svarer til.

4.1 Oversikt over oppgavene samlet

For å starte den analytiske prosessen, ønsket vi å få et overblikk over resultatene fra undersøkelsen. Derfor valgte vi å se på hvordan elevene som samlet gruppe svarte på oppgavene fra oppgavesettet. I Tabell 5 har vi valgt å dele opp alle oppgavene i deloppgaver, for å få bedre innsikt i hvordan elevene svarer knyttet til aspekter, modeller og kompetansemål. Vi besluttet å fordele svarene i kategoriene *riktig svar, feil svar* og *ikke svart.* Hva som blir vurdert som riktig og ikke riktig svar varierer noe med oppgavetypene. I flere av deloppgavene ble elevene bedt om å skriftlig angi en brøk som et svar. Da vil vår vurdering av riktig og ikke riktig basere seg på brøken som elevene har oppgitt. I de tilfellene hvor elevene ikke skulle svare ved å oppgi en brøk, gjennomgår vi kriteriene for suksess når vi presenterer resultatene fra disse deloppgavene. Ikke svart blir regnet som at elevene enten har latt oppgaven stå blank, har skrevet et spørsmålstegn eller skrevet at de ikke forstår.

Oppgaver	Riktig	Feil	Ikke svart
1A	12	4	2
1B	5	8	5
2 Brøk	14	2	2
2 Prosent	5	4	9
2 Desimaltall	4	2	12
3A	15	1	2
3B	8	8	2
3C	9	5	4
4A	14	3	1
4B	0	10	8
5	0	14	4
6	0	16	2
7A	6	12	0
7B	0	16	2
8A	14	2	2
8B	12	4	2
9	0	9	9
10	2	12	4
11	3	5	10

Tabell 5, oversikt over oppgavene

Tabell 5 viser at antall *riktige svar* varierer fra 0 på det minste til 15 på det meste. Det maksimale antallet mulig riktige på hver deloppgave er 18, da dette er antallet elever som har deltatt i undersøkelsen. I gjennomsnittet er det 6,4 elever som har *svart riktig* på hver deloppgave, mens medianen er 5. Typetallet derimot er 0, da det er fem oppgaver eller deloppgaver hvor ingen av elevene har gitt *riktige svar*. Samtidig ser vi at gjennomsnittet for *feil svar* varierer mellom 1 på det minste og 16 på det meste. Her er gjennomsnittet 7,2 og medianen er 6. Gjennomsnittet for antallet elever som *ikke har svart* på oppgavene er 4,3, mens medianen er 3. Her varierte antallet fra 0 på det minste og 12 på det meste. Ut ifra disse tallene ser vi at det er kategorien *feil svar* som har det høyeste gjennomsnittet. Det er interessant at typetallet for antall *riktige svar* er 0. I Tabell 3 synliggjøres en stor variasjon i hvor mange elever som svarer riktig på de ulike oppgavene. Det er ingen deloppgaver hvor alle elever har svart riktig, men noen har en relativ høy andel av riktige svar. Som nevnt tidligere er det også flere oppgaver som ingen har svart riktig på eller hvor det er en lav andel av riktig svar.

Deltaker	1A	1B	2 - brøk	2 - prosent	2 - desimaltall	3A	3B	3C	4A	4B	5	6	7A	7B	8A	8B	9	10	11	Poeng	Maks	Diff.
1	1	0	1	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	8	20	12
2	0	0	1	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	7	20	13
3	1	1	1	0	0	1	0	1	2	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	9	20	11
4	1	1	1	1	0	1	1	1	2	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	14	20	6
5	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5	20	15
6	1	0	1	1	0	1	1	1	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	10	20	10
7	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	6	20	14
8	1	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	8	20	12
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20
10	0	1	1	1	1	1	1	1	2	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	13	20	7
11	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	10	20	10
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20
13	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	11	20	9
14	1	0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	7	20	13
15	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	20	18
16	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	20	16
17	1	0	1	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	8	20	12
18	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	13	20	7
Poeng	12	5	14	5	4	15	8	9	26	0	0	0	6	0	14	12	0	2	3	135		
Maks	18	18	18	18	18	18	18	18	36	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18		360	
Diff.	6	13	4	13	14	3	10	9	10	18	18	18	12	18	4	6	18	16	15			225

Tabell 6, oversikt over hver enkelt elev

Tabell 6 viser en oversikt over hvordan hver enkelt elev svarer på deloppgavene. Radene viser hvor mange «poeng» hver elev fikk, mens kolonnene viser hvor mange «poeng» hver oppgave fikk. Elevene og deloppgavene får ett poeng per riktige svar. Dette er med unntak av oppgave 4A. I denne oppgaven ble elevene bedt om å oppgi to brøker, og det ble gitt ett poeng per riktig oppgitte brøk. Det tilsvarer maksimalt to poeng per elev. Formålet med Tabell 6 er at vi ønsket å se på differansen mellom oppnådd poengskår og den maksimalt mulige skåren for både oppgaver og hver enkelt elev. For å få frem dette la vi inn maks antall «poeng» hver deloppgave eller elev kunne få. Maks poengsum for deloppgavene er 18, med unntak av oppgave 4A som har en maks poengsum på 36 poeng. For elevene maks poengsum 20, fordi det er 19 oppgaver eller deloppgaver og en av disse deloppgavene gir to poeng. I Tabell 6 blir det tydelig at det er en ulikhet i hvor mange deloppgaver hver elev svarer riktig på. Det vi ser er at seks av elevene har fått seks poeng eller mindre. To av disse har ikke noen riktige svar. Vi ser også at seks elever har fått ti eller høyere poengskår. Det vil si at $\frac{1}{3}$ av elevene har fått mer enn 50 % av maks poengsum. Eleven som har fått mest poeng har fått 14 poeng.

Diagram 1 viser en oversikt over elevenes besvarelser sammenlignet med gjennomsnittet for å enda tydeligere vise spredningen. Gjennomsnittet for poengskår per elev er 7,5. Medianen på elevsvarene er 8, som er relativt likt gjennomsnittet. Det er 10 elever som ligger over gjennomsnittet, mens 8 av elevene ligger under. Vi ser i Tabell 4 at de elevene som skårer høyere enn gjennomsnittet også har avgitt riktig svar der det er få elever som svarer riktig (oppgave 1B, 2 prosent og desimaltall, 10 og 11). Høyeste skår er 14 poeng, det gjelder en elev. Laveste er 0, med to elever.

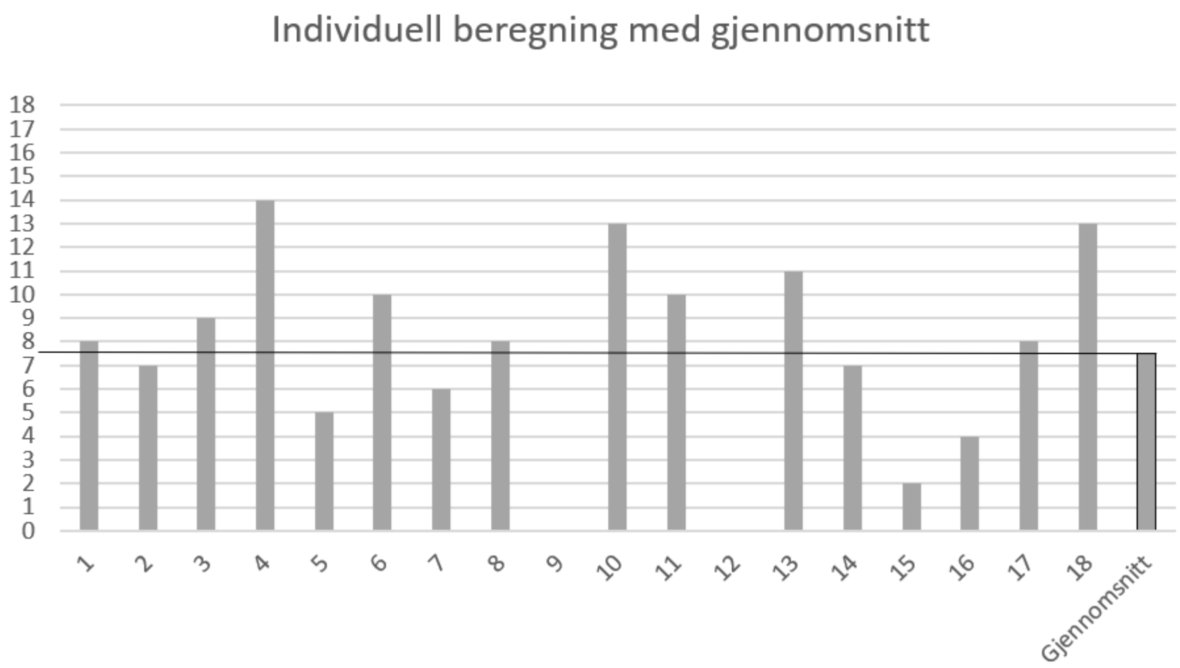


Diagram 1, individuell beregning med gjennomsnitt

Vi har bearbeidet dataene fra Tabell 5 videre, og i Tabell 7 har vi delt elevene i to grupper: «*over gjennomsnitt*» og «*under gjennomsnitt*». Den sorte kolonnen er der for å skille kategoriene på en oversiktlig måte. Da får vi besvarelsene for elevene som svarte «*over gjennomsnittet*» på venstre side, og besvarelsene for elevene som svarte «*under gjennomsnittet*» på høyre side. Dette for å kunne se om det er et mønster både i besvarelsene innad i de to kategoriene, men også se på tallene på tvers av disse. Når vi hadde fordelt besvarelsene fra alle deltakerne, la vi sammen til et totalt antall *riktig*, *feil* og *ikke svart* for begge gruppene. Ved å gjøre dette ble forskjellene mellom kategoriene "*over gjennomsnittet*" og "*under gjennomsnittet*" tydeligere for oss. Vi ser først på besvarelsene som ligger over gjennomsnittet, hvor den totale summen av antall riktige for hele prøven er 96. Det er også fire deloppgaver hvor alle disse elevene har riktig, tre av disse deloppgavene omhandler arealmodellen. Videre ser vi at det også er en høy andel feil besvarelser hos elevene som ligger over gjennomsnittet, med en total som ligger 39 poeng under antall riktige svar. Totalt for disse elevene er det 37 oppgaver som ikke er besvart. Vi ser videre på besvarelsene for elevene under gjennomsnitt. Her er den totale summen av antall riktige svar for hele prøven på 27 poeng. Totalen for feil svar er 80 poeng, som er 53 mer enn antallet riktige svar. Totalen for «ikke svart» er 45 poeng.

Gruppe	Over gjennomsnitt				Under gjennomsnitt		
Deloppgave	Riktig	Feil	Ikke svart		Riktig	Feil	Ikke svart
1A	9	1	0		3	3	2
1B	5	2	3		0	6	2
2 Brøk	10	0	0		4	2	2
2 Prosent	5	1	4		0	3	5
2 Desimaltall	4	0	6		0	2	6
3A	10	0	0		5	1	2
3B	6	4	0		2	4	2
3C	8	1	1		1	4	3
4A	10	0	0		4	3	1
4B	0	6	4		0	4	4
5	0	6	4		0	8	0
6	0	10	0		0	6	2
7A	5	5	0		0	6	2
7B	0	8	2		0	8	0
8A	10	0	0		4	2	2
8B	9	1	0		3	3	2
9	0	3	7		0	6	2
10	2	7	1		0	5	3
11	3	2	5		0	3	5
Totalt	96	57	37		27	80	45

Tabell 7, fordeling over og under gjennomsnitt

Når vi deretter ser på kategoriene "*over gjennomsnittet*" og "*under* gjennomsnittet" opp mot hverandre, ser vi at det er en differanse på 69 mellom antall riktige svar. Det er en relativt stor forskjell. Differansen for feil svar mellom disse kategoriene er 23, som er betydelig lavere enn differansen mellom riktige svar. Det er også interessant å se på antall ubesvarte oppgaver. Her er det kun en differanse på 8 mellom disse gruppene. Det viser oss at de åtte elevene som ligger under gjennomsnittet fremdeles har en høy svarprosent sammenlignet med elevene over gjennomsnittet. Dette er positivt til tross for det høye antallet feil, fordi vi får et resultat som er basert på at flertallet av elevene har prøvd å løse oppgavene. Det bidrar til et tydeligere og mer nøyaktig resultat. Det blir også viktig å fremheve at det er to færre elever i gruppen under gjennomsnitt, enn det er i gruppen elever som ligger over gjennomsnittet.

4.2 Sammenligning av oppgaver med ulike aspekter av brøkbegrepet

I teorikapittelet trakk vi frem fem aspekter ved brøkbegrepet: brøk som del av en hel, brøk som måling, brøk som kvotient, brøk som operator og brøk som forhold (Gray & Ånestad, 2021, s. 64). Her skal vi analysere hvordan elevene svarer på oppgaver knyttet til de ulike aspektene. Dette skal vi gjøre ved å først dele oppgavene inn etter hvilke av brøkens aspekter som vi mener kommer tydeligst frem. Deretter skal vi se på hvordan elevene har svart på disse oppgavene og sammenligne mellom de ulike aspektene. Vi vil spesifisere at det ikke er noen klare skiller mellom aspektene, og at de vil overlappe hverandre. På samme måte vil det kunne være flere aspekter til stede i hver oppgave. Vi har likevel valgt å dele inn oppgavene ved å se på hvilke av aspektene vi mener er mest fremtredende. Unntaket er oppgave 1A. I denne oppgaven ser vi at både del av en hel- og måleaspektet står så sterkt at vi har valgt å legge denne oppgaven inn i begge aspektene.

4.2.1 Del av en hel

Det første aspektet vi skal se på er brøk som del av en hel. Dette er det aspektet som elevene ofte møter først (Lamon, 2020, s. 32). Vi har sett gjennom læremiddelet elevene brukte på 5. trinn, Multi 5. Det vi ser er at mange av oppgavene tar for seg del av en hel aspektet, og at det blir brukt som en introduksjon til temaet brøk. I mange av oppgavene i boka, skal elevene angi andel av en hel som en brøk (Alseth, Arnås & Røsseland, 2020). Mange av deloppgavene i oppgavesettet vårt kan løses ved at elevene ser dem i lys av del av en hel. Vi har likevel valgt å trekke ut noen av oppgavene hvor vi mener at dette aspektet kommer tydeligst frem. Disse oppgavene er 1A, den delen av oppgave 2 som tar for seg brøk, oppgave 4A, oppgave 6, begge deloppgavene av oppgave 8 og oppgave 10. Det som går igjen i disse oppgavene, er at de kan løses ved å se på delene av helheten sammenlignet med helheten.

Oppgave 8

Om du spinner en binders på disse sirklene, hva er sannsynligheten for at den stopper på rødt felt?

Svar med brøk.

Figur 2, oppgave 8

Oppgave 8 (Figur 2) handler om sannsynlighet, noe som ofte kobles opp mot forholdsaspektet ved brøk (Lamon, 2020, s. 237-238). Vi har likevel valgt å ha denne oppgaven under del av en hel. Det har vi gjort fordi oppgavens utforming ligner på oppgavene elevene ofte møter i del av en hel aspektet, med bruk av en form for pizzamodell (Wilkie & Roche, 2022, s.1). Oppgave 10 (Figur 3) kan løses ved å se på hvor stor del som mangler for å få en hel, og deretter finne en brøk hvor delen som mangler for en hel er mindre.

Oppgave 10

Skriv en brøk som er større enn $\frac{5}{6}$, men mindre enn 1.

Figur 3, oppgave 10

I Tabell 8 har vi laget en oversikt over hvordan elevene har svart på oppgavene vi har trukket frem som tilhørende del av en hel-aspektet.

Oppgaver	Riktig	Feil	Ikke svart
1A	12	5	1
2 Brøk	14	2	2
4A	13	3	2
6	0	16	2
8A	14	2	2
8B	12	4	2
10	2	12	4

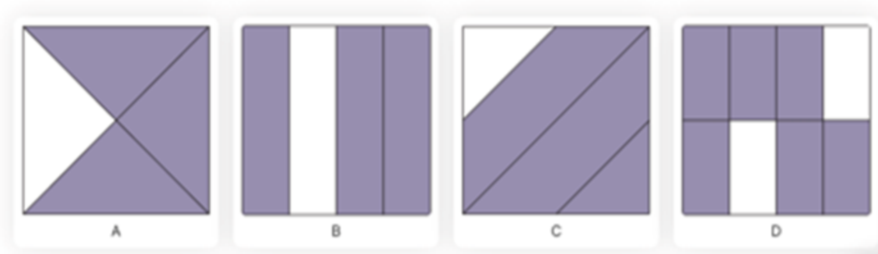
Tabell 8, oppgaver tilhørende del av en hel

Gjennomsnittet for oppgavene i del hel aspektet er 9,57, mens medianen er 12. Dette er mer enn en dobling sammenlignet med medianen for alle oppgavene samlet. Når vi ser på Tabell 8, ser vi at for 5 av 7 oppgaver ligger andelen av elever som har svart riktig mellom 12 og 14. Sammenligner vi dette med gjennomsnittet for alle oppgavene samlet, ser vi at dette er oppgaver der en relativ høy andel av elevene har svart riktig. Vi kan også se på hvordan elevene som har skåret over gjennomsnittet svarer (Tabell 7). Da finner vi at ved tre av disse oppgavene har alle svart riktig, mens de to siste har en elev hver som har svart feil. Det er kun en oppgave, oppgave 3A, hvor flere elever har svart riktig enn de fem oppgavene vi har trukket frem over. Sammenligner vi med de andre deloppgavene i oppgavesettet, ser vi også at med unntak av 3A har ingen av de andre oppgavene en andel riktige svar som ligger over 10.

Likevel er det to av oppgavene i Tabell 7 som skiller seg fra de andre oppgavene i antallet riktige svar. I motsetning til de fem andre oppgavene, er det ingen av elevene som har svart riktig på oppgave 6 (Figur 4). I denne oppgaven undersøker vi elevenes forståelse av den sentrale ideen om at i en arealmodell har det ingen betydning hvordan bitene er delt opp, så lenge tilsvarende store deler har det samme arealet. Oppgaven ser slik ut:

Oppgave 6

I noen av figurene (A-B-C-D) er $\frac{3}{4}$ fargelagt. Sett en ring rundt disse.



Figur 4, oppgave 6

Vi har vurdert oppgaven som riktig besvart hvis elevene har inkludert alle de tre figurene som illustrerer $\frac{1}{4}$ (figur A, B og D) og ekskludert den figuren som ikke illustrerer $\frac{1}{4}$ (figur C). Tabell 9 viser hvordan hver elev har svart på denne oppgaven. Kryss betyr her at eleven har satt ring rundt denne figuren.

Deltaker	Figur A	Figur B	Figur C	Figur D
01	X	X	X	
02	X	X	X	
03	X	X	X	
04	X	X	X	X
05	X	X	X	
06		X		
07	X	X	X	
08	X	X	X	X
09				
10	X	X	X	
11	X	X	X	
12				
13	X	X	X	
14	X	X	X	
15	X	X	X	
16	X	X	X	
17	X	X	X	
18	X	X	X	

Tabell 9, svar til oppgave 6

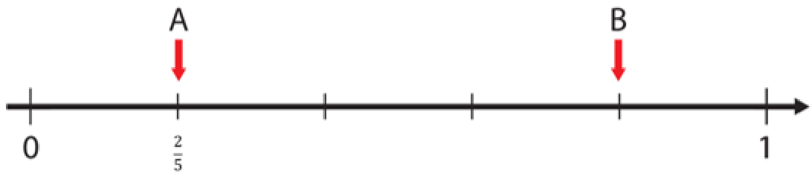
Den mest typiske feilen elevene har gjort i oppgave 6 er at de har satt ring rund figur A, B og C, men ikke rundt figur D. Hele 13 elever har svart på denne måten. To av elevene har satt ring rund alle figurene. Kun en av elevene har ekskludert figuren C, men denne eleven har også ekskludert figur A og D. To elever har ikke svart. I intervjuene spurte vi to elever om denne oppgaven. Elev 03 sier at hen opplever oppgave 6 som en enkel oppgave som hen har gjort før. Eleven forklarer at måten man løser slike oppgaver er at man finner de figurene som er delt inn i fire deler, og hvor tre av disse er fargelagt. Derfor har eleven inkludert figur A, B og C. Elev 17 forteller at hen løser oppgave 6 på samme måte som elev 03. Denne eleven blir bedt om å forklare hva $\frac{3}{4}$ betyr, og forklarer at det betyr at du har en boks som er delt i fire deler og tre av disse er fargelagt. Både elev 03 og elev 17 har ekskludert figur D, og begrunner dette med at denne figuren er delt i flere deler enn fire og dermed ikke “er riktig”. Vi vil likevel presisere at 03 endrer svaret sitt underveis i intervjuet til å inkludere figur A, B og D og ekskludere figur C. Dette gjøres etter at eleven får spørsmål om størrelsen på bitene, og blir bedt om å skrive størrelsen på figurene med rene symboler. I begge disse tilfellene gjør spørsmålene at eleven, med noe usikkerhet og støtte i oss, kommer frem til det riktige svaret.

Den andre oppgaven som skiller seg ut, er oppgave 10 (Figur 3). Her skal elevene finne et tall som er større enn $\frac{5}{6}$, men mindre enn en hel. Dette er en oppgave som skiller seg fra de første fem oppgavene, fordi det er kun to elever som har svart riktig. Oppgaven skiller seg også ut ved at den kun har rene symboler som elevene kan støtte seg på. Derfor kommer vi til å gjennomgå denne oppgaven senere, når vi tar for oss modeller og representasjoner.

De oppgavene i del av en hel som vi ikke har vist så langt i teksten, vil vise bilde av her.

Oppgave 1

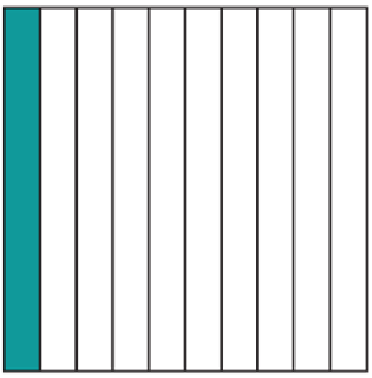
a) Hvilke brøker peker pilene på?



Figur 5, oppgave 1

Oppgave 2

Hvor stor del av figuren er fargelagt? Skriv svaret som **brøk, desimaltall og prosent**.



Figur 6, oppgave 2

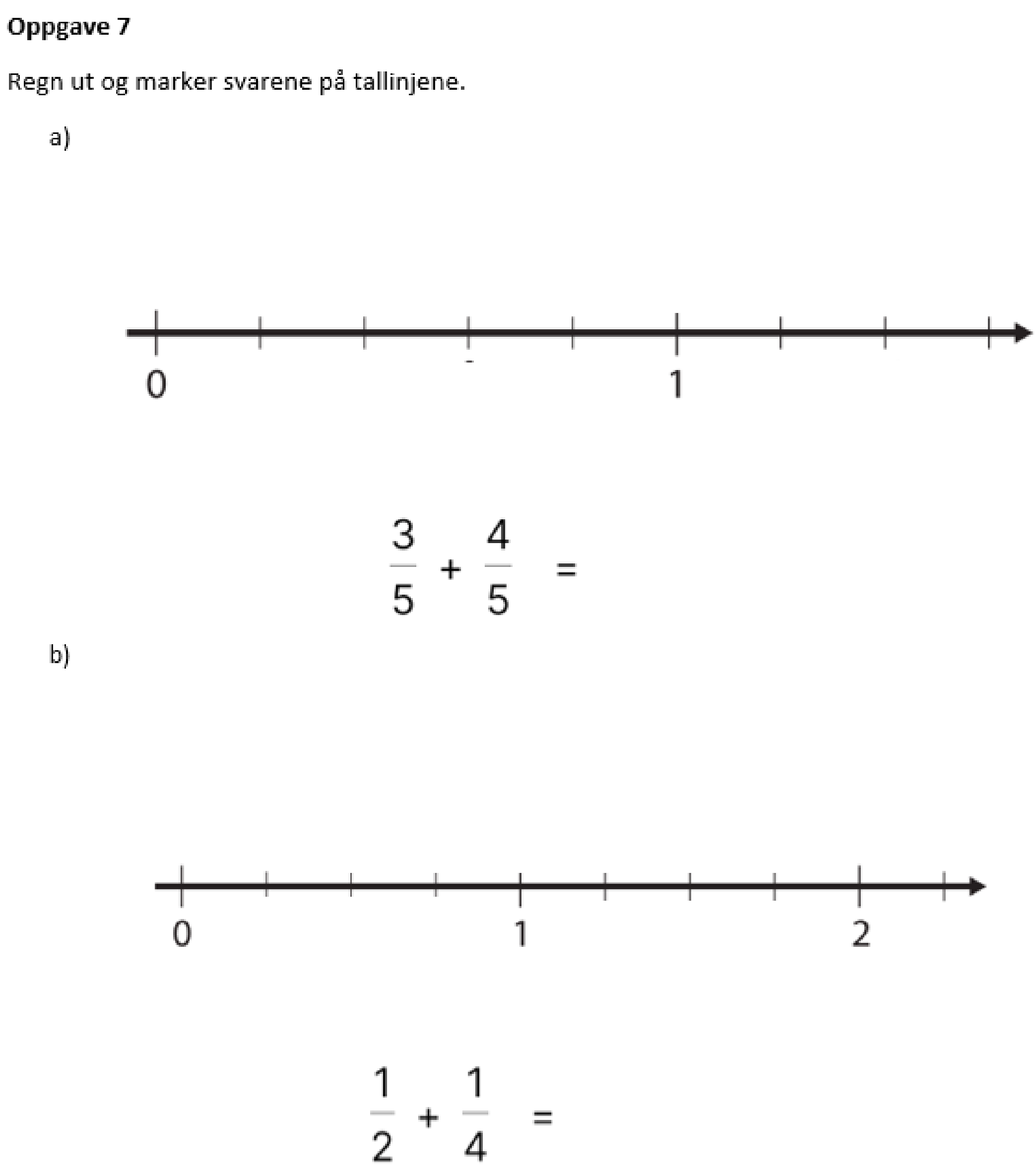
Oppgave 4

a) Hvor stor del av eplene nedenfor er røde, og hvor stor del er grønne? Skriv svaret som brøk.

Figur 7, oppgave 4A

4.2.2 Målingsaspektet

Det andre aspektet vi skal se på er målingsaspektet. Vi har vurdert at oppgave 1A, 1B, 7A og 7B tilhører dette aspektet. Spesielt tydelig er dette aspektet i oppgave 1B (Figur 9). Her angis $\frac{1}{3}$ på tallinja, og elevene skal bruke dette til å plassere 1 på tallinja. Denne kan løses ved at man bruker $\frac{1}{3}$ som måleenhet og bruker det til å måle opp $\frac{3}{3}$. Også oppgave 7A (Figur 8) kan løses ved å bruke $\frac{1}{5}$ som måleenhet og finne svaret ved å måle opp først $\frac{3}{5}$ og så måle opp de resterende $\frac{4}{3}$. I oppgave 7B (Figur 8) er det addisjon med ulike nevnere, men en kan fortsatt finne svaret gjennom å måle opp først $\frac{1}{2}$ og så legge til $\frac{1}{4}$ på tallinja. Tabell 10 viser hvor stor andel av elevene som har svart riktig på disse tre oppgavene.



Oppgave 7

Regn ut og marker svarene på tallinjene.

a)

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} =$$

b)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

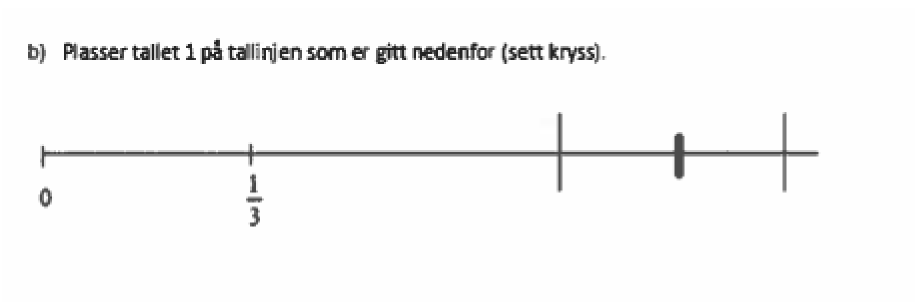
Figur 8, oppgave 7A og B

Som vi ser av Tabell 10, varierer antall riktige svar på disse deloppgavene fra 0 (deloppgave 7B) og opp til 12 (deloppgave 1A). Gjennomsnittet for antallet elever som har svart riktig på disse deloppgavene er 7,5, mens medianen er på 5,5. Det vil si at gjennomsnittet for riktige svar på målaspektet ligger litt under gjennomsnittet for riktige svar på alle deloppgavene samlet, mens medianen for målaspektet ligger litt over medianen for deloppgavene samlet. Når vi ser på Tabell 7, ser vi at det er 3 av 8 elever under gjennomsnittet som har svart riktig på deloppgave 1A og en elev som har svart riktig på deloppgave 7A. Det er ingen av elevene under gjennomsnittet som har svart riktig på deloppgave 1B og 7B. Sammenlignet med elevene over gjennomsnittet er det 9 av 10 elever som har svart riktig på oppgave 1A og 5 som har svart riktig på 1B og 7A. Det er ingen som har svart riktig på deloppgave 7B. En av grunnene til at ingen har svart riktig på deloppgave 7B, kan være at denne oppgaven innebærer regning med brøk. Studier har vist at elever har utfordringer med å regne med brøk (Kerslake, 1986, s. 107). Oppgave 7 kan derfor anses som en vanskeligere oppgave, noe som kan forklare hvorfor det er et fåtall av elevene som har svart riktig på denne. Oppgave 7 skal vi derfor komme tilbake til når vi diskuterer regning med brøk i siste underkapittel.

Oppgave	Svart riktig	Svart feil	Ikke svart
1A	12	5	1
1B	5	8	5
7A	6	11	1
7B	0	15	3

Tabell 10, oversikt oppgaver målingsaspekt

Oppgave 1B (Figur 9) er kanskje den oppgaven hvor måleaspektet av brøk kommer tydeligst frem, fordi den kan løses ved å bruke $\frac{1}{3}$ som måleenhet. Det er kun 5 av 18 elever som har svart riktig på denne oppgaven. Vi har vurdert svarene som riktig hvis de ligger i omtrentlig riktig område på brøkstreken. Dette har vi gjort for å ta høyde for unøyaktighet i måling. Vi vet fra gjennomføringen at bare en av elevene brukte linjal til å løse denne oppgaven. Området vi har vurdert som riktig har vi markert i Figur 9.



Figur 9, oppgave 1B

Vi intervjuet tre elever om 1B. Den første eleven har svart feil, og plassert 1 mellom 0 og $\frac{1}{3}$. Den andre eleven har tilsynelatende svart riktig på oppgave 1B, men i intervjuet kommer det frem at det er et svar som baserer seg på gale antakelser. Begge disse elevene forklarer i intervjuet at de ikke forstår hvordan de skal tolke $\frac{1}{3}$ og velger å se bort fra enten tallet over eller under brøkstreken. De tolker med andre ord $\frac{1}{3}$ enten som 1 eller 3 på tallinja, og plasserer

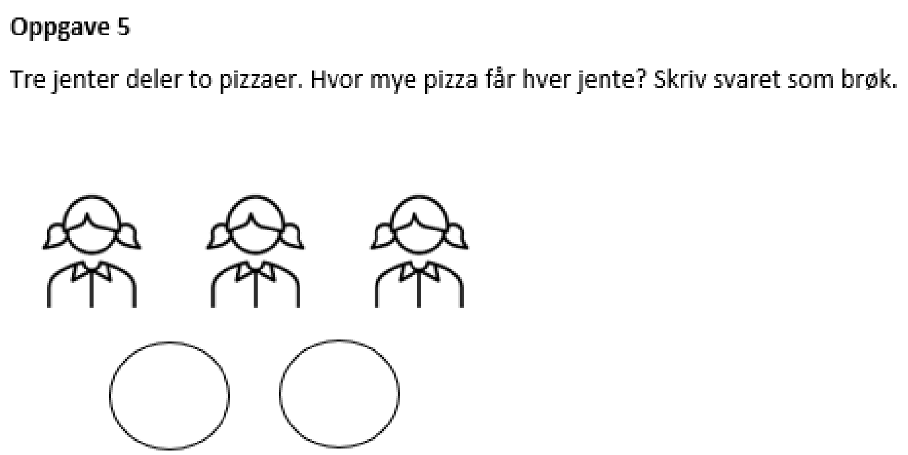
1 ut ifra dette. Den tredje eleven vi intervjuet har svart riktig, og brukte linjal underveis i den skriftlige undersøkelsen for å plassere 1 nøyaktig. Men når hen skal forklare hvordan hen gikk frem og hvorfor, får vi inntrykk av at eleven har brukt riktig fremgangsmåte, men er så usikker at det blir vanskelig å forklare hvorfor den valgte fremgangsmåten er riktig. Det som virker til å gå igjen i alle tre intervjuene, er en usikkerhet knyttet til hvor en skal plassere 1 i forhold til $\frac{1}{3}$. I Tabell 11 ser vi hvordan elevene har svart på oppgave 1A og 1B, og hvordan elevene fordeler seg blant disse svarene. I deloppgave 1B har vi delt svarene inn etter hvor de har plassert krysset i forhold til 0 og $\frac{1}{3}$.

1A	4/5	1/20	3/0	3/5	2/5	Ikke svart
Antall	12	2	1	1	1	1
1B	Mellom 0 og 1/3	Riktig sted etter 1/3	Feil sted etter 1/3	På 1/3		Ikke svart
Antall	4	5	3	1		5

Tabell 11, fordeling av svar oppgave 1A og B

4.2.3 Brøk som kvotient

Det tredje aspektet av brøk som vi skal se på er brøk som kvotient. Vi har vurdert oppgave 5 (Figur 10) som tilhørende dette aspektet..



Figur 10, oppgave 5

Denne oppgaven kan oppfattes som regnestykket 2 delt på 3, hvor svaret er brøken $\frac{2}{3}$. Ingen av elevene har kommet frem til det riktige svaret på denne oppgaven. Tabell 12 viser hvilke svar elevene har gitt, og hvor mange som har oppgitt hvert av svarene. Den tomme ruten tilsvarer ikke svart.

	2/2	16/3	2/8	2/6	6/6	1/3	1/2	6/2	6/18	2/12	2X	
Antall	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	1	4

Tabell 12, fordeling av svar på oppgave 5

Som vi ser fra tabellen er det fire elever som har svart $\frac{2}{6}$. To andre elever har kommet frem til de tilsvarende brøkene $\frac{1}{3}$ og $\frac{6}{18}$. Det er også fire elever som ikke har svart på denne oppgaven. De resterende 8 elevene har, som vi ser i tabellen over, gitt forskjellige svar.

Ut fra Tabell 12 kan vi altså lese to ting. Det første er den store bredden i svarene som elevene produserer. Dette kan antyde at elevene er usikre i møte med denne oppgaven. Det andre er at flere av elevene har svart $\frac{2}{6}$ eller en annen ekvivalent brøk. De vi intervjuet om oppgave 5 forklarer at de kom frem til svaret $\frac{2}{6}$ fordi det er 6 biter til sammen og hver jente får 2 av disse bitene. Elevene som har kommet frem til dette svaret har altså tatt utgangspunkt i begge pizzaene som det hele. Den oppfatningen vi har av riktig svar, er at en pizza anses som det hele, og at hver jente dermed får $\frac{2}{3}$ pizza. Dermed kan man vurdere om elevene har svart feil, eller om det er rimelig å anse to av pizzaene som det hele.

4.2.4 Brøk som operator

Det fjerde aspektet vi skal se på er brøk som operator. Vi har vurdert at dette aspektet kommer fram i oppgave 9 (Figur 11). Her skal elevene finne $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{4}$, med støtte i en arealmodell. En måte elevene kan løse denne oppgaven på er ved å dele opp $\frac{1}{4}$ i tre deler, og se hvor stor en av disse delene utgjør av helheten. Dette er en av oppgavene hvor ingen av elevene har kommet frem til riktig svar.

Oppgave 9

Bruk figuren til å finne $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{4}$. Skriv svaret som brøk.

Figur 11, oppgave 9

Tabell 13 viser hvilke svar elevene har oppgitt, og hvordan elevene fordeler seg mellom dem.

Oppgitte svar	2/4	1/3	1/3 1/4	1/4	4/4	2/7	Ikke svart
Antall elever	1	1	2	3	1	1	9

Tabell 13, fordeling av svar på oppgave 9

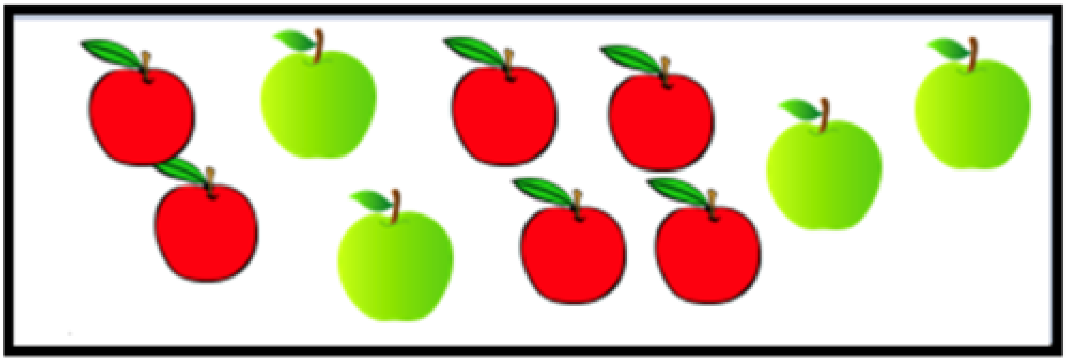
Det vi ser er at halvparten av elevene ikke har svart på oppgaven. En har oppgitt brøken $\frac{2}{7}$ som svar, hvor en kan tenke seg at hen har kommet frem til svaret ved å legge sammen tellerne og nevnerne i brøkene $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{4}$. Av de som har svart har de fleste enten gjengitt en eller begge brøkene fra oppgaveteksten, eller annen brøk under en hel med fire som nevner. Dette kan henge sammen med modellen som er brukt.

En av elevene vi intervjuet ble spurt om hvordan hen hadde tenkt når hen skulle løse denne oppgaven. Denne eleven hadde selv svart $\frac{2}{4}$. Hen forklarer at hen ikke visste hva "$\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{4}$" betydde, og derfor ble usikker når oppgaven skulle løses. Fremgangsmåten besto dermed i å "fjerne" en av delene for å få $\frac{1}{3}$ ved å legge fingeren over den ene delen, for så å fjerne fingeren igjen og "legge til" delen igjen. Dermed endte hen opp med $\frac{2}{4}$. Det er vanskelig å vite om dette er en fremgangsmåte flere av elevene har valgt. Vi får inntrykk av at den usikkerheten eleven beskriver i møte med oppgaven, også er gjeldende for de fleste andre elevene. Dette inntrykket får vi fordi så mange elever ikke har svart eller har svart ved å gjenta brøkene i oppgaveteksten. Det er ingen antydning til at noen av elevene har prøvd å dele opp $\frac{1}{4}$ i modellen ved tegning. De få tegningene elevene har gjort har gått ut på å fargelegge flere firedeler i figuren. Det er ingen av elevene som nærmer seg det riktige svaret $\frac{1}{12}$.

4.2.5 Brøk som forhold

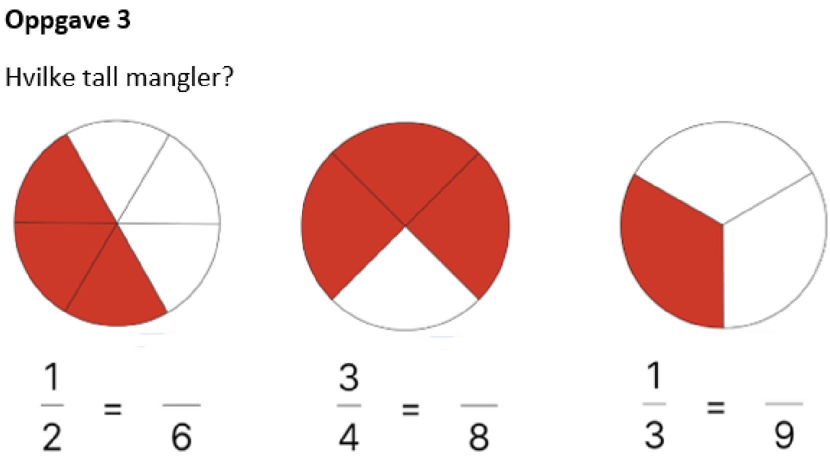
Det siste aspektet er brøk som forhold. Vi har kommet frem til at dette aspektet kommer frem i deloppgave 3, 4B og 11 (Figur 13, 12 og 14). I 4B brukes begrepet forhold når oppgaven er at elevene skal finne forholdet mellom røde og grønne epler.

b) Hva er forholdet mellom grønne og røde epler? Skriv svaret som brøk.



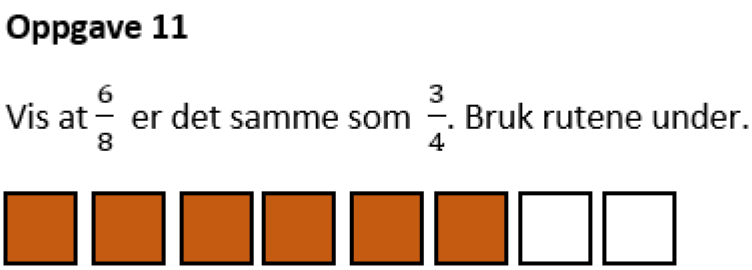
Figur 12, oppgave 4B

I oppgave 3 skal elevene finne den ekvivalente brøken til en oppgitt brøk.



Figur 13, oppgave 3

I oppgave 11 skal de vise at to brøker er ekvivalente.



Figur 14, oppgave 11

Oppgave 3A er den oppgaven hvor flest elever, 15 av 18, har svart riktig. I oppgave 3B og 3C er det omtrent halvparten av elevene som svarer riktig, tilsvarende 8 og 9 elever. Selv om dette er lavere enn i oppgave 3A, er det likevel over det samlede gjennomsnittet på 6,4. I kontrast til oppgave 3, er deloppgave 4B (Figur 12) derimot en av deloppgavene som ingen av elevene svarer riktig på. Her er det 8 elever som ikke oppgir svar på oppgaven. I oppgave 4A bes elevene angi med brøk hvor stor del av eplene som er røde og hvor stor del som er grønne. Inntrykket vi får gjennom å se på resultatene, er at flere av elevene har valgt å møte oppgave A og B ved at de svarer på antall røde epler i en av deloppgavene, mens de svarer på antall grønne epler i den andre deloppgaven. Noen av elevene har oppgitt svaret $\frac{4}{6}$, noe som ville vært riktig ved en annen notasjon (4:6). Andre skriver også at de ikke vet hva forhold betyr, og dette var også et hyppig spørsmål ved gjennomføring av pilotundersøkelsen. Dette antyder at elevene har opplevd usikkerhet knyttet til selve begrepet “forhold”.

I oppgave 11 (Figur 14) er det tre elever som har svart riktig, mens halvparten ikke har svart. De svarene som vi har ansett som riktige er hvor elevene visuelt eller verbalt har gruppert to og to kvadrater for å vise at de kan anses som fire grupper med to kvadrater. En av elevene tegnet tre grå kvadrater under og et hvitt kvadrat, sammen med en skriftlig forklaring om at begge kan deles på to og derfor er $\frac{2}{8}$ det samme som $\frac{3}{4}$. Et svar som går igjen blant de som har svart feil, er at de setter markeringer i figuren sånn at de rammer inn tre grå og et hvitt kvadrat. De lager med andre ord figuren $\frac{3}{4}$ ved å “ta bort” fire av kvadratene i den opprinnelige figuren. Dette har vi vurdert som feil svar.

Oppgave	Svart riktig	Svart feil	Ikke svart
3A	15	1	2
3B	8	8	2
3C	9	5	4
4B	0	10	8
11	3	5	10

Tabell 14, fordeling av svar forholdsaspektet

Oppsummert er det en relativt stor andel som svarer riktig på oppgave 3, mens det er betraktelig færre som svarer riktig på oppgave 11 og ingen som svarer riktig på deloppgave 4B. Tabell 14 viser hvor mange elever som har svart riktig på oppgavene. Gjennomsnittet på disse til sammen fem oppgaver og deloppgaver blir 7, med en median på 8.

4.2.6 Sammenligning av aspektene

Aspekt	Oppnådd poeng	Maks poeng	%
Del av hel	80	144	55,6
Måling	23	72	31,9
Kvotient	0	18	-
Operator	0	18	-
Forhold	35	90	38,9

Tabell 15, sammenligning av aspekter

Tabell 15 viser en oversikt over de ulike aspektene. Det er en variasjon i antall oppgaver tilhørende hvert aspekt. For at vi skal kunne sammenligne resultatene mellom de ulike aspektene, har vi derfor valgt å se på hvordan elevene har svart prosentvis. Hvert aspekt har fått poeng for hvor mange riktige svar vi har fått i resultatene. Maksimal poengsum er så mange riktige svar som det er mulig å få på alle oppgavene tilhørende hvert aspekt. For de aspektene som bare har en oppgave, vil det utgjøre en maksskår på 18, fordi det er 18 elever som har muligheten til å svare riktig på disse oppgavene. For de aspektene som har fem oppgaver, vil det tilsvare 90 poeng maksimalt, fordi for hver oppgave vil 18 elever ha mulighet til å svare riktig. Vi har sett på hvor stor prosentandel av den maksimale poengsummen som er oppnådd innenfor hvert aspekt. Vi ser at de aspektene som har den minste andelen riktige svar, er *kvotient* og *operator.* Begge disse aspektene har kun én oppgave, og den har ingen svart riktig på. Det kommer også tydelig frem at aspektet *del av hel* har den størst prosentandelen, med en skår på 55,6 %. *Forhold* er det nest største aspektet, med 38,9%. Mellom *forhold* og *måling* er det derimot kun 7 % som skiller, da *måling* har 31,9 %. For å illustrere forskjellene tydeligere, har vi laget Diagram 2 basert på dataene fra Tabell 15.

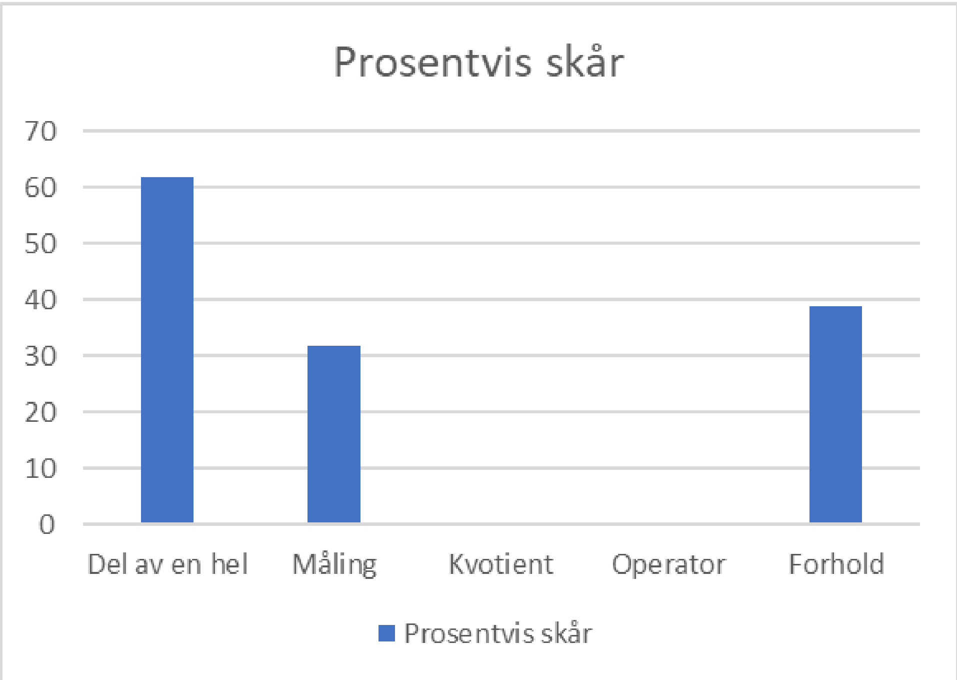


Diagram 2, prosentvis skår for aspekter

4.3 Sammenligning av oppgaver sett opp mot bruk av modeller

I denne delen skal vi analysere og sammenligne besvarelsene elevene har gjort knyttet opp mot modellene som er brukt i oppgavene. Alle aspektene kan representeres ved bruk av flere av modellene, og inndelingen i dette delkapitlet er derfor basert på andre kriterier enn i forrige delkapittel. Vårt oppgavesett inneholder fire forskjellige modeller: arealmodellen, mengdemodellen, tallinje og rene symboler. Modellene har vi brukt som støtte for elevene i oppgavene. Modellene brukes som støtte på to måter. Den ene måten er for å gi visuell støtte til tolkning av de abstrakte matematiske ideene og begrepene. Den andre måten er for at elevene skal kunne ha en visuell støtte når de løser problemene knyttet til brøk. Tabell 16 viser hvordan de ulike oppgavene fordeler seg på de ulike modellene.

Type modell	Oppgaver
Arealmodell	2, 3, 5, 6, 8 og 9
Mengdemodellen	4 og 11
Tallinje	1 og 7
Rene symboler	10

Tabell 16, modeller og oppgaver

Som Tabell 16 viser brukes arealmodellen i 6 av 11 oppgaver. Det er to oppgaver med mengdemodell og to med bruk av tallinje. Vi har også kun én oppgave som støtter seg på symboler, nemlig oppgave 10 (Figur 3). Videre har vi sett på antallet elever som har svart riktig på oppgavene innenfor hver kategori. Tabell 17 viser gjennomsnittet for hvor mange elever som har svart riktig på oppgavene knyttet til de ulike modellen. Her ser vi at gjennomsnittet for arealmodellen er noe høyere enn gjennomsnittet for tallinjemodellen og mengdemodellen. De to siste modellene har et gjennomsnitt som kun skilles av 0,1. Med tanke på at begge disse modellene kun brukes i to oppgaver hver, tilsier dette at de i denne undersøkelsen stilles ganske likt. Gjennomsnittet for rene symboler, som er på 2, er det klart laveste.

Type modell	Gjennomsnitt
Arealmodell	8,1
Tallinjemodell	5,7
Mengdemodell	5,8
Rene symboler	2

Tabell 17, gjennomsnitt for modellene

Type modell	Oppnådd poeng	Maks poeng	%
Arealmodell	81	198	40,91
Mengdemodell	29	72	40,28
Tallinje	23	72	31,94
Rene symboler	2	18	11,11
Totalt	135	360	37,50

Tabell 18, prosentvis differanse mellom modellene

Både tallinjemodellen, mengdemodellen og spesielt rene symboler blir brukt i relativt få oppgaver sammenlignet med arealmodellen. Derfor vil vi også se hvordan antallet riktige svar fordeler seg hvis vi ser på hvor mange prosent av maksimalt mulige svar elevene har fått i oppgavene knyttet til de ulike modellene. I Tabell 18 ser vi kolonnen *maks poeng* som tilsvarer den totale poengsummen dersom alle elevene hadde svart riktig på alle deloppgavene knyttet til de ulike modellene, og *oppnådde poeng* tilsvarer den faktiske poengskåren oppgavene fikk. I Tabell 18 ser vi at det er liten forskjell på den prosentvise poengskåren til oppgaver tilknyttet arealmodell (40,91%) og mengdemodell (40,28%). Forskjellen mellom disse er bare på 0,63%. Forskjellen er større når vi sammenligner med prosentvis poengskår til tallinje (31,94%) og rene symboler (11,11%). I Diagram 3 ser vi hvor liten differansen mellom mengdemodell og arealmodell er, men vi ser også den tydelige forskjellen fra rene symboler og opp til de andre modellene.

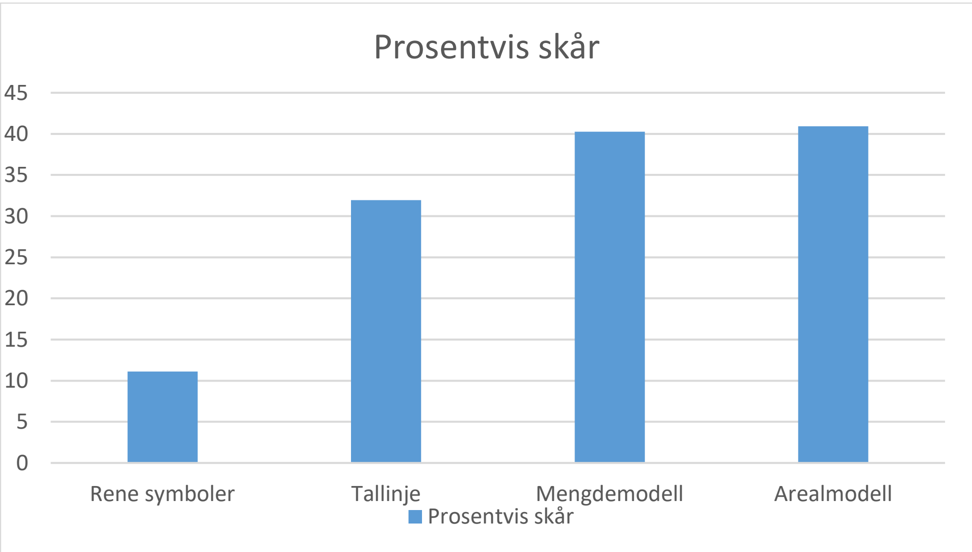


Diagram 3, prosentvis skår

	Visualisert ved halvering	Visualisert ved tredeling	Ikke visualisert	Til sammen
Svart 2/6 eller en tilsvarende brøk	1	3	2	6
Oppgitt et annet svar	4	2	2	8
Ikke svart på oppgaven	2	-	2	4
Til sammen	7	5	6	18

Tabell 19, fordeling av svar til oppgave 5

I besvarelsene kan vi se at elevene har brukt modellene i noen av oppgavene, som ved oppgave 5 og 9 (Figur 10 og 11). I oppgave 5 ble det brukt en illustrasjon av pizzaene, to tomme sirkler, som elevene kunne støtte seg på. Av 18 elever var det 12 som hadde brukt sirklene til å visualisere oppdelingen. 7 av disse 12 hadde brukt halvering når de skulle dele opp, og endte opp med pizzaer delt inn i 4, 8 eller 16 deler. Av disse 7 igjen var det en som endte opp med svaret 2/6. De resterende 5 som visualiserte oppdelingen i modellen, hadde delt sirklene inn i tredeler. Av disse var det tre som hadde skrevet $\frac{2}{6}$ eller andre ekvivalente brøker. Det var fire elever som ikke svarte på oppgave 5. Av disse hadde to prøvd å visualisere oppdelingen av pizzaene, begge hadde prøvd en halveringsstrategi som beskrevet over. Av de elevene som svarte $\frac{2}{6}$ eller en ekvivalent brøk, var det to som tilsynelatende ikke har visualisert oppdelingen av pizzaene.

I oppgave 7 (Figur 8) oppfordrer oppgaveteksten til at elevene skulle bruke tallinja som støtte når de skulle legge sammen to brøker. Også her ser vi tegn til at flere av elevene har forsøkt å benytte seg av modellen ved utregningen og plassert svarene på tallinja. I Tabell 20 ser vi at 10 av 18 elever gjør markeringer på tallinja i oppgave 7A, mens 7 elever gjør det samme i oppgave 7B. I begge oppgavene er det 2 elever som markerer tallinja med desimaltall, og en som markerer med heltall i oppgave 7A. I oppgave 7A er det tre elever som har svart riktig uten å bruke tallinja, mens én elev har regnet riktig, men markert feil på tallinja. I motsetning er det to elever som har regnet feil, men klart å plassere dette tallet riktig på tallinja i oppgave 7A og en som har gjort det samme i 7B. En av elevene skiller seg ut. Hen oppgir feil brøk på regnestykket både på A og B, men markerer riktig sted på tallinja på begge to. Ved intervju kan hen fortelle hvordan hen har brukt en strategi som tar for seg målingsaspektet. Hen forteller om 7B at hen først lokaliserer $\frac{1}{2}$ på tallinja som halvveis mellom 0 og 1. Så vet hen at $\frac{1}{4}$ er halvparten av det igjen, og finner dermed halvveis mellom $\frac{1}{4}$ og 1, som hen markerer som svaret. Dette er riktig. Når vi stiller spørsmål ved den skriftlige oppgitte brøken, $\frac{2}{6}$, forklarer hen at hen fant dette svaret ved å legge sammen tellerne og nevnerne. Det er tilsynelatende ingen sammenheng mellom de to forskjellige svarene og modellene for denne eleven, og vi oppfatter ikke at hen synes det er problematisk at hen har oppgitt to forskjellige svar. Vår oppfatning er at av de 18 elevene, er det 5 som viser at de kan bruke tallinje i oppgave 7A og to som viser det samme i oppgave 7B. Å bruke tallinje vurderer vi som at eleven klarer å bruke tallinja til å komme frem til riktig svar, som eleven i intervjuet, eller at det er samsvar mellom elevens svar og plasseringen på tallinja (selv om svaret er feil). På oppgave 7A har to av de fem som bruker tallinja kommet frem til feil svar, men plassert dette svaret riktig. I oppgave 7B har en av to som bruker tallinja gjort det samme.

	7A	7B
Desimaltall	2	2
Hele tall	1	-
Regnet riktig, plassert svaret riktig	2	-
Regnet riktig, plassert svaret feil	1	-
Regnet feil, plassert svaret riktig	2	1
Regnet feil, plassert svaret feil	1	3
Markert riktig på tallinja, men kommet frem til et annet svar	1	1
Ikke brukt tallinja, feil svar	5	11
Ikke brukt tallinja, riktig svar	3	-

Tabell 20, svar på oppgave 7

Oppgave 10 (Figur 3) er en oppgave som skiller seg ut i dette oppgavesettet, da dette er den eneste oppgaven som kun bruker rene symboler og ikke støtter seg på en annen modell. Dette er en oppgave hvor kun to elever har svart riktig. Av Tabell 6 ser vi at dette er to av de tre elevene som skårer høyest sammenlagt. Vi intervjuet flere av elevene om denne oppgaven, og det som går igjen er at de beskriver usikkerhet i møte med oppgaven. En elev forteller at hen ikke forstår hva oppgaven mener med større enn $\frac{5}{6}$ og mindre enn 1, og derfor velger å se bort fra den oppgitte brøken og kun fokusere på delen av oppgaven som sier mindre enn 1. Denne eleven har svart på oppgaven med brøken $\frac{1}{2}$. En annen elev vi intervjuet har svart $\frac{6}{6}$ på oppgaven. Når vi spør om dette forteller også denne eleven at hen opplevde forvirring, for det som er større enn $\frac{5}{6}$ er $\frac{6}{6}$ og eleven er litt usikker på om det kanskje er det samme som 1. Når vi stiller oppfølgingsspørsmål til dette og utfordrer eleven, sier hen noe om "delen som mangler for å nå 1". Dette følger vi opp og utfordrer eleven videre, hvor eleven kommer frem til svaret $\frac{7}{8}$. Dette er det også en annen elev som har svart skriftlig. Når vi i intervjuet spør hvorfor $\frac{7}{8}$ er større enn $\frac{5}{6}$, men mindre enn 1, svarer eleven at det er fordi tallene 7 og 8 er større enn 5 og 6. Under viser Tabell 21 de ulike svarene elevene har gitt på denne oppgaven.

6/6	5,5/6	3/4	0/6	7/8	1/2	5/7	1/6	1/4	Ikke svart
3	1	1	3	1	1	2	1	1	4

Tabell 21, svar på oppgave 10

Det ble gjort noen observasjoner underveis når deltakerne gjennomførte oppgavene. Flere av elevene kikket mye frem og tilbake på oppgaver. Det ble lagt merke til at når noen av elevene var på oppgave 7, så kikket de tilbake på oppgave 1 (Figur 5 og 9). Dette kan være på bakgrunn av at begge oppgavene inneholdt tallinje som en representasjon. Vi ser at i Tabell 5 er det 12 deltakere som har svart riktig på 1A, hvor 4 av disse også svarte riktig på 1B. På oppgave 7A (Figur 8) var det kun 6 elever som hadde svart riktig, og ingen på 7B (Figur 8). Forskjellen på disse oppgavene er at det i oppgave 7 også er regnestykker som går sammen med tallinjen, mens det i oppgave 1 skal plasseres punkter på tallinja uten å regne seg fram til et svar. Ved at de kikket tilbake til oppgave 1, blir det lett å tenke at det er fordi mange var trygge på sine svar på denne oppgaven og skulle se om det kunne hjelpe i oppgave 7. Andre oppgaver det ble lagt merke til at flere sammenlignet var oppgave 3, 5 og 8 (Figur 13, 10 og 2), hvor alle inneholder arealmodellen. Det er tre oppgaver som kan sammenlignes på bakgrunn av modellene, og at de oppgavene kan brukes som en slags støtte for hverandre. På oppgave 3 var det en betydelig andel deltakere som svarte riktig på en eller flere. 9 stykker svarte rett på oppgave 3C som er delt opp i 3, noe oppgave 5 også legger opp til.

4.4 Oppgavene sett opp mot kompetansemålene

Det er, som nevnt i teorikapitlet, seks kompetansemål i læreplanen for matematikk på 5.trinn som omhandler brøk. I dette underkapitlet skal vi gjennomgå dem, samtidig som vi analyserer svarene fra de oppgavene som vi knytter til hvert kompetansemål. Det kompetansemålet vi ikke gjennomgår her er at elevene skal kunne *formulere og løse problemer fra egen hverdag som har med brøk å gjøre* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). Kompetansemålets formulering gjør at det vanskelig kan testes gjennom en gitt oppgave i et oppgavesett. Derfor kommer vi heller til å diskutere dette kompetansemålet opp mot funnene samlet i diskusjonen.

Et av kompetansemålene er at elevene skal kunne *beskrive brøk som del av en hel, del av en mengde og som et tall på tallinja og vurdere og navngi disse størrelsene* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Kompetansemålet tar blant annet for seg elevenes evne til å navngi størrelser i de tre modellene for brøk. I tillegg til at det i kompetansemålet nevnes spesifikt at elevene skal lære seg å beskrive brøk som del av en hel, skal elevene også vurdere og navngi størrelser. Dermed anser vi at kompetansemålet i stor grad også omfatter aspektene del av en hel og brøk som mål. Vi har tidligere analysert oppgaver opp mot disse to aspektene og modellene tidligere. Et annet kompetansemål er at elevene skal kunne *representere brøk på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonene* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Dette kompetansemålet tar for seg ulike måter å representere brøk, blant annet ved bruk av modeller og symboler, noe vi har analysert i forrige delkapittel. Når vi ser på det vi har analysert tidligere i lys av disse to kompetansemålene, ser vi at det er varierende hvordan elevene gjør det på oppgavene. I noen oppgaver viser et flertall av elevene at de mestrer å navngi størrelser i både areal-, mengde- og lengemodell som brøk. Samtidig er det ingen elever som svarer riktig på oppgave 6, hvor de skal finne figurene som angir størrelsen $\frac{3}{4}$ (Figur 4 og Tabell 9). I oppgave 1B (Figur 5) er det 5 elever som klarer å plassere 1 med utgangspunkt i den gitte lengden $\frac{1}{3}$. Vi har også sett antydninger til at elevene har utfordringer med å oversette mellom ulike representasjoner. Dette kommer frem når vi diskuterer elevenes bruk av modeller i oppgave 5 og 7 (Figur 10 og 8). I resultatene fra oppgave 5 ser vi at det er flere av elevene som deler opp riktig i pizzamodellen, men som ikke skriver riktig når de skal bruke rene symboler. Det samme ser vi i oppgave 7. Her velger flere av elevene å ikke plassere svaret sitt på tallinja. Det er også bare fire elever som klarer å oversette riktig mellom plasseringen på tallinja og de rene symbolske svarene på oppgave 7A. Vi sier fire og ikke fem, fordi selv om den femte eleven klarer å bruke tallinja som verktøy til å regne, ser hen ikke hvordan dette kobler seg opp mot de rene symbolene i regnestykket under tallinja.

Det tredje kompetansemålet er at elevene *skal kunne utforske og forklare sammenhenger mellom brøker, desimaltall og prosent og bruke det i hoderegning* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). I oppgave 2 (Figur 6) skal elevene angi en mengde både i brøk, prosent og som desimaltall. Denne oppgaven svarer dermed i stor grad til kompetansemålet som vi har trukket frem her.

Oppgave	Riktig	Feil	Ikke svart
2 Brøk	14	2	2
2 Prosent	5	4	9
2 Desimaltall	4	2	12

Tabell 22, svar på oppgave 2

Tabell 22 viser en oversikt over hvordan elevene har svart på denne oppgaven. Her er det hele 14 som har angitt den fargelagte andelen riktig i brøk. Andelen som har gjort det samme på prosent og desimaltall er betydelig færre. På delen med prosent har halvparten av elevene ikke besvart oppgaven, og det er $\frac{2}{3}$ av elevene som ikke har svart på delen med desimaltall. Når vi så hvordan elevene hadde svart på denne oppgaven, så vi at det var kun to elever som ikke hadde svart på brøkdelen av oppgave 2. I Tabell 23 viser kryss til at elevene har svart riktig på denne delen av oppgaven. Det vi så var at elevene som ikke besvarte denne oppgaven, også er elever som ikke hadde noen rette svar på de andre oppgavene. Det er hele 14 elever som har svart riktig på brøkdelen, mens fire elever har oppgitt riktig desimaltall og fem elever har oppgitt riktig prosent. Det er fire elever som har oppgitt feil prosent i denne oppgaven. Disse har to oppgitt at $\frac{1}{10}$ tilsvarer 0,1 i desimaltall og 1%. Alle elevene som har svart riktig på enten prosent eller desimaltall, har også svart riktig på brøk. Det er seks elever som har mer enn to riktige, og tre elever som har svart riktig på alle tre. Ingen av elevene som ligger under gjennomsnittet har svart riktig på desimaltall eller prosent (Tabell 7).

Deltakere	Brøk	Desimaltall	Prosent
01	x	-	-
02	x	-	-
03	x	-	-
04	x	-	x
05	x	-	-
06	x	-	x
07	x	-	-
08	x	-	-
09	-	-	-
10	x	x	x
11	x	x	-
12	-	-	-
13	x	x	x
14	-	-	-
15	-	-	-
16	x	-	-
17	x	-	-
18	x	x	x

Tabell 23, oversikt over besvarelser oppgave 2

Det fjerde kompetansemålet som omhandler brøk, er at elevene *skal utvikle og bruke ulike strategier for regning med positive tall og brøk og forklare tenkemåtene sine* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). I oppgavesettet vårt er det spesielt oppgave 7 (Figur 8) og 9 (Figur 11) som tar for seg regning med brøk. I oppgave 7 skal elevene addere brøk med lik og ulik nevner ved hjelp av en tallinje. Begge oppgavene er hentet fra oppgaver fra Multi 5. I oppgave 9 skal elevene finne $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{4}$ ved hjel av en arealmodell. Denne oppgaven har vi funnet gjennom diskusjon med veilederne våre. Når vi ser på hvordan elevene har svart på disse oppgavene, ser vi at elevene har hatt utfordringer med dem. Mens $\frac{1}{3}$ av elevene har svart riktig på oppgave 7A, er det ingen som har svart riktig på oppgave 7B og oppgave 9 (Tabell 5). I begge oppgavene oppfordres elevene til å bruke modellene som støtte til utregningen, men vi har tidligere tolket det dit at majoriteten av elevene ikke vet hvordan de kan gjøre dette. En av elevene legger sammen $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ korrekt på tallinja, men klarer ikke å overføre dette til riktig ren symbolsk notasjon. Vi har tidligere analysert oppgave 9 i kapittel 4.2.4, og skal derfor se på oppgave 7 videre. I Tabell 24 kan vi se hvilke svar elevene har gitt til oppgave 7A og 7B. I oppgave 7A ser vi at 6 elever har svart riktig ved å addere tellerne og beholde nevnerne. Det er også 6 elever som har besvart oppgaven ved å addere både teller og nevner. I oppgave 7B er det hele 8 som har valgt strategien med å addere teller og nevner. Det er to elever som har svart 8 og det kan se ut som at de har lagt sammen alle sifrene i regnestykket (1+2+1+4). De resterende 5 besvarelsene har ulike svar.

7A	8/8	7/10	7/5	9/5	0,9	17	4/9 3/8	Ikke svart
Antall	1	6	6	1	1	1	1	1
7B	1/5	2/6	1/6	0,8	8	1/5 1/3	2/4	Ikke svart
Antall	1	8	1	1	2	1	1	3

Tabell 24, svar til oppgave 7

Det siste kompetansemålet vi skal se på opp mot resultatene fra undersøkelsen, handler om at elevene skal kunne *diskutere tilfeldighet og sannsynlighet i spill og praktiske situasjoner og knytte det til brøk* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). Sannsynlighet knyttet til brøk er noe elevene møter i oppgave 8 (Figur 2). Oppgave 8A og 8B er blant oppgavene med en relativ høy andel riktige svar (12 og 14). Tabell 7 viser at alle elevene som ligger over snittet har svart riktig på oppgave 8A, mens 9 av 10 har svart riktig på oppgave B. For elevene som har en poengskår under snittet har 4 av 8 svart riktig på 8A og 3 av 8 på 8B.

4.5 Elevenes fremtoning/utsagn gjennom observasjon og i intervju

Det blir viktig for oss å dokumentere litt av det vi så og hørte i prosessen med å samle inn data. I forkant av økten hvor de skulle besvare oppgavesettet vårt, var det flere elever som viste en tydelig negativ holdning. Flere av elevene sukket og sank litt ned i stolen. Erfaringsmessig er dette noe som går litt igjen når det skal arbeides med brøk. Det kan virke som at flere elever har en forutinntatt tanke om at brøk er noe de ikke får til. Noen av elevene bladde fort igjennom oppgavene, hvor vi opplevde at de ikke gav oppgavene et reelt forsøk. Enkelte av elevene brukte god tid og så nøye over oppgavene, mens det var noen som brukte veldig kort tid. Da de fikk tilbud om å se igjennom en gang til, var ikke det noe de ønsket. «De kunne ikke svaret uansett.» Det er interessant å observere det vi opplever som negative oppfatninger om egen brøkkompetanse. Det ble videre observert at noen av elevene brukte en strategi hvor de telte antall deler før de skrev nevner. Dette var det flere elever som gjorde i oppgavene hvor det ble brukt arealmodeller. Dette så vi blant annet i oppgave 6 (Figur 4), hvor de virket mer opptatt av antall deler fremfor størrelsen på bitene.

Underveis i intervjuene var det flere av deltakerne som, ut ifra vårt perspektiv, var veldig usikre i hva de hadde gjort. Deltaker 01 forklarte seg med at “Ehm, jeg har vært ganske mye syk når vi har lært om brøk på skolen, så jeg synes det har vært litt vanskelig”. Dette kan så klart stemme, men vi tenkte at det er uheldig at denne eleven følte for å forklare hvorfor det ikke var like lett å svare på de spørsmålene vi stilte. En annen deltaker, 06, sa “jeg har ikke lært så veldig mye om brøk”. Med utgangspunkt i LK20, skal elevene i 5. trinn få undervisningen som er nødvendig for å oppnå kompetansemålene knyttet til brøk. Elever som går på 6. trinn skal derfor, i teorien, inneha disse kompetansene. Uansett kommer det fram gjennom intervjuene at det var mye usikkerhet knyttet til brøkregning. Det var ikke alle som var sikre i sine forklaringer av hva de hadde tenkt, noe en ser gjennom transkripsjonene i Vedlegg 5. Det ble brukt mye tenkeord som for eksempel «ehm». Dette sa flere av deltakerne opptil flere ganger, og det er vanskelig å vite om det var for å gi seg selv tenketid eller om det var en usikkerhet rundt det som ble diskutert. Det var flere av deltakerne vi intervjuet som gav uttrykk for at de var usikre på hva de egentlig hadde tenkt, og ikke helt klarte å forklare oss det. Vi ble oppmerksomme på at det var mye som var usikkert, og selv om de hadde svart riktig på noen oppgaver var det fremdeles ikke enkelt for alle å forklare hva de hadde gjort. En av deltakerne var derimot veldig selvsikker, og forklarte godt hvordan hen hadde tenkt. Vi bemerket dette som interessant og veldig spennende å høre på, fordi selv om svarene ikke nødvendigvis var riktig, var det mye selvsikkerhet i forklaringene på hva som var tenkt.

5.0 Diskusjon

Formålet med denne studien er å se på hvilken forståelse elever i sjette klasse har for brøkbegrepet. I denne delen skal vi diskutere de funnene vi har gjort i analysen opp mot problemstillingen vår:

Hvilke aspekter ved brøk kan vi identifisere at elever på 6.trinn har forståelse for?

Det vil vi blant annet gjøre gjennom å diskutere forskningsspørsmålene våre:

- Har elevene forståelse for de ulike representasjonene knyttet til brøkbegrepet?
- Har elevene oppnådd kompetansemålene som omhandler brøk på 5.trinn?

Det første delkapittelet ser på elevenes forståelse av de ulike aspektene innenfor brøk. Vi har samtidig sett etter tegn til hvilken type forståelse elevene har. I neste delkapittel har vi knyttet funn opp til kompetansemålene i LK20. Det første og andre delkapittelet vil også inkludere en diskusjon om hvilken forståelse elevene har til de ulike representasjonene knyttet til brøkbegrepet. Dette er fordi forståelse av representasjonene knytter seg tett opp til forståelse av aspektene i henhold til sosiokonstruktivistisk teori, og opp mot oppnåelse av kompetansemålene i henhold til LK20. I tredje delkapittel vil vi diskutere innføringen av LK20 og dybdelæringen i lys av våre funn, før vi ser på implikasjoner for brøkundervisning. Til slutt vil vi evaluere vår forskningsmetode.

5.1 Har elevene forståelse for aspektene ved brøkbegrepet?

I vår studie undersøker vi elevers forståelse for brøkbegrepet. Brøkbegrepet består av fem aspekter; del av hel, måling, kvotient, operator og forhold. For at elevene skal kunne ha en god forståelse av brøkbegrepet, må elevene ha forståelse for flere av aspektene (Lamon, 2020, s. 32). I metodedelen beskrev vi hvordan oppgavesettet vårt ble designet for å få frem hvilke aspekter elevene har forståelse for, men også hvilken type forståelse de eventuelt har. I analysen har vi sett på hvordan elevene svarer på oppgavene som vi har koblet til hvert av disse aspektene.

I forkant av studien hadde vi noen hypoteser om det vi kom til å finne. Vi mistenkte at flere elever ville mangle forståelse for flere av aspektene, i henhold til tidligere forskning (Lamon, 2020, s. 31). Men vi forventet også å finne at aspektet del av hel er det aspektet som flertallet mestret best. Dette forventet vi på bakgrunn av aspektets hyppige bruk i undervisningen (Lamon, 2020, s. 31-32). De funnene vi har gjort tyder på at det er aspektet del av hel som elevene i studien har best kjennskap til. Vi ser i analysen at gjennomsnittet for antall riktige svar innenfor dette aspektet, er høyere enn for de andre aspektene. Dermed samsvarer våre funn både med vår hypotese og med teorien på dette punktet. Samtidig kan noen av funnene tyde på at elevene har misoppfatninger knyttet til aspektet del av en hel. En sentral idé ved dette aspektet, er forståelsen om at alle delene i en figur må være like store (Lamon, 2020, s. 153). Resultatene fra undersøkelsen kan tyde på at elevene ikke har forståelse for denne sentrale ideen. I analysen kommer det frem, gjennom oppgave 6 (Figur 4) og intervju, at flere av elevene bare vurderte antallet og ikke størrelsene av delene til figuren. Dette er til tross for at oppgaver hvor elevene skal angi andel av en hel som brøk, er oppgaver som kommer hyppig i læreverket som er brukt (Alseth, Arnås & Røsseland, 2020). Om mange av modellene som elevene møter er oppdelt på forhånd, kan det være at elevene ikke blir bevisstgjort betydningen av at delene må være like store (Matematikksenteret, u.å., Enge & Valenta, 2013, s. 11). Det er mulig at elevene har utviklet en slags «universaloppskrift» i møte med denne typen oppgaver. Først teller de hvor mange deler figuren er delt inn i, så hvor mange som er fargelagt. Det ene tallet skal skrives over brøkstreken, det andre under. Om dette gjøres mekanisk uten en forståelse for hvorfor, tilsvarer det en instrumentell forståelse (Skemp, 1976). I de tilfellene hvor figurene på forhånd er delt i like store deler, vil det være én framgangsmåte som gir et riktig svar. Likevel viser det til en manglende relasjonell forståelse av brøk som en del av en hel. En slik fremgangsmåte lar seg heller ikke overføre til nye situasjoner, som vist i oppgave 6. Dette gjør at vi stiller oss litt spørrende til hvordan vi skal vurdere resultatene. Funnene indikerer at flertallet av elevene har forståelse for del av en hel-aspektet. Samtidig ser vi antydninger til en instrumentell forståelse.

Når vi ser på hvordan elevene har svart på oppgaver knyttet til de andre aspektene, ser vi en tydelig forskjell sammenlignet med del av hel-aspektet. Resultatene viser at det ikke er noen av elevene som svarer riktig på oppgavene knyttet til aspektene divisjon og operator. Det er uklart hva årsaken til dette kan være, og en mulighet er at oppgavetypene er ukjent for elevene. I oppgaven som tar for seg operatoraspektet (Figur 11), viser elevene gjennom tegning og intervju at de ikke forstår hva «$\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{4}$» betyr. Det er mulig at valget av en annen representasjon, gjennom tilføring av en kontekst, ville gitt andre resultater. Et eksempel kunne vært: «Det er $\frac{1}{4}$ igjen av kaken til Karl. Han spiser $\frac{1}{3}$ av dette. Hvor mye av den hele kaken spiser Karl?» På en annen side vil mer tekst kunne gjort oppgaven mer krevende for elever med lese- eller språkvansker. I tillegg vil en viktig del av utviklingen av begrepsforståelse være å koble flere representasjoner opp til en matematisk idé (Stengrundet & Valbekmo, 2019, s. 3).

Når det gjelder oppgaven som tar for seg aspektet brøk som divisjon (Figur 10), viser funnene at ingen av elevene har svart riktig på denne oppgaven. Likevel kan vi ikke automatisk konkludere med at forståelsen for aspektet er fraværende. Fem av elevene har delt inn riktig i pizzamodellene. Seks av elevene viser også at de vet hvor mange av disse stykkene hver av jentene skal få. Men vi får inntrykk av at elevene har utfordringer med å vurdere hva som er det hele. Vi anser en hel som én pizza, mens samtlige av elevene har tenkt på begge pizzaene som en hel. En av utfordringene som elevene møter på når de går fra hele tall til brøk, er nettopp å anslå hva som er enheten fordi den kan variere (Lamon, 2020, s. 20-22). Hadde spørsmålet vært hvor mye av måltidet hver av jentene fikk, ville svaret $\frac{2}{6}$ vært riktig, slik vi ser noen av elevene har svart. Noe annet vi opplever at elevene strever med er hvordan de skal oppgi svaret sitt som brøk. Selv om flere av elevene har delt modellpizzaene opp riktig, er det store variasjoner i hvordan de uttrykker dette rent symbolsk. En viktig del ved aspektet brøk som kvotient, er at elevene viser forståelse for at svaret på et delestykke kan være en brøk (Flores et al., 2006, s. 35). Vi vil argumentere for at resultatet av denne oppgaven tyder på at å oppgi brøk som svar på et delestykke ikke er en utfordring for elevene i denne konteksten, selv om de fleste av elevene ikke klarer å dele inn pizzaene riktig. Vår oppfatning er at problemene heller oppstår når elevene skal vurdere hva som er det hele og koble svaret opp mot symbolske representasjoner.

Et annet poeng med operator- og kvotientaspektet, er at oppgavesettet vårt kun inneholdt en oppgave til hver av dem. Dersom det hadde vært flere oppgaver, kan det hende at resultatene hadde vært annerledes. Å kun ha én oppgave gir i utgangspunktet elevene et smalt område for å kunne vise kunnskaper om disse aspektene.

I oppgavene knyttet til aspektene måling og forhold, ser vi en variasjon i antall elever som svarer riktig. Gjennomsnittet av riktige svar for begge aspektene er mindre enn for aspektet del av en hel. Elevene har prestert best på oppgaver knyttet til forholdsaspektet. I noen tilfeller svarer et stort flertall av elevene riktig. Dette kan handle om at elevene har møtt likende oppgaver tidligere. Men de oppgavene det er snakk om kan også løses gjennom en del av en hel forståelse, noe vi tidligere har fått inntrykk av at elevene har mer erfaring med. I andre oppgaver har ingen elever svart riktig. Dersom vi tar for oss målingsaspektet har vi vurdert deloppgave 7B (Figur 8) som en deloppgave som faller inn under dette aspektet. Dette er en deloppgave som ingen av elevene har svart riktig på. Oppgave 7 skiller seg ut i forhold til de andre, da den tar for seg regning med brøk. Derfor vil vi ta opp igjen oppgaven når vi diskuterer det vi har funnet opp mot de kompetansemålene elevene møtte i 5. trinn. Men samtidig viser forskning at forståelsen for at brøk er et tall viktig for regning med brøk (Kerslake, 1986, s. 107), og målingsaspektet er igjen viktig for å oppnå nettopp denne forståelsen (Lamon, 2020, s 220, 224). Selv om regning med brøk vil være mer krevende for elevene (Kerslake, 1986, s. 53), vil vi likevel diskutere oppgaven her opp mot elevenes forståelse av målingsaspektet. En måte å løse oppgave 7 på er ved å måle opp den første brøken og så legge til måling av den andre brøken. Og det er nettopp denne fremgangsmåten en av elevene beskriver i intervju at hen har brukt for å markere riktig svar på tallinja i oppgave 7B, selv om dette ikke resulterer i at eleven oppgir riktig brøk. Uten å intervjue alle elvene om denne oppgaven, kan vi ikke vite med sikkerhet om denne fremgangsmåten er hyppig brukt. Likevel får vi, gjennom analysen av elevenes bruk av tallinje som modell, et inntrykk av at mange av elevene har valgt en annen fremgangsmåte. Oppgave 1B er en annen oppgave hvor målingsaspektet kommer tydelig frem. Her er det åtte elever som har markert innenfor det området som vi har definert som riktig, men gjennom intervju kom det frem at minst en av disse er en falsk riktig. Denne eleven plasserer 1 riktig, men med bakgrunn i misoppfatninger om hva $\frac{1}{3}$ representerer. Men minst en annen elev viser tydelig at hen bruker målingsaspektet til å svare på oppgaven, når det blir observert at hen bruker linjal for å måle opp den nøyaktige plasseringen av 1. Ut fra våre resultater ser vi at det er variasjoner i antall riktige svar, både mellom elevene og oppgavene. Det at nesten halvparten av elevene klarer å plassere 1 riktig i oppgave 1B, viser at en del av elevene har forståelse for målingsaspektet når oppgaveteksten spesifikt spør etter dette. Samtidig kan funnene fra oppgave 7 tyde på at de fleste elevene ikke bruker målingsaspektet i oppgaver som ikke ber om det, men også at minst én av elevene bruker målingsaspektet aktivt for å komme frem til en løsning ved regning av brøk.

Hvis vi retter fokuset tilbake mot forholdsaspektet, ser vi at oppgave 4B (Figur 12) er en oppgave som ingen av elevene har svart riktig på. Det kan være flere grunner til dette. En årsak kan være at elevene anser oppgaven som ferdig besvart når de har angitt eplene som brøk i oppgave 4A, og dermed ikke forstår hva mer det spørres om i neste deloppgave. I tillegg virker det som at språket som brukes er til hinder for elevene når de skal løse oppgaven. Vi kunne brukt et annet ord slik at flere elever forsto oppgaven. Samtidig er språket en sentral del av læringen i henhold til sosiokonstruktivistisk teori. Det er ikke bare viktig at elevene utvikler forståelse for matematiske ideer, men også at de utvikler et språk de kan bruke i kommunikasjon og som verktøy for tanken (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 4-5, Stengrundet & Valbekmo, 2019, s. 3, Vygotsky, 1978, s. 23). Gjennom å bruke begrepet forhold, fikk vi undersøkt elevenes kjennskap til dette ordet. På den andre siden kan det være elevene har forståelse for den matematiske ideen forhold, men ikke knytter den til den verbale representasjonen «forhold». Oppgaven som flest elever har svart riktig på (Oppgave 3A), har vi vurdert som tilhørende aspektet forhold. Samtidig diskuterte vi tidligere i dette delkapitlet om elevene har utviklet en instrumentell forståelse i møte med oppgaver av denne typen. Dette er et argument vi gjør fordi selv om mange elever svarer riktig på oppgave 3 (Figur 13), er det kun to elever som velger figur D i oppgave 6. Argumentet elevene kommer med for at figur D ikke er riktig, er at de skal finne en figur med fire deler og figur D har åtte. Forståelsen de viser i oppgave 3, overføres med andre ord ikke til oppgave 6.

Vi har så langt sett på og diskutert våre funn knyttet opp til de fem aspektene av brøkbegrepet hver for seg. Som vi ser i Tabell 5, er det store forskjeller mellom elevene når det kommer til forståelse av brøk. I denne studien velger vi likevel å se på elevene som en samlet, for å få et mer helhetlig inntrykk av hvor elevene som en gruppe ligger. Det funnene antyder, er at elevene mangler forståelse for flere av aspektene. Det er likevel noen aspekter som elevene viser mer forståelse for, for eksempel del av en hel. Likevel ser vi også her at denne forståelsen i noen tilfeller kommer frem som instrumentell og preget av misoppfatninger. Brøkbegrepet er sammensatt og komplisert for barn (Van de Walle et al., 2015, s. 264, Steefland, 1991, s. 6). Det å kun ha forståelse for noen få av aspektene, sånn som elevene i denne undersøkelsen viser, gir det et smalt grunnlag for å få en god forståelse av brøkbegrepet i sin helhet i henhold til tidligere forskning (Lamon, 2020, s. 32). Ser vi på våre funn som en helhet, antyder de derfor at flertallet av elevene mangler en grunnleggende forståelse for brøkbegrepet. Når vi ser på brøkens betydning i algebra og den generelle matematiske utviklingen, er dette problematisk (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012).

5.2 Har elevene oppnådd kompetansemålene som omhandler brøk på 5.trinn?

Læreplanen sier noe om hva en kan forvente at elevene skal sitte igjen med av kompetanse etter de ulike trinnene i opplæringen (Blikstad-Balas, 2021). Derfor så vi viktigheten i å vurdere elevenes oppnåelse av kompetansemålene knyttet til brøk. Dette har vi gjort gjennom forskningsspørsmålet *Har elevene nådd kompetansemålene som omhandler brøk på 5.trinn?* Ludvigsenutvalget mente at læreplanene burde formes på en måte som bidro til at elevene kunne gå i dybden på noen temaer, på bakgrunn av at det tar tid å utvikle forståelse (NOU 2015: 8, s. 12). Vi har i dette delkapittelet vurdert hvert kompetansemål for seg selv, for å på best mulig måte kunne trekke riktige konklusjoner knyttet til denne delen av studien.

Et av kompetansemålene sier at elevene skal kunne «*beskrive brøk som del av en hel, som del av en mengde og som tall på tallinjen og vurdere og navngi størrelsene*.» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Å kunne beskrive brøk som del av en hel, er noe vi diskuterte i forrige delkapittel. Våre funn tyder på at dette er et område innenfor brøk som flere av elevene har kjennskap til. Oppgaver hvor elevene skal navngi størrelse på brøken gjennom arealmodell, mengdemodell og tallinje er oppgaver hvor relativt mange elver svarer riktig. Samtidig beskriver elevene i intervju en instrumentell tilnærming til slike oppgaver, og besvarelsene på oppgave 6 (Figur 4) på at elevene mangler forståelse for den sentrale ideen om at delene i brøken må være like store. Resultatene viser også at elevene har noe mindre forståelsen for måleaspektet ved brøk, som også er til stede i dette kompetansemålet. Oppsummert kan vi si at basert på resultatene kan det tilsynelatende virke som mange har god kontroll på temaet. Samtidig ville det være interessant å se hvordan elevenes besvarelser ville vært i møte med et større og mer variert oppgavesett knyttet til dette kompetansemålet.

Vi kan også se på det vi fant om kompetansemålet over, og knytte det opp mot at elevene også skal kunne «*utforske og forklare sammenhengen mellom brøker, desimaltall og prosent og bruke det i hoderegning*» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Årsaken til at disse kompetansemålene ses i sammenheng her, er vårt valg av modell i oppgaven som tar for seg brøk, desimaltall og prosent (Figur 6). Våre funn tyder på at flertallet av elevene mestrer å finne brøken som arealmodellen i oppgaven illustrerer. Det vi derimot får inntrykk av er at det er vanskeligere å skulle finne desimaltall og prosent i den samme arealmodellen. En viktig del i utviklingen av forståelse av brøk, er ideen om at brøk er et tall. Tallinje kan være med på å fremme dette (Van de Walle et al., 2015, s. 368). Dersom oppgave 2 hadde brukt tallinje som modell fremfor arealmodellen, kan det være at flere av elevene hadde ansett brøken de skulle oppgi som et tall og hatt lettere for å finne tilsvarende desimaltall og prosent. Samtidig ser vi at kompetansemålet ikke er at elevene skal kunne finne et desimaltall og en prosent som tilsvarer en oppgitt brøk, men kunne forklare sammenhengen mellom brøker, desimaltall og prosent. Det å forstå og forklare en slik sammenheng, vil være mer krevende for elever enn kun å lære en prosedyre for å oversette mellom de tre representasjonene (Skemp, 1976, s. 2 & 8-9). En del av denne sammenhengen, er at en kan bruke både brøk, prosent og desimaltall for å angi en mengde og utvide tallsystemet utover de hele tallene. Videre skal elevene kunne bruke sammenhengen mellom prosent, desimaltall og brøk til hoderegning. Dermed vil vi argumentere for at selv om en tallinjemodell kunne ha ført til bedre resultater, skal elever som har oppnådd dette kompetansemålet være i stand til å angi mengder som brøk, prosent og desimaltall uavhengig av hvilken modell som blir brukt. Basert på de funnene vi har gjort i denne studien, tyder mye på at flertallet av elevene ikke har oppnådd dette kompetansemålet.

Videre sier et av kompetansemålene at «*elevene skal kunne representere brøker på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonene*» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). En representasjon kan være tegninger, som bruk av arealmodellen, mengdemodellen eller tallinje (Kilpatick et al., 2001, 95). Men det kan også være bruk av rene symboler, som tall (Enge & Valenta, 2013, s.8). I noen tilfeller viser elevene i denne undersøkelsen at de mestrer å oversette mellom modeller og rene symboler. For eksempel i oppgaver hvor elevene skal finne brøk som samsvarer med arealmodell, mengdemodell og tallinje. I andre situasjoner igjen, ser vi tegn på at elevene strever med å oversette mellom representasjonene. Et eksempel på dette er i oppgave 5 (Figur 10), som vi diskuterte i forrige delkapittel. Det kan se ut som at elevene mestrer oppgaven ved å benytte modellene, men samtidig ser det ut til at flere ikke vet hvordan de skal oversette fra modellene til kun symboler. Dette ser vi også tegn til i oppgave 7 (Figur 8). Vi kan diskutere hvorvidt disse funnene viser til en instrumentell forståelse, som vi har argumentert for tidligere. Samtidig kommer det gjennom elevbesvarelsene og intervju frem en usikkerhet knyttet til den formelle skrivemåten. Flere av elevene forteller eller viser at de i noen av oppgavene ikke vet hvordan de skal tolke symbolene i brøknotasjonen. Dette tyder på at elevene ikke har en god nok forståelse for den formelle skrivemåten for brøk.

Et annet kompetansemål går på at elevene skal kunne «*utvikle og bruke ulike strategier for regning med positive tall og brøk og forklare tenkemåtene sine*» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Våre funn indikerer at elevene har vanskeligheter med å regne med brøk. Keeton (2022) viser til at elever kan ha vanskeligheter med å regne med brøk dersom de har øvd inn standardalgoritmer og ikke forstår regneoperasjonene. I vår studie kan det se ut som at flere av elevene blander algoritmene for addisjon og multiplikasjon av brøk, noe som resulterer i at de regner feil. En viktig del av kompetansemålet, er at elevene skal kunne «utvikle og bruke strategier for regning». I alle oppgavene hvor elevene skulle regne med brøk, ble det lagt ved modeller og oppfordringer til å bruke disse. Det kan være en god strategi å tegne opp situasjonen og bruke modeller ved regning med brøk (Fosnot & Dolk, 2019, s. 93). Vi ser derimot at flere elever ikke bruker modellene som presenteres i oppgavene. På den ene siden kan årsaken være at elevene selv tenker de mestrer regning med brøk og ikke trenger modellene. Samtidig ser vi at flere ikke svarer riktig eller unngår å svare på oppgave 7 og 9 (Figur 8 og 11). Gjennom intervju så vi en antydning til at elevene opplevde forvirring og usikkerhet i møte med dem. Et annet poeng er at flere av elevene har prøvd å benytte seg av modellene, men kommer ikke frem til riktig svar på tross av dette. I oppgave 5 bruker flere av elevene en halveringsstrategi selv om oppgaven etterspør en tredeling av pizzaene. I oppgave 7 er det kun fem elever som viser at de kan bruke tallinja (Tabell 20). I oppgave 9 er det ingen av elevene som prøver å dele opp den markerte fjerdedelen i tre deler. Kanskje kan det være at elevene unngår å bruke modellene fordi de ikke har nok kunnskap til å benytte seg av dem, og ikke anser dem som et godt verktøy. Dersom elevene ikke er vant til å benytte seg av modeller i regning med brøk, kan det være en forklaring på hvorfor flere av elevene unngår å bruke dem i disse oppgavene.

Det nest siste kompetansemålet som vi skal diskutere sier at elevene skal kunne «*diskutere tilfeldigheter og sannsynlighet i spill og praktiske situasjoner og knytte det til brøk*» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). Deloppgavene som tar for seg sannsynlighet er blant oppgavene med høyest antall riktige svar (Tabell 5), og hvor omtrent alle elevene med en poengsum over gjennomsnittet har svart riktig. Funnene fra denne studien indikerer dermed at dette er et kompetansemål hvor flertallet av elevene har nådd målet. Det blir samtidig viktig å nevne at det kun er én av oppgavene som tar for seg sannsynlighet i oppgavesettet vårt. I denne oppgaven benytter vi oss av en ferdig oppdelt arealmodell, og oppgavene kan løses ved å telle antall deler og så antall fargede deler uten å ta hensyn til delenes relative størrelse. Det er mulig at en annen utforming av oppgaven ville gitt andre resultater, som for eksempel om de skulle tenkt seg en situasjon hvor de trakk kuler fra en pose med en mengdemodell. På en annen side så virker det ikke som at bruken av ordet «sannsynlighet» i oppgaveteksten har forvirret elevene, slik som bruken av ordet forhold gjorde i oppgave 4B. Det er derimot mulig at oppgavens utforming har vært så lik standardoppgaven med «hvor stor del av figuren er rød» at de løser denne oppgaven uavhengig av oppgaveteksten. Det kan også være at oppgavens kjente og praktiske utforming fungerer som en støtte når elevene skal forstå betydningen av sannsynlighet i denne konteksten. Vi tenker med dette som grunnlag at dersom en skal få bedre innsikt i elevenes forståelse av sannsynlighet knyttet til brøk, vil det være nødvendig å undersøke dette videre.

Helt til slutt i dette delkapittelet skal vi diskutere det siste kompetansemålet knyttet til brøk. Det er at elevene skal kunne *formulere og løse problemer fra egen hverdag som har med brøk å gjøre* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). For at elevene skal kunne oppnå dette, kreves det blant annet at elevene er i stand til å kjenne igjen situasjon fra egen hverdag hvor de møter brøk. Det er flere områder hvor elevene kan møte på brøk. Det kan knyttes til klokka, oppskrifter og å dele noe (Tucker, 2008, s. 77). Å dele noe samsvarer ofte med kvotientaspektet, mens oppskrifter kan kobles opp mot måleaspektet (Bondø & Tokle, 2018, s. 4). Brøk i hverdagen knytter seg altså til mer enn aspektet del av en hel. For at elevene skal kunne gjenkjenne brøk i disse situasjonene, kreves det en bred forståelse av brøkbegrepet og at elevene gjøres oppmerksomme på hvordan de kan bruke brøkkompetansen hverdagen (Johanning, 2008, s. 281). Vi har så langt diskutert hvilke aspekter vi ser tegn på at elevene har forståelse for, og hvilken type forståelse elevene eventuelt har. Når elevene har en relasjonell forståelse av brøk, vil de lettere kunne overføre kompetansen om brøk til nye situasjoner fordi de ikke bare vet hvordan de skal løse oppgaver, men også hvorfor. Det vi derimot ser er at flere av elevene viser tendenser til å ha en instrumentell forståelse. Elevene viser at de evner å løse noen av oppgavetypene knyttet til brøk, men flere kommer til kort når oppgaven endrer seg noe eller de må forklare hvorfor dette er riktig fremgangsmåte. Situasjoner fra egen hverdag kan ofte se litt annerledes ut enn de oppgavene som elevene blir vant til å møte i en lærebok, selv om prinsippene kan være de samme.

5.3 Dybdelæring av brøk i lys av våre funn

Så langt har vi diskutert hvilken forståelse elevene har av brøkbegrepet, og i hvilken grad våre funn indikerer måloppnåelse av kompetansemålene. I dette delkapitlet skal vi diskutere funnene våre opp mot innføringen av LK20 og dybdelæringen. Begrepet dybdelæring er ikke noe vi bruker i problemstillingen vår, men det har likevel hatt påvirkning på utdanningspolitikken og påvirker derfor også rammene rundt elevenes utvikling av forståelsen for brøk (NOU 2014:7). Når hensikten med dybdelæringen er at det skal føre til varig læring (NOU 2014:7, s. 41), og tiden som tillegges brøkundervisningen etter femtetrinn er minimal (Kunnskapsdepartementet, 2019), blir dette interessant å diskutere opp mot våre funn. Gjennom våre besvarelser har vi fått et lite innblikk i hvilken forståelse og kompetanse elevene har i møte med varierte brøkoppgaver. Kort oppsummert viser våre resultater viser at mange av elevene ikke får til flere av oppgavene i undersøkelsen. Det gir en mistanke om at forståelsen av brøk ikke var så god som forventet etter fullført 5.trinn. Vår tolkning er at elevene har liten forståelse for flere av aspektene knyttet til brøk. I tillegg kan noen av funnene indikere at flere av elevene har en instrumentell tilnærming til oppgavene. Hos mange av elevene ser vi heller ikke tegn til oppnåelse av flere av kompetansemålene som tar for seg brøk. Det er mulig å argumentere for at grunnen til at elevene presterer slik de gjør, er at det er lenge siden de har jobbet med brøkoppgaver, og dersom elevene hadde fått en oppfriskning først kunne vi fått andre resultater. Samtidig er målet med dybdelæringen at elevene skal få en relasjonell forståelse som går dypere og er mer varig (Skemp, 1976, s. 2, 8-

9). Basert på denne tanken skal elever med en relasjonell forståelse for brøk kunne løse brøkoppgaver uten å trenge en repetisjon i forkant.

Våre funn indikerer altså at elevene ikke har god nok brøkforståelse og -kompetanse. Det kan være mange og sammensatte årsaker til dette. Her skal vi likevel begrense oss til å diskutere hvilken betydning dybdelæring kan ha på elevenes læring av brøk. Med utgangspunkt i dybdelæringen vil vi også diskutere om dagens organisering av læreplanen er gunstig for elevenes læring av brøk, eller om det vil være andre mer hensiktsmessige organiseringer. I LK20 er det en faglig konsentrasjon av brøk på 5. trinn. På senere og tidligere trinn blir det lagt langt mindre vekt på brøk. Det er kun ett kompetansemål for brøk knyttet til 6. trinn og 8. trinn, to på 7. trinn, og ingen kompetansemål hvor brøk nevnes spesifikt på 9. og 10. trinn. Målene fra 7. og 8. trinn handler blant annet om regning med brøk (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2-14), mens målet fra 6. trinn er at elevene skal kunne *formulere og løse problemer fra sin egen hverdag som har med desimaltall, brøk og prosent å gjøre, og forklare egne tenkemåter* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). I disse kompetansemålene, vil vi kunne gjenfinne alle fem aspektene ved brøk. For eksempel kan en finne igjen kvotient og operator, aspekter som elevene i denne undersøkelsen har vist lav forståelse for, i kompetansemålet vi siterte over fra 6. trinn. Derfor vil det være en mulighet for elever som viser lav forståelse for disse aspektene å ta igjen dette senere. Samtidig krever det at læreren har en bevissthet både til elevenes forståelse av aspektene, samt aspektenes tilstedeværelse i de ulike kompetansemålene. I mange av kompetansemålene vil som sagt alle fem aspektene naturlig være til stede. Andre kompetansemål derimot, knytter seg tydelig opp til noen få av aspektene. Når noen aspekt nevnes eksplisitt, mens andres tilstedeværelse er mer implisitt, kan det føre til at læreren prioriterer noen av aspektene og at andre blir mer glemt. For at elevene skal ha mulighet til å ta igjen utviklingen av forståelse for alle aspektene i etterkant av 5. trinn, kreves en lærer med kompetanse og bevissthet om aspektene ved brøk. Men selv med en bevisst og kunnskapsrikt lærer, er tiden som vies til brøk på 6., 7. og 8. trinn begrenset til et eller to kompetansemål. Elever som ikke har utviklet forståelse for alle aspektene har med andre ord mulighet til å ta igjen dette etter 5. trinn, men tiden og fokuset som settes av til dette vil være betraktelig mindre. Når vi vet at brøkforståelsen har betydning for den matematiske utviklingen, vil dette være uheldig for elevene i tillegg til at de ikke oppnår kompetansemålene. Samtidig åpner det opp for en diskusjon om hvorvidt det er realistisk, eller hensiktsmessig, å skulle lære seg alt om brøk på et år. Et argument mot dette er forskning som indikerer at erfaringene elevene har med heltall kan være til hinder for læringen av brøk (Post, Wachsmuth, Lesh & Behr, 1985, s. 33). Når elevene da møter brøk i femtetrinn, vil mye av kunnskapen de har tilegnet seg gjennom erfaringer med hele tall ikke lenger gjelde. I tillegg vil elevene allerede ha utviklet en preferanse for å representere tall gjennom prosent og desimaltall, i henhold til tidligere forskning (Lamon, 2020, s. 28). For å unngå at erfaringene med hele tall, prosent og desimaltall skal være til hinder for barns læring av brøk, kan vi derfor argumentere for at det vil være gunstig for elevene å møte temaet tidig. Samtidig peker forskning på at brøk er svært utfordrende for barn (Steefland, 1991, s. 6). Med bakgrunn i dette kan en argumentere at det beste er om elevene møter brøk tidlig, og får gjentakende møte med brøken gjennom skoleåret. På den måten kan en forsøke å forebygge at elevenes erfaringer med tall blir til hinder for brøkforståelsen, samtidig som elevene får mulighet til å modnes med brøken.

På en annen side er det vi argumenterer for over en beskrivelse av hvordan læreplanene i matematikk har sett ut tidligere (Kunnskapsdepartementet, 2006). Men dette var, ifølge Ludvigsenutvalget, heller ikke en hensiktsmessig måte å lære elever om brøk. Noe av utfordringen, mente de, var at når elevene skulle igjennom alle matematiske tema hvert år, fikk de ikke tid til å lære i dybden, men fikk kun overflatelæring (NOU 2014:7, 35-36). Hvis det blir for liten tid til hvert tema, kan det være læreren sikter på en instrumentell undervisning heller enn en relasjonell undervisning for å få rekke alt elevene skal igjennom (Skemp, 1976, s. 11). Det er viktig at elevene forstår de sentrale ideene i brøk, blant annet for utviklingen innenfor matematikk og spesielt for algebra (Booth & Newton, 2012, s. 252). Og det å utvikle en relasjonell forståelse vil være tidsbesparende på sikt, men det krever tid (Skemp, 1976, s. 11). Derfor kan man også vurdere om en bør beholde dybdelæring, men at femte trinn er for tidlig å ha konsentrasjonen av brøk. Kanskje vil det være hensiktsmessig at elevene har et møte med brøkbegrepet på et senere trinn, med tanke på temaets kompleksitet og forskning som tilsier at dette er vanskelig for mange elever. Om elevene møter på brøkbegrepet også på et senere trinn, vil de kanskje være bedre rustet til å forstå konseptet. Eldre elever vil også ha bygget opp en bedre forståelse for det matematiske språket, som da vil være en økt støtte for læring i henhold til sosiokonstruktivistisk teori. En bedre forståelse for den matematiske notasjonen kan gjøre det lettere for elevene å koble symboler og andre representasjoner opp mot brøkbegrepet. Dette kan igjen forebygge eller forminske utviklingen av en instrumentell forståelse av regning med brøk. På den andre siden, hvis forståelse av brøkbegrepet er viktig for algebra, matematisk utvikling og fullstendig forståelse av multiplikasjon og divisjon, vil det være uheldig at det kommer i sent i utdanningen.

For å oppsummere finnes det gode argumenter både for å introdusere brøk tidligere og senere enn 5. trinn. Blant annet kan det være en fordel å tilegne seg kunnskap om brøk før elevene utvikler det matematiske språket. Det er viktig å ha en generell notasjon i matematikken for å kunne kommunisere effektivt og presist, samt for å kunne bruke symbolene som redskaper i arbeid. Samtidig vet vi at faget kompliseres for elevene når det blir skriftlig (Chinn, 2013, s. 167), og at det kreves mye tolkning for at elevene skal forstå begrepene som ligger bak symbolene (Kilpatrick et al., 2001, s. 95). Hvis elevene begynner tidlig med dette arbeidet, kan de bruke mer tid i yngre alder på å gradvis jobbe seg fra mer konkrete og visuelle representasjoner, og over til den symbolske standardnotasjonen. Blant annet vil det være av stor nytte for elevene å arbeide med å lage egne modeller i brøk, for å få en bedre forståelse for ideene de skal representere (Enge & Valenta, 2013, s. 11). Dette kan være et argument for at elevene begynner tidlig med brøk, og arbeider med det gjennom flere år, hvor de gradvis knytter visuelle og konkrete modeller opp mot symboler. Får elevene tid til å utvikle en relasjonell forståelse for brøknotasjonen, har de større mulighet for å lykkes når de introduseres for regning med brøk (Enge & Valenta, 2013, s. 11). På en annen side kan det bli oppstykket om elevene lærer litt hvert år. Da kan en tenke seg at det er mer hensiktsmessig med et dypdykk på et år, hvor tiden settes av til nettopp å bygge opp denne forståelsen. Samtidig ser vi i denne undersøkelsen at dypdykket denne klassen hadde på 5. trinn, ikke har ført til en bred forståelse av brøkbegrepet eller brøknotasjonen.

Konseptet med dybdelæring i læreplanen er fremdeles ganske nytt, og det ville derfor vært spennende å ta opp igjen denne forskningen om noen år. Da kan det være at vi hadde fått helt andre resultater enn det vi har gjort nå. Det kunne også ha avdekket at dybdelæringen ikke gir den uttellingen for elevene, slik det i utgangspunktet er tenkt. I tillegg kunne det vært hensiktsmessig å gjennomføre en slik undersøkelse for en større gruppe elever, gjerne også spredt i landet. Dette ville gitt en mer helhetlig oversikt over hvordan brøkforståelsen er på landsbasis. Vi har en tanke om at det kan ta tid å innføre dybdelæring, og det er derfor vanskelig å skulle trekke slutninger for hvorvidt det er effektfullt på nåværende tidspunkt. Vår mening er at når læreren har kompetanse om hvordan man driver dybdelæring på en god måte, kan et dypdykk i brøk være gunstig. Ettersom at brøk er et vanskelig tema, kan det å intensivere brøkopplæringen innen tidsrammen av et skoleår være nyttig. Da kan det være at elevene får tid til å oppnå relasjonell læring, som gjør at de enklere kan ta temaet opp igjen i senere situasjoner. Ved den tidligere organiseringen, med det Ludvigsenutvalget kalte overflatelæring, kan det for noen elever bli for lenge mellom brøkundervisning når den i kortere perioder blir tatt opp hvert år. Samtidig kan det argumenteres for at det kan bli mye brøk på et år dersom elevene ikke får den relasjonelle forståelsen, og at de henger lenger bak på grunn av dette. Ettersom det er et så stort fokus på brøk på et år, kreves det også en variasjon i hvordan læreren driver undervisningen. Det vil også føre til andre krav til hvordan læreren jobber, og kan gjøre at lærerens rolle blir betydelig endret.

5.4 Brøkundervisning

Det kan diskuteres hvorvidt dagens brøkundervisning gir elevene mulighet til å utvikle en helhetlig forståelse for brøkbegrepet. Gjennomgangen av tallmaterialet fra vår undersøkelse, tilsier at elevene mangler noe av den grunnleggende forståelsen. Dette kan ha konsekvenser for videre utvikling (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012, Booth & Newton, 2012, s. 252). Resultatene viser en variasjon mellom aspektene i prosentvis riktige svar (Tabell 13). Dette kan handle om hvordan aspektene har blitt prioritert i undervisningen. Ut fra oppgavene hvor ingen har riktig, kan det være enkelt å tenke i retningen av manglende undervisning om disse aspektene, selv om det ikke nødvendigvis er det det handler om. Måling, forhold og del av hel er aspekter som flest elever viser forståelse for. Det kan være et resultat av hvor hyppig modeller og oppgaver knyttet til disse aspektene forekommer i oppgavesettet. Samtidig kan mye ligge på hvordan undervisningen blir gjennomført. Dersom det har blitt brukt mer tid på disse tre aspektene i undervisningen, er det ikke unaturlig at det kommer frem i våre funn.

Med økende aktualisering av livsmestring vil undervisningen ha fokus på å gi elevene de redskaper de trenger for å benytte seg av kunnskapen også utenfor skolen. Tidligere forskning viser at utvikling av brøkforståelse har en positiv påvirkning for utviklingen innenfor andre matematiske områder, noe som bidrar til å bygge opp betydningen av en god brøkundervisning. Tidligere forskning viser at utvikling av brøkforståelse har en positiv påvirkning for utviklingen innenfor andre matematiske områder, noe som bidrar til å bygge opp under betydningen av en god brøkundervisning. Det kan på en side være ideelt å jobbe nøye med brøkbegrepet, hvor hvert aspekt blir presentert og arbeidet med over tid slik at elevene får tid til å fordype seg ekstra i det som er vanskeligere. På en annen side gir det andre krav til undervisning og lærer, som nevnt tidligere.

Lærere og skoler pålagt å følge LK20 fra 2020, og forberedt skiftet i forkant av dette (Heie, 2019). Det kan likevel være at skoler og lærere må bruke litt tid til å justere seg i forhold til den nye læreplanen, før de finner en gunstig arbeidsform. Det kan derfor være hensiktsmessig med senere studier av elevenes forståelse av brøk, for å se om dette endrer seg når LK20 er mer innarbeidet.

5.5 Evaluering av metoden

I kapittel 3.8 tok vi for oss studiens kvalitet. Vi så på validitet, reliabilitet og hvorvidt resultatene våre er generaliserbare. Det er viktig for oss at studien vår er av god kvalitet, slik at de slutningene vi trekker er troverdige. Vi har gjennom prosessen kontinuerlig stilt oss spørsmål om hvorvidt de valgene vi har tatt har bidratt til å styrke kvaliteten til studien vår. Med tanke på at vi har benyttet oss av en liten gruppe elever gjennom en kvalitativ studie, vil det kunne være vanskelig å få et generaliserbart resultat. Generalisering handler om hvorvidt vi kan trekke troverdige slutninger, men det kan også på mange måter legge et grunnlag for hva en kunne ha funnet dersom det ble testet på en større populasjon. De resultatene vi har kommet frem til nå, kan være annerledes enn om vi hadde gjennomført samme studie noen år frem i tid. Dette er på bakgrunn av at vi ser resultatene opp mot nye kompetansemål som nødvendigvis ikke er helt innarbeidet enda. Om noen år kan resultatene være annerledes, og da vil også alle klassetrinn blitt gjennomført med de nye kompetansemålene.

I kapittel 3.5 presenterte vi pilotstudien vi gjennomførte. Dette gjorde vi for å sikre et oppgavesett av god kvalitet. Vi fikk en forståelse for hvordan oppgavesettet fungerte, og vi kunne gjøre de endringene som trengtes for å øke kvaliteten. Vi ønsket oppgaver som flertallet av elevene hadde mulighet til å svare på, og måtte derfor formulere spørsmålene på en slik måte at det ikke språket eller oppgavenes oppbygging var til hinder for elevene. Pilotstudien kunne også gi oss en pekepinn på de funnene vi kom til å gjøre, ut fra en antagelse om at denne elevgruppen har omtrentlig samme forståelse. Det fikk vi derimot ikke vite før etter at besvarelsene var analysert.

Oppgavens reliabilitet sier, som nevnt i kapittel 3.8, noe om stabiliteten i målingene. Dersom mye overlates til tilfeldighetene, kan resultatene preges av feil (Jacobsson & Skansholm. 2020, s. 106). Vi gikk derfor igjennom og lagde rammer for hvordan vi ønsket å analysere svarene i forkant av studien. For å finne ut hvilke elever vi ønsket å intervjue, benyttet vi oss av en rask og kanskje litt overfladisk analyse av oppgavesettene. Dette ga oss en liten forståelse av hvordan elevene hadde svart, men det ga oss lite tid til å sette oss dypere inn i besvarelsene. Dersom vi hadde gjort det, kunne vi hatt forberedt oppfølgingsspørsmål og kunne derfor fått andre svar enn det vi fikk og muligens hatt en annen tolkning av elevenes besvarelser. Ulempen ved å ta oss bedre tid før intervjuene, var risikoen for at elevene hadde glemt hva de hadde svart eller tenkt før vi rakk å intervjue. Vi besluttet derfor å korte ned tiden mellom gjennomgang av oppgavesett og intervju, ved å kun ha en til to dager mellom dem. Dersom vi hadde brukt bedre tid i forkant av intervju, kunne vi ha sammenlignet elevene i større grad mot hverandre. En ulempe ved dette igjen kunne vært at vi hadde blitt for opphengt i denne sammenligningen, og slik at vår tolkning av elevene ble påvirket av andre elevers besvarelser. Til tross for at den første analysen ble gjort på en overfladisk måte, har vi i etterkant hatt en mer møysommelig gjennomgang av besvarelsene for å være helt sikre på våre målinger. I forkant av intervjuene hadde vi en viss relasjon til deltakerne. Vi tror dette kan ha bidratt positivt, fordi det allerede var opparbeidet en tillit som gjorde intervjuene enklere. På en annen side kan det ha vært en ulempe, fordi elevene kan ha hatt tanker om at vi hadde forventninger til hvordan de gjorde det i undersøkelsen. Vi anser det likevel som en fordel, fordi elevene åpnet seg raskere, uten at vi trengte bruke mye tid på å bygge opp tillit mellom oss.

6.0 Konklusjon

I denne studien har fokuset vært på elevenes forståelse av de fem aspektene ved brøkbegrepet, med problemstillingen:

Hvilke aspekter ved brøk kan vi identifisere at elever på 6. trinn har forståelse for?

I tillegg har vi stilt forskningsspørsmålene:

- Har elevene nådd kompetansemålene som omhandler brøk på 5.trinn?
- Har elevene forståelse for de ulike representasjonene knyttet til brøkbegrepet?

For å kunne svare på problemstillingen og forskningsspørsmålene gjennomførte vi en studie i en sjetteklasse med 18 deltakere. Elevene fikk et oppgavesett som inneholdt 11 oppgaver som tok for seg alle aspektene, samtidig som vi så viktigheten i å inkludere ulike representasjoner og kompetansemålene som omhandler brøk på femte trinn. Dette gjorde vi for å få en oversikt over hvilke aspekter av brøkbegrepet elevene har forståelse for. For å bedre innsikten gjennomførte vi intervju med 7 av de 18 elevene, der vi ønsket å høre mer om hvordan de tenkte i møte med oppgavesettet. Gjennom analysen har vi sett på besvarelsene enkeltvis og samlet.

Det resultatene av denne studien viser, er at det er varierende forståelse mellom elevene og for de ulike aspektene. Oppgavene som handler om aspektet «del av en hel» er de oppgavene flest elever svarer riktig på i denne undersøkelsen. Vi ser at elevene oppnår rett over halvparten av dem poengsummen de hadde fått om alle elevene svarte rett på alle deloppgavene knyttet til «del av en hel». Elevene viser med andre ord at dette aspektet er det de har mest forståelse for, samtidig som vi ser at ingen av elevene viser forståelse for den sentrale ideen om at delene må være like store. Oppgavene som handler om aspektene «forhold» og «måling» får en poengsum som ligger litt under halvparten. Den oppgaven som flest elever svarer riktig på, er en oppgave som vi har vurdert som tilhørende forholdsaspektet. Samtidig ser vi at selve ordet "forhold" er ukjent for elevene og skaper usikkerhet. Når det gjelder målingsaspektet er dette et aspekt som er viktig blant annet for å elevenes forståelse for at brøk er et tall (Lamon, 2020, s 220, 224). At flertallet av elevene viser mindre forståelse for dette aspektet, kan påvirke elevenes evne til å regne med brøk (Kerslake, 1986, s. 107). De to siste aspektene, «brøk som kvotient» og «brøk som operator», får ingen poeng i denne undersøkelsen. Disse aspektene har bare en oppgave hver i oppgavesettet, og et senere studie med flere oppgaver med disse aspektene kan gi andre resultater. For å oppsummere kan vi si at gjennom vår studie identifiserer vi forståelse for aspektet «del av en hel», samt noe forståelse for aspektene «forhold» og «måling». Samtidig ser vi gjennom intervju og elevbesvarelsene tegn til at denne forståelse kan være preget av en instrumentell forståelse.

Våre resultater tyder på at elevene i varierende grad forstår de ulike representasjonene og hvordan de kan bruke dem. I en sammenligning av poeng for modellene mot hverandre er det forholdsvis likt mellom arealmodellen og mengdemodellen, men ingen oppnår over halvparten av den maksimale poengsummen. Lengdemodellen har en liten andel mindre poeng, og rene symboler er det færrest som viser forståelse for. Det er en forskjell på antall oppgaver tilknyttet de ulike representasjonene, men i oppgaver med arealmodellen ser vi på den individuelle fordelingen av elever at det er et større antall elever som svarer riktig på disse. Vi ser derimot tegn i andre oppgaver på at de nødvendigvis ikke vet hva modellen skal representere. Felles for disse oppgavene er at forståelsen for at delene i modellen skal være like store må være til stede for å at oppgaven skal kunne løses riktig. Vi ser også antydninger til at elevene har utfordringer med formell brøknotasjon, og med å oversette mellom modeller og rene symboler. I denne studien viser elevene derfor lav forståelse for formell brøknotasjon, men en delvis forståelse for modellene og da spesielt arealmodellen.

Gjennom denne studien har vi fått et innblikk i hvorvidt disse elevene har nådd kompetansemålene for 5.trinn. Det er stor variasjon mellom elevene innad i klassen, noe som også kommer frem når vi ser funn opp mot kompetansemålene knyttet til brøk som de skal ha vært igjennom i løpet av 5.trinn. Et kompetansemål som flere av elevene viser oppnåelse for, er at de skal kunne *diskutere tilfeldighet og sannsynlighet i spill og praktiske situasjoner og knytte dette til brøk* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). Oppgavene knyttet til dette kompetansemålet har en relativt høy andel riktige svar, spesielt blant de elevene som ligger over gjennomsnittet. Likevel vil vi påpeke at datagrunnlaget i denne studien er for liten til å konkludere om elevenes oppnåelse av dette kompetansemålet. Et annet kompetansemål som elevene viser delvis oppnåelse for, med utgangspunkt i det vi har sett knyttet til aspekter og representasjoner, er å kunne *beskrive brøk som del av hel, som del av en mengde og som tall på tallinjen og vurdere og navngi størrelsene* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.8). Som nevnt er aspektet «del av hel» det elevene viser mest forståelse for, noe som kan handle om aspektets bruk av modeller og hjelpemidler for å visualisere oppgavene. Samtidig inneholder nevnte kompetansemålet også målingsaspektet, et aspekt vi har argumentert for at flere av elevene viser mindre forståelse for. I tillegg viser ingen av elevene i denne studien forståelse for den sentrale ideen om at delene i en brøk må ha lik størrelse, og de beskriver en instrumentell tilnærming til oppgaver hvor de skal angi brøkers størrelse.

I et tidligere avsnitt diskuterte vi tegn på at elevene har vansker med å oversette mellom ulike representasjoner av brøk. Vi ser blant annet at det ikke alltid er samsvar mellom elevenes markeringer i modeller og brøken de skriver med symboler og flere elever viser også liten forståelse for hvordan de skal tolke symbolene i brøknotasjonen. På samme måte er også bare noen få elever som viser at de klarer å oversette mellom desimaltall, prosent og brøk. Selv om dette kan handle om oppgavens bruk av arealmodellen, mener vi at det å kunne forklare sammenhengen mellom de tre representasjonene krever en forståelse som strekker seg ut over bruken av modell.

Når det gjelder regning med brøk, er dette oppgaver elevene strever med. Vi tegn til at elevene blander algoritmer for brøkregning og at flere ikke vet hvordan de skal bruke modellene til utregning. Noen elever viser at de klarer å addere brøk med lik nevner, og én elev viser at hen får til å addere brøk med ulik nevner i tallinjemodellen. Det er likevel ingen som har oppgitt riktig svar når de har multiplisert brøk og addert brøk med ulike nevnere.

Basert på det som har kommet frem i studien, vil vi konkludere med at det kompetansemålet knyttet til brøk som elevene viser mest forståelse for, er det som omhandler å beskrive brøk som del av en hel gjennom de tre modellene. Men i studien viser også flere av elevene liten grad av oppnåelse for de tre kompetansemålene som tar for seg oversetting mellom ulike representasjoner, mellom brøk, desimaltall og prosent og regning med brøk. Selv om vi ikke har innhentet informasjon om elevenes evne til å formulere og løse problemer fra egen hverdag knyttet til brøk, kan vi tenke oss at det vil være vanskelig om elevene viser lav forståelse og oppnåelse for flere av aspektene og kompetansemålene.

Vi skrev innledningsvis at dersom undersøkelsen avdekker at elevene viser liten relasjonell forståelse for brøkbegrepet, vil dette også være interessant opp mot dybdelæringen. Det vil være vanskelig for oss å konkludere med hvordan organiseringen av den nye læreplanen fungerer, da vi kun har et lite innblikk og utvalg å basere oss på. Men når elevene, i vår studie, viser en delvis forståelse for tre av aspektene, lav forståelse for formell brøknotasjon og lav oppnåelse for flere av kompetansemålene, blir organiseringen av læreplanen uheldig for denne elevgruppa. Forskning har vist at en god forståelse for brøkbegrepet, krever en forståelse for flere av aspektene (Lamon, 2020, s. 32). Brøk er viktig innenfor flere aspekter av elevenes matematiske utvikling og hverdag, og en smal og delvis forståelse av brøkbegrepet kan gi konsekvenser for elevene videre. På bakgrunn av at det er få kompetansemål som tar opp brøk ved senere trinn, kan 5. året være viktig for å legge et grunnlag for forståelsen av brøk. Samtidig har elevene, gjennom kompetansemål på 6., 7. og 8. trinn, muligheter til å lære seg mer om brøkaspektene og nå kompetansemålene ved senere år. Dette krever dog en lærer som både har fokus på og kompetanse om brøkens fem aspekter, og betydningen av at elevene innehar forståelse for disse.

På bakgrunn av at vi kun har undersøkt en liten gruppe sjetteklassinger kan vi ikke konkludere med at våre funn er noe som kan representere alle landets sjetteklassinger. Derfor vil det kunne være aktuelt å gjennomføre flere studier for å få et innblikk i om våre resultater er representative for flere. Brøk er et komplisert begrep for barn å forstå (Streefland, 1991, s. 6), som blant annet kommer av viktigheten av å ha forståelse til flere av brøkens aspekter (Lamon, 2020, s. 31). Vi håper derfor at vår studie er et bidrag til å forme et større bilde av hvordan elevene best kan lære om og forstå det viktige brøkbegrepet.

Litteraturliste

Alseth, B., Arnås, A.C. & Røsseland, M. (2020). *Multi 5A: Elevbok.* (3.utg). Gyldendal.

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. Journal of Experimental Child Psychology, 113(3), 447–455. https://www-sciencedirect-com.ezproxy.nord.no/science/article/pii/S0022096512001063

Boge, M., Markhus, G., Moe, R. & Ødegaard, E. E. (2009). *Læring gjennom veiledning: Meningsskaping i grupper.* (2. utg). Fagbokforlaget.

Bondø, A. & Tokle. O. D. (2018). Problemområder knyttet til brøk. *Realfagsløyper*. Problemområder knyttet til brøk (realfagsloyper.no)

Booth, J. L & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper´s doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*(4). 247-253. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Busch, T. (2021). Akademisk skriving for bachelor- og masterstudenter. (2.utg.). Fagbokforlaget.

Blikstad-Balas, M. (2020). Godt arbeid med læreplaner – sammen. *Bedre skole, 2020*(4), Godt arbeid med læreplaner – sammen (utdanningsforskning.no)

Chinn, S. (2013). *Når matte blir vanskelig.* Kommuneforlaget.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The Role of Representations in Fraction Addition and Subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 490–496. http://www.jstor.org/stable/41182601

Del Busso, L. (2018). Fenomenologi og narrativer i kvalitativ forskning. I G. Brottveit (Red.). *Vitenskapsteori og kvalitative forskningsmetoder: om å arbeide forskningsrelatert.* (s. 46-55). Gyldendal.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2019, 10.februar). *Generelle forskningsetiske retningslinjer.* https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/generelle/

Enge, O. & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten*, (1).

Flores, A., Samson, J., & Yanik, H. B. (2006). Quotient and Measurement Interpretations of Rational Numbers. *Teaching Children Mathematics*, *13*(1), 34–39. http://www.jstor.org/stable/41198840

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2019). *Unga matematiker i arbete: bråk, decimaltal och procent.* Studentlitteratur.

Fullan, M., Quinn, J. & McEachen, J. (2018). *Dybdelæring.* Cappelen Damm.

Gersten, Russell, Sybilla Beckmann, Benjamin Clarke, Anne Foegen, Laurel Marsh, Jon R. Star, and Bradley Witzel. 2009. Assisting students struggling with mathematics: Response to intervention (RtI) for elementary and middle schools (NCEE 2009-4060). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Services, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Gjems, L. (2009). *Å samtale seg til kunnskap: Sosiokulturelle teorier om barns læring om språk og gjennom språk.* Fagbokforlaget.

Gray, J. & Ånestad, G. (2021). Aspekter ved brøk i en nasjonal prøve. I E. K. Hovik & B. Kleve (red.), *Undervisningskunnskap i matematikk* (3. Utg, s. 63-79). Cappelen Damm Akademisk.

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner.* Caspar.

Heie, M. (2019). *Læreplanene speiler samfunnet.* Utdanningsforskning. Læreplanene speiler samfunnet (utdanningsforskning.no)

Jacobsson, K. & Skansholm, A. (2020). *Handbok i* uppsatsskrivandre*:* för utbildningsvetenskap. Studentlitteratur.

Johanning, D. I. (2008). Learning to Use Fractions: Examining Middle School Students' Emerging Fraction Literacy. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 281–310. http://www.jstor.org/stable/30034971

Justnes, C. N. (u. å.). Representasjoner i barnehagen. *Realfagsløyper.* Representasjoner i barnehagen_1.pdf (realfagsloyper.no)

Kazemi, E. & Hintz, A. (2018). *Målrettet samtale.* Cappelen Damm Akademisk

Kilpatrick, J. Swafford, J. & Findell B. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathmatics.* The National Academies.

Keeton, K. (2022, 9. desember). *What is A Standard Algoritm? Explained for Kids, Parents & Teachers.* Third Space Learning. What Is A Standard Algorithm? Explained for Elementary (thirdspacelearning.com)

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children`s Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* NFER-NELSON.

Kunnskapsdepartementet (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. https://www.udir.no/kl06/mat1-04#

Kunnskapsdepartementet. (2019, 18. mars). *Nye læreplaner for bedre læring i fremtidens skole*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/nye-lareplaner-for-bedre-laring-i-fremtidens-skole/id2632829/

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Kompetansemål etter 5. trinn - Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05) (udir.no)

Kunnskapsdepartementet (2019). *Overordnet del - verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Lamon, S.J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for understanding.* Rutledge.

Matematikksenteret. (u.å.). *Andre problemer knyttet til brøk.* Hentet 05.mai 2023 fra Andre problemer knyttet til brøk | Matematikksenteret

Matematikksenteret. (u.å.). *Vanlige misoppfatninger knyttet til Brøk og prosent.* Hentet 16. mars 2023 fra Vanlige misoppfatninger knyttet til Brøk og prosent | Matematikksenteret

Neagoy, M. (2017). *Unpacking fractions.* ASCD og NCTM.

Nosrati, M & Wæge, K. (2018). *Dybdelæring i matematikk*. Realfagsløyper. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-

NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole: Et kunnskapsgrunnlag. Kunnskapsdepartementet.* https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-*7/id766593/*

NOU 2015:8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser. Kunnskapsdepartementet.* https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-*8/id2417001/*

Nord, R., Jerpseth, H. & Fagermoen, M. S. (2012). Betydningen av pilotundersøkelse før validering av oversatte instrumenter. *Nordisk* sygeplejeforskning, (1), 45-55. https://doi.org/10.18261/ISSN1892-2686-2012-01-05

Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori.* Fagbokforlaget.

Petit, M. M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). informing practice: They “Get” Fractions as Pies; Now What? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *16*(1), 5–10. http://www.jstor.org/stable/41183434

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2016). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Cappelen Damm Akademisk.

Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. J. (1985). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 18–36. https://doi.org/10.2307/748970

Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, Naming, and Justifying FRACTIONS. *Teaching Children Mathematics*, *12*(8), 394–400. http://www.jstor.org/stable/41198803

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, 77(1), 20-26.

Stengrundet, S. & Valbekmo, I. (2019). Begrepslæring og begrepsforståelse i matematikk. *Realfagsløyper.* Begrepslæring og begrepsforståelse i matematikk (realfagsloyper.no)

Streefland, L (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* (8. utg). Kluwer.

Svartdal, F. (2020, 3. april). *Reliabilitet.* Store norske leksikon. https://snl.no/reliabilitet

Tjora, A. (2021). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (4.utg.). Gyldendal.

Tucker, A. (2008). Fractions and Units in Everyday Life. I B. L. Madison & L. A. Steen (Red.), *Calculation vs. Context: Quantitative Literacy and Its Implications for Teacher Education.* (s. 75-86). Mathematical Association of America.

Thoresen, L., Rugseth, G. & Bondevik, H. (2020). *Fenomenologi i helsefaglig forskning*. Universitetsforlaget.

Utdanningsdirektoratet (2019, 13. mars). *Dybdelæring.* Utdanningsdirektoratet. Dybdelæring (udir.no)

Utdanningsdirektoratet (2021, 24. juni). *Hvorfor har vi fått nye læreplaner?* Utdanningsdirektoratet. Hvorfor har vi fått nye læreplaner? (udir.no)

Utdanningsdirektoratet (2022, 14. november). *Innføring og overgangsordninger for nye læreplaner.* Utdanningsdirektoratet. Innføring og overgangsordninger for nye læreplaner (udir.no)

Valbekmo, I., Myhre, S. A. & Tømmerdal, S. (2019). Ulike uttrykksformer i matematikk. *Realfagsløyper*. Ulike uttrykksformer i matematikk (realfagsloyper.no)

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (9. Utg). Pearson

Voll, L. O. (2019). *Dybdelæring*. Realfagsløyper. Dybdelæring (realfagsloyper.no)

Vygotsky, L. (1978). Mind in society. Cambridge, MA: Harvard University Press

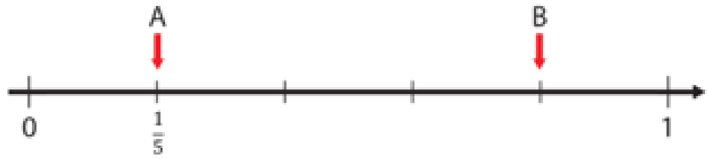
Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fractions. Teaching Children Mathematics, 8(8), 457-463.

Wilkie, K. J., & Roche, A. (2022). Primary teachers' preferred fraction models and manipulatives for solving fraction tasks and for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09542-7

Kandidatnr:____________

Oppgave 1

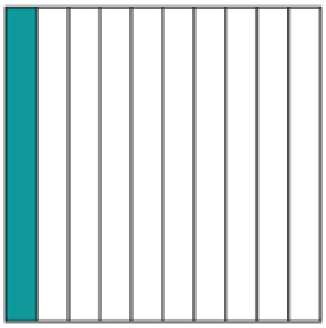
a) Hvilke brøker peker pilene på?



b) Plasser tallet 1 på tallinjen som er gitt nedenfor (sett kryss).

Oppgave 2

Hvor stor del av figuren er fargelagt? Skriv svaret som **brøk, desimaltall og prosent**.



Oppgave 3

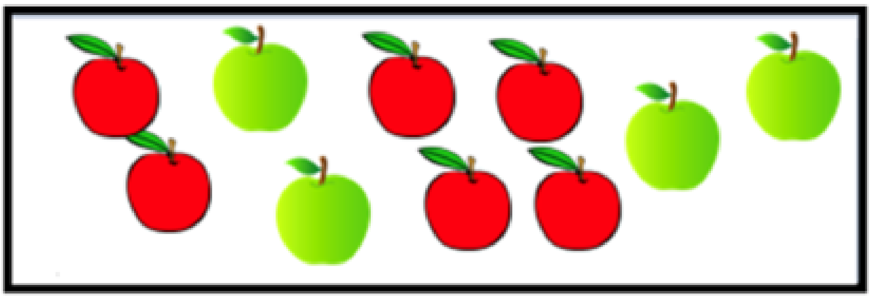
Hvilke tall mangler?

$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{6}$ $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{8}$ $\frac{1}{3} = \frac{\quad}{9}$

Oppgave 4

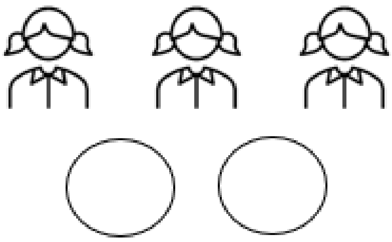
a) Hvor stor del av eplene nedenfor er røde, og hvor stor del er grønne? Skriv svaret som brøk.

b) Hva er forholdet mellom grønne og røde epler? Skriv svaret som brøk.



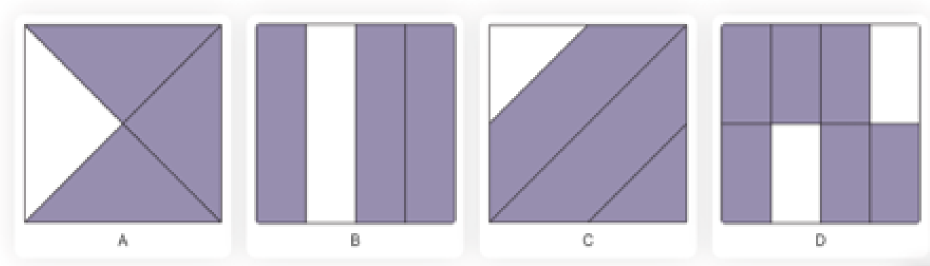
Oppgave 5

Tre jenter deler to pizzaer. Hvor mye pizza får hver jente? Skriv svaret som brøk.



Oppgave 6

I noen av figurene (A-B-C-D) er $\frac{3}{4}$ fargelagt. Sett en ring rundt disse.

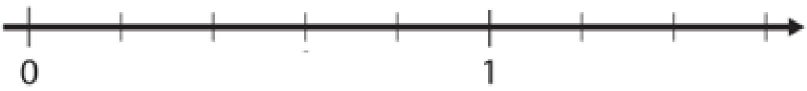


3

Oppgave 7

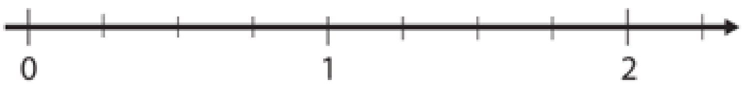
Regn ut og marker svarene på tallinjene.

a)



$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \quad =$$

b)



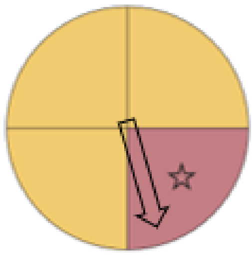
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad =$$

Oppgave 8

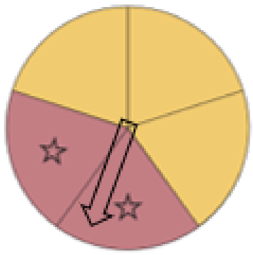
Om du spinner en binders på disse sirklene, hva er sannsynligheten for at den stopper på rødt felt?

Svar med brøk.

a

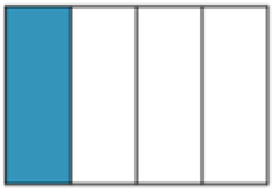


b



Oppgave 9

Bruk figuren til å finne $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{4}$. Skriv svaret som brøk.

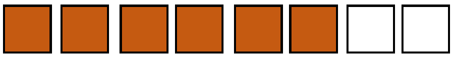


Oppgave 10

Skriv en brøk som er større enn $\frac{5}{6}$, men mindre enn 1.

Oppgave 11

Vis at $\frac{6}{8}$ er det samme som $\frac{3}{4}$. Bruk rutene under.



5

Formålet med intervjuet

- Hente inn tilleggsinformasjon fra noen av elevene om hva de har tenkt når de har løst oppgavene.
- Spørsmålene vi skal stille blir mange oppfølgingsspørsmål, så det er litt vanskelig å skulle formulere alle før vi starter. Under er det noen generelle spørsmål vi skal stille, med eksempel på oppfølgingsspørsmål.

1. Takk for at vi får stille deg noen spørsmål. Grunnen til at vi ønsker å snakke med deg, er for å finne ut litt mer om hvordan du har tenkt når du svarte på oppgavene. Det du svarer kan bli tatt med i forskningen vi skriver om, men uten navn. Vi ønsker å ta opp lyd, for at vi skal huske alt du sier, men også at vi slipper å skrive når du snakker. Dette tar ikke så lang tid.

2. Når du løste den oppgaven her, hva tenkte du før du skrev det ned?
   a. Stille tilleggsspørsmål ut ifra hva eleven svarer.
   b. Dette spørsmålet stiller vi til alle oppgavene.

3. Synes du noe av det var lettere enn noe annet?
   a. Hvorfor tenker du det?

4. Vi ser at du har svart/tegnet det her, hvorfor valgte du akkurat det?
   a. Vurderte du noen andre metoder?

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet "en studie om elevers forståelse knyttet til brøk"?

Dette er et spørsmål til deg om ditt barn kan delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hvilke områder den nye læreplanen og dybdelæring har ført til forståelse av brøk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Fra 2020 har vi i norsk skole fått en ny læreplan for matematikken. I denne nye læreplanen er det fokus på at elevene skal få god tid til å utforske, lære og forstå noen matematiske tema godt fremfor å lære litt om mange tema. I 5. trinn handler de fleste læremålene for eksempel om brøk. Tanken er at elevene dette året skal få god tid til å forstå brøk i dybden, og man tenker at det gjør at elevene vil få en bedre og mer varig forståelse av brøk. Både erfaring og forskning viser at brøk er et sammensatt begrep og tema som elevene ofte strever med å forstå. Nå går elevene i sjette klasse og skal, med utgangspunkt i læreplanen, ha en god forståelse av brøk. I dette forskningsprosjektet vil elevene få et oppgavesett som er knyttet til brøk og ulike aspekter ved brøk. I oppgavene vil elevene bli bedt om å løse oppgavene og å forklare hvordan de løser dem. I noen tilfeller vil vi også hente ut informasjon gjennom intervju, hvor spørsmålene vil være knyttet til hvordan de har tenkt i arbeidet med oppgavene. Dette vil vi gjøre for å undersøke om den nye læreplanen er hensiktsmessig med tanke på elevenes læring av brøk.

Foreløpig problemstilling er

"På hvilke områder kan man identifisere at den faglige konsentrasjonen i læreplanen i matematikk har ført til forståelse av brøk?"

Dette er forskning for et masterprosjekt i lærerutdanningen.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Nord universitet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får ditt barn spørsmål om å delta?

Ditt barn går på 6. trinn, og skal i henhold til læreplan ha en god forståelse av brøk.

Hva innebærer det for deg å delta?

Ditt barn vil få oppgaver knyttet til ulike aspekter ved brøk, og kan bli tatt ut til kort intervju om løsningene. Vi kommer til å oppbevare ditt barns navn for å knytte oppgaver opp mot intervju. Hvis ditt barn deltar, kan oppgaver og intervjuguide sendes om ønskelig.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn får delta, kan du/dere når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for eleven hvis du ikke vil at barnet skal delta eller senere velger å trekke.

Dersom ditt barn ikke skal delta, vil det bli gitt alternativt opplegg under forskningen.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er studentene, veiledere og Nord Universitet som vil ha tilgang til opplysninger.
- Navn vil bli erstattet med en kode som lagres på en egen navneliste adskilt fra øvrige data.
- Elevene vil *ikke* bli gjenkjent i publikasjon.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes juni 2023. Etter prosjektslutt vil datamateriale med ditt barns personopplysninger anonymiseres. Dokument med navn knyttet til kode vil bli makulert, og koden er ikke gjenkjennbar.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Nord Universitet har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Ditt barns rettigheter

Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om eleven, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om eleven som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om eleven
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

Nord universitet ved

Dag Tore Gulaker, tlf. 74022587. dag.t.gulaker@nord.no

Nina Rokne Bye, tlf. 74022886. nina.r.bye@nord.no

Camilla Breivik Andreassen, tlf. 97497669. camilla.b.andreassen@student.nord.no

Maiken Lovise Hofstad Jensen, tlf. 93278335. maiken.l.jensen@student.nord.no

Vårt personvernombud: Toril Irene Kringen, tlf. 74022750. toril.i.kringen@nord.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Dag Tore Gulaker & Nina Rokne Bye (forsker/veileder)

Camilla Breivik Andreassen & Maiken Lovise Hofstad Jensen

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *[sett inn tittel]*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- At mitt barn kan delta i intervju
- At mitt barn delta med spørreskjema
- At det kan hentes inn tidligere resultater i temaet

Jeg samtykker til at mitt barn sine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av foresatt for prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 4, kvittering fra NSD

Vurdering av behandling av personopplysninger

Skriv ut | 04.12.2022

Referansenummer	**Vurderingstype**	**Dato**
836005	Standard	04.12.2022

Prosjekttittel
Masteroppgave i matematikk knyttet til brøk

Behandlingsansvarlig institusjon
Nord Universitet / Fakultet for lærerutdanning og kunst- og kulturfag / Grunnskole

Prosjektansvarlig
Dag Tore Gulaker

Student
Camilla Andreassen

Prosjektperiode
27.10.2022 - 18.06.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 18.06.2023.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG
Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger om elever i en sjetteklasse, i alderen 11-12 år, frem til 18.06.2023.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen

formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål

dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet

lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring, videosamtale o.l.) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Anne Marie Try Laundal

Lykke til med prosjektet!

Intervju med forskningsdeltaker 01

Maiken: Da kan jeg begynne med å si hei.

01: Hei.

Maiken: Jeg heter Maiken, og jeg er lærerstudent sammen med Camilla. Og jeg skal være med Camilla nå når vi skal.. Vi var så veldig nysgjerrig på hva du tenkte. Vi så at du har tenkt noe spennende, det har vi så lyst til å snakke med deg om.

Camilla: Mhm. Som vi sa før vi gikk inn her, dette er ikke skummelt. Da kan vi vel bare starte på.

Maiken: Det kan vi gjøre.

Camilla: Den første oppgaven vi ønsker å spørre om er den der, 1B. Og hva du tenkte da du løste den?

01: Mhm.

Camilla: Og hvis du ønsker å skrive, så har du blyant også kan du få skrive på arket der.

01: Jeg synes det var litt vanskelig, siden jeg tenkte, eh, at det der var på en måte 1.

Camilla: At det var 1?

01: Mhm. Så 1 av 3, også 2 og 3.

Camilla: Mhm. Det vi så var at du hadde plassert krysset ditt der sirka, sånn midt imellom 0 og 1/3. Men det du sa nå, med at det var 1 også 2 og 3. Hva hadde det blitt der da?

01: Eh, 3 av 3?

Camilla: Mhm.

Maiken: Du, jeg lurer på en ting. Nå ser ikke jeg helt hva du viser, men du tenkte at det som sto der, det var 1?

01: Mhm.

Maiken: Og da var du litt usikker på hvor du skulle sette 1? Fordi 1 allerede sto der? Var det sånn du tenkte?

01: Ja.

Maiken: Aha. Hvorfor plasserte du 1 der du gjorde? Den er vi så spent på, skjønner du. Husker du hva du tenkte da du plasserte krysset der?

01: Jeg er litt usikker.

Maiken: For du har jo tenkt noe lurt, det har du jo. Men det er kanskje litt vanskelig å huske det du tenkte. Var det..

01: Eh, jeg trodde.. eh, aller først så tenkte jeg at den der var jo 1, den som sto der. Også, ehm, var jeg litt usikker, så jeg vet ikke helt hva jeg tenkte egentlig.

Maiken: Ok, så du var litt usikker når du skulle sette krysset?

01: Mhm.

Maiken: Ja, jeg skjønner.

Camilla: Skal vi gå litt videre?
Maiken: Har du fått sagt det du tenkte og ville si?
01: Mhm.
Camilla: Eh, skal vi se. Da er vi på oppgave 3. På den her, så lurte vi på hva du tenkte når du løste den med 6? Kunne du forklart det?
01: Ehm, jeg tror jeg tenkte at, ehh, at jeg bare skulle doble det her egentlig.
Camilla: Bare doble?
01: Mhm.
Maiken: Hvorfor tenkte du at du skulle doble det da? Det var jo en veldig lur tanke. Hvorfor tenkte du det?
01: Ehm, jeg tror jeg tenkte at siden det er 4 her, også ehm, tenkte jeg at jeg bare skulle doble det også ta vekk 1 siden det er en som er tom.
Maiken: Akkurat. Men du, hvordan tenkte du når du løste den som er helt bortest, den som sier 1/3 er lik.. Hvordan tenkte du når du løste den?
01: Ehm, jeg tenkte egentlig bare at ehm, siden det sto 1 og 3 på den oppgaven. Også tenkte jeg at jeg bare skulle doble det ordentlig. Så, tenkte jeg hvor mange treere man skulle få i 9.
Camilla: Mhm.
01: Også bare skrev jeg 3.
Camilla: Ja, for da så du hvor mange ganger du fikk plass til den i 9´ern?
01: Mhm.
Camilla: Og det var hvor mange?
01: 3.
Camilla: Så da gjorde det det samme som denne eller?
01: Jeg husker ikke helt.
Maiken: Det hørtes ut som det var.. For du tenkte at du måtte doble den og?
For du så hva som hadde skjedd fra 3 til 9? Også skulle du, måtte du gjøre det samme over? Var det det du tenkte?
01: Mhm.
Maiken: Ja, så lurt.
Camilla: Har du noe mer til denne?
Maiken: Nei, jeg har ikke noen flere spørsmål.
Camilla: Har du fått sagt det du ønsker å si?
01: Ja.
Maiken: Men kanskje en ting jeg lurer på. På den en todel er lik.. Hvordan tenkte du der da?
01: Ehm, eh jeg tror jeg skrev 3 på grunn av, eh, at man eh. Jeg tror jeg skrev det på grunn av, eh, det var på en måte 3 igjen.

Camilla: Mhm, av de hvite der?

01: Mhm.

Maiken: Så du tenkte at en halv, når den var brukt opp så var det tre igjen på den andre siden?

01 nikker.

Maiken: Ah, okei. Du, jeg synes du er veldig flink til å forklare det du tenker.

Camilla: Mhm, det er du. Skal vi gå videre på neste da, skal vi se. Den, oppgave 9, den hadde du svart på. Også lurte vi litt på hvordan du tenkte når du svarte på den?

01: Ehm, jeg synes det var litt vanskelig siden det sto på en måte 1 brøkstrek 3 av, og det skjønte jeg ikke helt hva jeg skulle skrive.

Maiken: Det var litt vanskelig med den oppgaven?

01: Mhm.

Maiken: Det er ikke så veldig lett kanskje, å forstå. 1/3 av 1/4. Hvordan tenkte du da, husker du hva du tenkte på?

01: Jeg tror jeg bare, ehm, tenkte at om man fjerna en del da ble det 1 av 3. Også når man på en måte la den på igjen ble det 1 av 4. Jeg husker ikke helt.

Camilla: Så, nå pekte du litt her, så skal bare forklare for Maiken. Du la fingeren over den ene, så da kan vi si at du legger fingeren over den som er farget, og da har du 3 stykker igjen. Og da tenkte du at det var 1 av 3, også la du til den siste igjen og at det da ble 1 av 4 igjen?

01: Jeg tenkte egentlig at, ja egentlig det.

Camilla: Mhm, da forsto jeg riktig når du forklarte nå.

Maiken: Okei, så derfor var det to firedeler for du la fingeren over to av de og da var det to igjen? Eller forsto jeg det feil?

Camilla: Du skal få se det du har svart, så du kan huske litt derfra og. Sånn, her har du svart 2/4. Også sa du, for du dekket til en og da var det 1/3 også la du den til igjen og da tenkte du?

01: 1 av 4.

Maiken: Så hvis du ville svart på nytt, så ville du svart ¼?

01: Ehm, tror det.

Maiken: Det var veldig spennende å høre at du forklarer. Men, har du noe mer du har lyst til å fortelle oss?

01: Ehm, jeg har vært ganske mye syk når vi har lært om brøk på skolen, så jeg synes det har vært litt vanskelig.

Maiken: Det var litt vanskelig med brøk? Men du, vi ser jo at du tenker mye lurt for det da. Og da har jeg fått spurt om det jeg ønsket å spørre om.

Camilla: Ja, det har vel jeg og. Og du føler du har fått sagt det du ønsker å si?

01: Mhm.

Maiken: Tusen takk for at vi fikk vite litt mer om hvordan du tenker. Det var kjempefint at du ville fortelle oss det.

Intervju med forskningsdeltaker 03

Camilla: Sånn, skal vi se. Hei.

03: Hei.

Camilla: Vi har sett på de oppgavene dere gjorde, og synes mye av det du hadde gjort var spennende. Derfor ønsker vi å høre litt om hva du tenkte når du gjorde oppgavene.

03: Okei.

Camilla: Da starter vi bare rett på her vi, på oppgave 1A. Hva tenkte du når du løste den?

03: Ehm, jeg husker ikke helt hva jeg svarte.

Camilla: Nei, skal vi se. Jeg har den du har svart på også. Her.

03: Åja.

Camilla: Ja, hvordan tenkte du her?

03: Jeg bare tenkte sånn at, eh, for eksempel at det var. Hæ. Eh, fem. Også her var det fire. Og alle de der er fem også var det fire av fem. (Peker på tallinja)

Camilla: Ja. For nå sa du det at du tenkte at den var fem, der det står 1?

03: Ja.

Camilla: Mhm, her står det jo 1 av fem, også ser jeg at du har skrevet 4 av 5 fordi du tenkte at 1 var 5. Men så står det noen tall under brøkstreken, vet du hva de betyr? Eller har du tenkt noe på hvorfor du tar med den videre?

03: Eh, kanskje fordi alle sammen er en del av fem.

Camilla: Ja, så lurt. Da har du svart på alt jeg lurte på her, er det noe mer du ønsker å si?

03 rister på hodet.

Camilla: Ok, da kan vi gå over til neste, 1B. Her skulle du plassere tallet 1 på tallinja. Hva tenkte du på når du skulle løse den?

03: Ehm, det var kanskje litt dumt, men jeg bare prøvde noe også tok jeg en linjal også målte jeg like langt som det var derfra også helt. Så var det liksom. Jeg målte til fire, også til fem. Også var 1 her et sted. (Peker på tallinja)

Camilla: Så smart. For da målte du hvor langt det var mellom 0 og 1/3. Hvorfor satte du 1 der da, og ikke målte en gang til?

03: Fordi, hvis fire var her også målte jeg litt lenger, da var fem her. Og den gikk.. Jeg vet egentlig ikke, hvorfor jeg ikke tok den lenger, men jeg bare tenkte at det var samme som der. (Peker på forrige oppgave)

Camilla: Ja, for der sa du at det var fem. Også har du satt den på rett sted her, men jeg bare lurer på hvorfor du har satt den der og ikke før eller etter?

03: Ehm, fordi jeg målte også da var jeg ganske sikker fordi jeg målte med linjal, men jeg vet ikke hvorfor jeg satte den der. Kanskje fordi det sto 1 av 3 der, og 1 kanskje er 3 av 3. Jeg vet ikke.

Camilla: Det var en veldig lur tanke, at du så på den brøken som sto der.

03: Åja.

Camilla: Bra. Hvis du ikke ønsker å si mer, så kan vi gå litt videre kanskje?

03: Ikke noe mer å si.

Camilla: Den er grei. Skal vi se. Den her, oppgave 3. Husker du hva du svarte her?

03: Ehm, jeg tror jeg husker at jeg svarte fire der.

Camilla: Ja. Hvis vi starter på den første her, husker du hva du tenkte her?

03: Eh, ja. At det er 6 til sammen også er det 3 av dem som er fargelagt. Og da blir det 3 av 6. Og den skal også være en halvpart siden det står 1 av 2 der.

Camilla: Ja. Den her da?

03: Ehm, jeg husker ikke. Eller, jeg husker ikke helt.

Camilla: Det er helt greit å ikke huske. Hva med den siste? Vi kan gå tilbake til den andre etterpå.

03: Nei, den der skjønte jeg ikke helt.

Camilla: Det ser ut som du har skjønt den. Du har svart rett.

03: Jeg tegnet, ehm, en sånn strek der også ble det tre også ble det en, to, tre, fire der. Også så ble det 9 til sammen.

Camilla: Så du hadde tre der og fire der, og det ble ni til sammen?

03: Ja. Nei, det er ikke ni. Jeg husker ikke hva jeg tenkte, men jeg husker at jeg gjorde alle de andre oppgavene også gjorde jeg denne til slutt for jeg skjønte den ikke helt.

Camilla: Det er helt greit. Vi kan se litt videre?

03: Ja takk.

Camilla: Også lurer jeg på den her, på oppgave 4. Her har du svart på både A og B, også lurer bare på A. Hva tenkte du der?

03: Eh, fordi det er ti epler og seks av dem røde også er fire av dem grønne.

Camilla: Ja, og derfor så skrev du 6 av 10 og 4 av 10?

03: Ja.

Camilla: Mhm, her da? Oppgave B.

03: Jeg tenkte at sånn, ehm, hva var forskjellen. Eller ja, at det var fire og seks epler.

Camilla: Mhm.

03: Også, ja. At det ble 10 til sammen?

Camilla: Ja, så da tenkte du at når du skulle skrive det forholdet at fire. Det var fire grønne også var det seks røde. Så derfor skrev du fire over brøkstrek, og seks under brøkstrek og de ble ti?

03: Ja.

Camilla: Det er spennende å høre på at du forklarer, bra jobba. Skal vi gå videre, eller vil du si noe mer?

03: Gå videre.

Camilla: Den også. Oppgave 5.

03: Ja. Den brukte jeg ganske lang tid på. Jeg brukte ganske lang tid på å skjønne den. Men så tenkte jeg at hvis alle fikk to hver da ble det like mange til hver, men det ble også to til overs da.

Camilla: Ja, fordi du delte hver pizza i fire?

03: Mhm.

Camilla: Men, hvis du ikke skulle fått noe til overs da. Hva kunne du gjort da tror du?

03: Jeg vet ikke.

Camilla: Nei, det er lurt å tenke to biter til hver. Jeg ser du har skrevet 8 biter under, hvorfor har du skrevet det?

03: Fordi de to pizzaene, sånn som jeg delte de opp så ble det åtte biter til sammen.

Camilla: Ja, du tenkte begge de pizzaene som en hel?

03: Mhm.

Camilla: Men, hvis vi hadde vært tre stykker her nå. Og hatt to pizzaer på deling. For at det skulle bli rettferdig og vi ikke kunne kaste noe. Kunne vi delt opp pizzaen så det passet til antallet vi er?

03: Eh, jeg vet ikke. Det er lett å dele den i fire, for da er det bare å sette et kryss. Men hvis vi er 3, så kan jo pizzaen deles i tre, men det er litt vanskelig. Da ville det blitt 2 av 6 kanskje.

Camilla: For da er begge de pizzaene en hel på seks biter?

03: Ja, det tror jeg. De spiser jo begge to, så da er det ikke bare en hel med en bit til hver.

Camilla: Hm, det var spennende tanker. Takk for at du deler. Vi kan se litt på den neste her, oppgave 6.

03: Den synes jeg var ganske enkel, fordi jeg tror jeg har gjort noe lignende før. Her er det fire stykker, også er det bare tre av dem som er fargelagt. Og da må man sette ring rundt A, for det står at man skal sette ring rundt de som er 3 av 4. Og alle de er det, men ikke den.

Camilla: Hm, hvorfor er ikke den det da?

03: Fordi den er delt opp i mange flere enn fire ruter. Eller, ting. Sånn ja.

Camilla: Ja, hva kan du si om de du har ringet rundt? Hvordan kan du forklare innholdet der?

03: Ehm, det er på en måte fire stykker også er bare tre av de fargelagt.

Camilla: Ja, hva mer kan man si?

03: At det er en boks.

Camilla: Så hvis du har en boks, og den skal deles og males. Hvor ¾ skal males, så kan du dele den akkurat sånn du vil?

03: Hm, mhm. Eller, ja. Eller.

Camilla: Spør jeg vanskelig?

03: Ja.

Camilla: Ja, fordi her så sa du jo at det var 3 av 4. Og de trekantene her, hvordan ser de ut?

03: Ehm, at alle får plass inni boksen. Også er bare tre av dem fargelagt, men det er fire trekanter.

Camilla: Mhm, størrelsen da?

03: De er store.

Camilla: Ja, så bra. Er det noe mer du ønsker å si?

03: Alle er like store.

Camilla: Ja.

03: Men ikke der?

Camilla: Hvorfor ikke?

03: De to er mindre, og de er større.

Camilla: Ja, men det er fortsatt 3 av 4?

03: Nei, eller. Jeg vet ikke. Nei, den er ikke det.

Camilla: Nei, det er helt riktig. Hvis du skulle skrevet de andre som brøk, hvordan ville du gjort det?

03: Hm, ¾ på de to, den vet jeg ikke. Og, en, to, tre, fire, fem, seks. 6/8 på den.

Camilla: Ja, så fint!

03: Kan det deles på 2?

Camilla: Ja, det kan det.

03: Da er den kanskje ¾ da?

Camilla: Kjempebra, du skjønte det du. Vi kan se litt på neste, for nå har jeg hvert fall ikke noe mer å spørre om. Skal vi se, den her.

03: Den?

Camilla: Ja.

03: Der, jo, det er 1 av 4 der?

Camilla: Mhm.

03: Det er tre gule og 1 rød, så da er det større sannsynlighet for at den lander på en gul enn en rød.

Camilla: Bra. Hva med den der da?

03: Eh, her er det 2 av 5. Fordi det er tre gule også er det to røde. Her er det også mer sannsynlig at den lander på en gul.

Camilla: Mhm.

03: Jeg tror jeg svarte 2 av 4. Noen ganger blander jeg litt.

Camilla: Ja, vi kan se på din.

03: Ja, jeg tror jeg tenkte fordi det var fire der.

Camilla: Det er fort gjort, men du sa rett nå. Så bra. En siste her, oppgave 10.

03: Jeg skjønte ikke den helt.

Camilla: Det er helt greit. Vi kan jo prøve oss litt på den nå. Du skal skrive en brøk som er større enn 5/6, men mindre enn 1.

03: Ja, det var spørsmålet jeg ikke skjønte.

Camilla: Mhm. Vi kan prøve å tegne?

03: Ja, en sirkel med seks også er fem fargelagt.

Camilla: Ja, hvordan kunne den blitt større uten å bli 1?

03: Dele opp.

Camilla: Dele opp hva da?

03: Sirkelen.

Camilla: Hm, hvordan da?

03: I mindre biter.

Camilla: Ja, hva hadde skjedd med tallene da?

03: De hadde blitt større. Og da hadde kanskje det over også blitt mer? Det blir flere biter.

Camilla: Det var smart. Det er veldig spennende å høre på deg forklare! Tusen takk for at du ville fortelle litt mer, sånn at vi kunne se hva for noe lurt du hadde tenkt når du jobbet med oppgavene.

Intervju med forskningsdeltaker 06

Maiken: Jeg kan begynne med å si hei.

06: Hei

Maiken: Jeg heter Maiken, og jeg er lærerstudent sammen med Camilla. Og det er jeg og Camilla som skriver oppgave sammen. Vi satt og så på din prøve i går, og vi syntes det var veldig spennende det du har tenkt og gjort, og vi er så nysgjerrig. Og lurer litt på om du kan fortelle det til oss?

06: Ja.

Camilla: Vi kan jo starte på første vi skal se på, oppgave 3. Vi lurer litt på hvordan du har tenkt når du har løst de ulike. Vi kan starte på den første der (peker på figur).

06: Det er fordi ½ er halv, også er det 3 som er fargelagt her. Også er det 3 her, og fordi 3 er halvparten av 6. Og det samme er halvparten av 2 er 1.

Camilla: Så her har du, du har brukt den? (Peker igjen på figur)

06: Mhm, og litt den. (Peker på tallene)

Camilla: Ja, det er greit å bruke de figurene som allerede er der. Den der da, nr. 2? (Peker på neste figur)

06: Eh, da delte jeg en brikke, for eksempel den her, i halv igjen også gjorde jeg det samme. Også ble det 8 biter. (Viser hvordan delene i sirkelen blir delt opp)

Camilla: Mhm.

06: Også var det 6 sånne biter som var fargelagt. (Peker på de som er fargelagt)

Camilla: Så her brukte du figuren til å på ål age deg til åtte sånne paier, eller pizzastykker. Og da så du hvor mange av de som var fargelagt?

06: Mhm.

Maiken: Så lurt!

Camilla: Hva med den siste her? (Peker på neste figur) Her var det lite som var fargelagt.

06: Ja, jeg gjorde det samme her. Bare at denne gangen delte jeg en i 3, også ble det 9. Og da var det 3 som var fargelagt.

Maiken: Hvordan visste du at du skulle dele den i 3?

06: Fordi det er allerede 3 biter der, også hvis du ganger 3 med 3 så blir det 9.

Maiken: Ja

06: Også står det 9 der.

Camilla: Så da så du at det sto 9 der og visste at 3 ganget med 3 ble 9? Og da visste du at en sånn skulle deles i tre?

06: Ja.

Camilla: Det var veldig smart. Da har jeg fått svar på det jeg lurte på i forhold til den oppgaven.

Maiken: Ja, det har jeg og. Har du fått sagt det du ville si om den oppgaven?

06 nikker.

Camilla: Da kan vi jo se litt på den neste oppgaven vi skal se på. Det er oppgaven der. Den har vi litt lyst til å høre hva du tenkte når du jobbet med den.

06: Det er 3 personer også var det 2 pizzaer så da tenkte jeg at vi kunne dele pizzaen i 3. 3 og 3. (Peker på begge pizzaene) Og 2 biter til hver person.

Maiken: Det var jo veldig lurt. Kanskje vi skal se litt på hva du svarte i den oppgaven?

06: Jeg svarte 6 av 6. For da bruker du opp hele pizzaen.

Camilla: Ja, så du tenkte at det ble 6 biter av de to pizzaene.

06: Ja. Også ble hele pizzaen spist.

Maiken: Hvordan ville du skrevet opp at de fikk 2 pizzabiter hver? Hvis du skulle skrevet det som brøk, hvordan ville du skrevet det da?

06 trekker på skuldrene.

Maiken: Nå er jo faktisk vi 3 her, så hvis vi skulle delt to pizzaer. Hvor mange biter ville Camilla fått?

06: 2.

Maiken: 2 pizza?

06: Nei, to biter.

Camilla: Ja, hvordan kunne vi skrevet den som brøk da?

06: litt usikker.

Camilla: Du skrev 6 der, fordi det ble 6 biter til sammen. 3 der og 3 der. Hvordan kunne vi skrevet det da hvis jeg fikk 2 biter?

06 trekker på skuldrene.

Camilla: Er det litt vanskelig?

06: Ja.

Maiken: Men du, du har skrevet seksdel, hvordan visste du det?

06: Fordi det var 6 biter der.

Maiken: Ja, går det an å skrive 6/6 på en annen måte? 6/6 betyr jo alt, en hel.

06: Eller så er det 2 seksdeler.

Camilla: Hvordan ville du skrevet den?

06 skriver på arket.

Camilla: Ja, da skal jeg bare vise det til Maiken.

Maiken: Du kunne det du. Så bra.

Camilla: Da kan vi jo gå litt videre her. Skal vi se, her, da er vi på oppgave 7. Hvordan tenkte du da du løste de?

06: Jeg husker ikke, jeg bare gjetta.

Camilla: Du bare gjettet. Vi kan jo se på det du har gjort. Husker du hva du gjorde når du regnet sammen her?

06 trekker på skuldrene.

Maiken: Jeg er så nysgjerrig, for du har ringet rundt noen tall på tallinja. Eller noen streker. Hvordan kom du fram til at du skulle ringe rundt de?

06: Fordi 3/5 er her, så bare plusset jeg på 4.

Maiken: Oi, det var jo kjempelurt.

Camilla: Ja, for du tenkte den var der?

06: Mhm, så bare plusset jeg på 4.

Maiken: Men når du skulle skrive det, hva tenkte du da?

06: Da bare plusset jeg på 3 pluss 4, av 5.

Maiken: Akkurat.

06: Oi, 4 pluss 3 blir jo 7. Oida.

Camilla: Ja, men vi så her at den hadde du forstått. Og det så du jo selv nå.

06: Mhm.

Maiken: Var det en liten skrivefeil?

06: Ja.

Camilla: Sånt skjer, det er fort gjort.

Maiken: På den oppgave B da, kan du fortelle oss hvordan du tenkte når du skulle ringe rundt en strek på tallinja der?

06: Eh, fordi en todeler er jo halvparten, og halvparten av 1 er liksom der. (Peker på tallinja) Også en firedel er liksom halvparten sin halvpart. Hvis det gir mening.

Maiken: Det gir veldig mening.
06: Også pluss fordi halvparten av 2 er lik 1. Så jeg bare gikk et skritt.
Camilla: Ja, så, bare, Maiken ser ikke hvor du peker. Så, peker på den streken i midten mellom 0 og 1. Også ble det da lagt til den ene, så at det gikk imellom halvparten og 1. For det ble halvparten av halvparten, som du sa?
06: Mhm.
Maiken: Vet du, du forklarte dette så godt at jeg skjønte hvor du pekte. Men du, hvis du skulle skrevet tall ved den streken du ringet rundt, hvordan brøk ville det vært?
06: Jeg har ikke lært så veldig mye om brøk.
Camilla: Det gjør ingenting, jeg synes du har gjort veldig mange lure valg. Og her og, måten du har brukt tallinja på å regne ut, er jo kjempelurt.
Maiken: Ja, vi var imponert. Det var veldig spennende å se hva du tenkte. Og, som Camilla sier, du gjør veldig mye lurt. for å komme frem til et svar. Det synes vi er så spennende, og det er derfor vi vil høre hva du tenker. Fordi vi, ja, ønsker å vite hva elever tenker når de skal jobbe med brøk. Sånn at vi kan jobbe med brøk bedre, sånn at vi kan ta de lure tankene dere har og jobbe videre med det. Og nå har du fortalt oss hvordan du gjorde når du regnet på tallinja, kan du fortelle oss hvordan du gjorde det når du regnet med de tallene som står under?
06: Eh, da bare plusset jeg på 1 pluss 1 og 2 pluss 4.
Camilla: Ja, og da fikk du?
06: To seksdeler.
Maiken: Det var spennende. Det gir mening hva du har gjort.
06: Hvorfor får vi egentlig ikke fasitsvar?
Camilla: Fordi at det var litt sånn jeg snakket om før dere gjorde prøven og, at det her er noe dere har gjort for oss og ikke noe som dere har gjort for deres resultater. Men hvis du har lyst på fasitsvar, så kan du få det. Du kan få tilbake med hva som er riktig og sånt, hvis du har lyst til det?
06: Ja.
Camilla: Da skal vi få ordnet det. Skal vi gå til oppgave 10?
Maiken: Er det noe mer du har lyst til å si?
06: Nei.
Camilla: Da, er det den siste vi skal se på. Oppgave 10. Hvordan tenkte du når du kom fram til det der?
06: Eh, det vet jeg ikke. Der bare skrev jeg noe.
Camilla: Du bare skrev noe, for her så har du skrevet?
06: Halvparten.
Camilla: Ja. Skriv en brøk som er større enn 5/6.
06: Men det var ikke det.

Camilla: Men du har tenkt at en halvpart er

06: Mindre enn 1. Men jeg husker ikke, liksom jeg leste ikke ordentlig.

Camilla: Nei, så du har tatt en som er mindre enn 1. Og der har du helt rett, en halvpart er mindre enn 1.

Maiken: Så du så på det å finne et tall som var mindre enn 1. Hvis du skulle tatt et, vet du om et tall som er større enn 5/6 og mindre enn 1 da?

06: Nei.

Camilla: Kommer ikke på noe? Men jeg forstår hvordan du har tenkt på den oppgaven her.

Maiken: Mhm, du viser jo at du vet at en halv er mindre enn 1. Er det noe mer du har lyst til å fortelle oss?

06: Nei.

Maiken: Da kan jo jeg si, at vi synes det var veldig fint å få pratet med deg. Jeg synes det var kjempespennende å høre hva du tenker, og jeg er veldig glad for at vi fikk lov til det. Tusen takk.

06: Bare hyggelig.

Intervju med forskningsdeltaker 10

Maiken: Jeg heter Maiken.

10: Hei.

Maiken: Jeg er lærerstudent sammen med Camilla, og det er vi to som skriver oppgave sammen. Og i går satt vi og så på alle oppgavene dere har gjort, og vi synes det var så spennende med det du hadde gjort. Så vi lurte på om du hadde hatt lyst til å fortelle litt mer om det?

10: Ja.

Camilla: Da kan vi jo bare starte, vi starter på oppgave 1 vi. På den A delen her, hva var det du tenkte når du skulle svare på den?

10: Ehm, jeg tenkte fordi fra det punktet til det så er det 5. Fordi det står 5 der. (Peker på 1/5 og neste strek) Så da blir det ti, femten og tjue.

Camilla: Ja.

Maiken: Fordi, når du så på 5. Så du på tallet som var under brøkstreken?

10: Mhm.

Maiken: Så da tenkte du ti, femten og tjue. Akkurat.

Camilla: På den her så står det 1 femtedel.

10: Mhm.

Camilla: Så derfor så tenkte du 1/20?

10: Ja.

Camilla: Er det noe mer du ønsker å si om den?

10: Nei.

Camilla: Da kan vi gå bittelitt ned da, på B. Hva tenkte du når du skulle plassere 1 på tallinja?

10: Eh, jeg tenkte at du skulle liksom sette sirka hvor 1 er.

Camilla: Sirka hvor 1 er.

10: Ja.

Maiken: Hvordan fant du ut hvor 1 var da?

10: Eh, jeg tok fingrene mine også tok jeg helt dit. (Viser hvordan det er målt mellom 0 og 1/3) Også bare doblet jeg det og da blir det 9 av 3, også da trengte jeg bittelitt mer. Fordi, og da blir det 1.

Maiken: Oi, nå var det mye spennende som du sa. Fordi du sa at du brukte fingrene dine?

10: Mhm.

Maiken: Hvordan visste du hvor mange ganger du skulle hoppe fremover?

10: Fordi det står 3 der, også neste er 6. Ehm, også 9 også da er det sirka der. (Peker på krysset)

Maiken: Men hvorfor 6 og 9 da?

10: Eh, når det blir 10 da er det et helt tall.

Maiken: Ja vel, så du hadde 3 og da måtte du finne ut hvor 10 var. Så da doblet du det, og da hadde du 6. Også tok du en gang til, og da var du på 9. Også litt til?

10: Ja.

Maiken: Bra, flink til å fortelle. Jeg lurer på en ting, fordi det står jo 3 der, men så er det ett tall over 3. Hva betyr egentlig det?

10: Det vet jeg ikke helt, for jeg er ikke så god på brøk.

Maiken: Okei, så du er litt usikker på hvorfor det står et tall over?

10: Ja.

Maiken: Nei, du så på det tretallet?

10: Mhm.

Camilla: Skal vi se, da går vi litt videre. Oppgave 3 synes vi også det var spennende å høre hva du har gjort.

10: Ja.

Camilla: Vi ser på den første, hva du tenkte når du regnet ut den?

10: Ehm, da tenker jeg liksom. For først så er det 1 av 2, da tenkte jeg at den er 1 og den er 2. (Peker på figuren) Men på den, når jeg tok 3 av 6 da tok jeg en, to, tre og det er 6 hele. Så 3 av 6.

Camilla: Ja, så der så du på de som var fargelagt?

10: Mhm.

Maiken: Kan du forklare en gang til? Det var veldig lurt, men jeg tror jeg må høre en gang til.

10: Ja. Ehm, så jeg tok. Eh, jeg telte en, to, tre også det er jo 6 sånne. Så jeg tok 3 av 6.

Maiken: Ja, bra. Men du, det står jo en halv ved siden av. Hva betyr det egentlig at det står ½ er lik 3/6?

10: Da tenkte jeg at de tre liksom blir til 1, også er det 2 til sammen og 1 er fargelagt. Så da blir det en av 2.
Maiken: Ja, så en halv pluss tre seksdeler, det blir til sammen en hel?
10: Ja.
Maiken: Ja, veldig spennende.
Camilla: Da kan vi se litt på den neste og da. Hva var det du gjorde her?
10: Eh, da tenkte jeg at liksom når det er tre av fire, så da trenger det en til for at det blir fire av fire. Så da tenkte jeg liksom at det blir en til, men da tenkte jeg liksom at en av de var to. Så liksom to, fire, seks også åtte. Så da tok jeg seks av åtte. Fordi tre er fargelagt.
Camilla: Ja, hvordan visste du at du skulle dele en sånn i to?
10: Ehm, fordi. Ehm, hvis jeg dobler det, det må bare dobles for at det skal bli det samme. For 4 ganger 2 er 8. Også 3 ganger 2, det blir 6.
Camilla: Ja, så fordi at du ganger 4 med 2 så visste du at du måtte ta 3 ganger 2 og?
10: Ja.
Camilla: Og at hver av de er to stykker?
10: Mhm.
Camilla: Det var veldig spennende.
10: Ja.
Maiken: Men du, jeg lurer på en annen ting jeg. Hvordan visste du at det skulle bli det samme?
10: Ehm, fordi det står at det er lik og det betyr at det er det samme.
Maiken: Det har du rett i.
Camilla: Siste der da?
10: Mhm, der så jeg at det var 3 så da er det 1 av 3. Også da var det 9, så da tenkte jeg kanskje det var det samme med den, men bare deles med tre. Så kanskje en, to tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni. Da blir det 9, og da blir det 3 av 9.
Camilla: Ja, for når du har delt opp de der i tre så ser du at det er tre der? (Peker der tall er satt inn)
10: Ja.
Camilla: Veldig smart av deg å bruke figuren der.
10: Mhm.
Maiken: Men du, for du forklarte jo så godt at tre firedeler, det skulle være det samme. Det skulle være likt fordi det er er lik imellom. Det forklarte du veldig godt. Så lurte jeg på, når du så på en halv er lik tre sekdeler, så tenkte du pluss. At den halve pluss tre skulle bli en hel.
10: Mhm.
Maiken: Står det ikke er lik der også da?
10: Mhm.
Maiken: Betyr det noe annet der?

10: Nei, jeg tror jeg kanskje tenkte litt annerledes da.

Maiken: Så spennende! Hvorfor gjorde du det da?

10: Nei, fordi jeg visste at det var allerede tre sånne der. Så da visste jeg på en måte allerede at det var 3 av 6, fordi 3 er fargelagt av 6.

Camilla: Ja, fordi den var delt opp fra før?

10: Ja.

Maiken: Så fint at du kunne forklare det til oss.

Camilla: Føler du at du har fått sagt det du vil om den?

10: Mhm.

Camilla: Da, skal vi se. Da har vi en siste vi skal se på. Og det er den oppgave 11. Husker du hva du svarte på den?

10: Eh, ja. Men jeg bare skrev svaret.

Camilla: Ja. Hva tenkte du når du kom frem til det svaret da?

10: Ehm, fordi 6 av 8 er at det trengs to til for at det skal bli en hel. Men det er, fordi at hvis vi ganger 4 med 2 så blir det 8. Og det samme med 3. Så da visste jeg at det var liksom kanskje liksom halvparten av to. Så da trengt det liksom bare 1 der for at den blir hel. (Peker på figuren)

Camilla: Ja. Så, så du på de de der mens du gjorde den her?

10: Nei, jeg så mest på den og den. (Peker på brøkene)

Camilla: Du så mest på dem?

10: Ja.

Maiken: Så du brukte bare tallene?

10: Ja.

Maiken: Men du, så har du skrevet noe som vi lurte litt på. Fordi på begge så er det 2 som trengs til en hel. Kan du forklare den?

10: Da tror jeg at jeg skrev litt feil.

Camilla: Okei, for her sa du det at det manglet 2 for å få 8? Også sa du noe om den og?

10: At der trengs det bare 1.

Camilla: Den trenger bare 1 ja.

10: Mhm.

Maiken: For når du skrev at det er to som trengs for å få begge til en hel. Kan det hende at du så litt på figuren da, kanskje?

10: Ja, da tror jeg at jeg så litt på figuren også.

Maiken: Du har fortalt ganske bra, og vist oss at du vet at seks åttedeler er det samme som tre firedeler har du sagt. Fordi du må bare gange med to, for å få seks åttedeler?

10: Ja.

Maiken: Så når du ser på tallene, så vet du at det er det samme?

10: Mhm.

Maiken: Hvis du skulle brukt den figuren til å vise oss da? Hadde du klart å bruke den? Kan du prøve å vise oss hvorfor det blir det samme?

10: Eh, jeg tror ikke det fordi jeg skjønte ikke helt den. Så jeg bare så på tallene isteden.

Maiken: Nei, for ser du hvor mange av de boksene som er fargelagt rød da?

10: Eh, 6 av 8.

Camilla: 6 av 8 ja. Så det er den? (Peker på brøken 6/8) Hvis du skulle vist på den da, for at vi skal få tre fjerdedeler, hva kunne vi gjort da tror du?

10: Kanskje liksom tatt bort disse 4, også satt på en til der.

Camilla: Okei, så da tar du bort halvparten også hvorfor legger du på en?

10: For da blir det 3 av 4 istedenfor 2 av 4.

Maiken: Åja, for hvis du tar bort halvparten så er det to som er fargelagt?

10: Mhm.

Maiken: Ja, hvor mange vil du at skal være fargelagt da?

10: Eh, 3.

Maiken: Så du må legge til en til for at det skal være tre som er fargelagt. Men hvis du legger til en til da. Hvor mange bokser har du da? Hvis Camilla holder over halvparten som du gjorde ista, også legger vi til en til, med 3 som er fargelagt. Hvor mange har du til sammen da?

10: Eh, 4. Eller, en, to, tre også fire ruter.

Maiken: Okei, så du får tre som er fargelagt. For det du sier er at du vil fargelegge en av de som er hvite, er det det du sier? Eller vil du legge til, tegne en ny boks.

10: Jeg vil ha en til rød, så det er 3 røde.

Maiken: Okei, og hvor mange blanke da?

10: En blank.

Maiken: Aha, da skjønner vi vet du. Er det noe mer du har lyst til å fortelle oss om den oppgaven her?

10: Tror ikke det.

Camilla: Er det noen andre oppgaver du ønsker å si noe om?

10: Ehm, nei.

Maiken: Da sier vi tusen takk for at vi fikk lov til å snakke med deg.

10: Bare hyggelig.

Intervju med forskningsdeltaker 11

Camilla: Hei, nå vet jo kanskje du hva det er vi skal snakke om?

11: Ja, oppgavene?

Camilla: Det stemmer, vi synes det var så spennende det du hadde gjort. Kan du fortelle litt mer om det i løpet av dette intervjuet?

11: Ja.

Camilla: Så flott. Da starter vi bare rett på vi. Oppgave 1A, hva tenkte du her?

11: Eh, nei jeg tenkte i og med at det er fem, ja, her. Så tenkte jeg egentlig bare å telle sånn, ja, en her. Så da er det jo sånn, 4 av 5 her.

Camilla: Ja, for nå sa du jo at det var fem sånne streker og den var 4 av 5.

11: Ja, også fra den og til 1 så var det fem hopp.

Camilla: Ja, så står det jo 5 under den streken der. Vet du hva den betyr?

11: Ja, det er den nevneren som sier hvor mange det er. Tror jeg hvert fall. På 1 ville det stått 5/5.

Camilla: Ja, så bra! Da lurer jeg litt på den her og, husker du hvor du satte kryss?

11: Eh..

Camilla: Vil du se?

11: Ja, husker ikke helt.

Camilla: Skal vi se.

11: Åja, der?

Camilla: Ja, husker du hvordan du tenkte?

11: Eh, nei jeg tror jeg egentlig bare tenkte hvis det var tre. At det sto tre. Så tenkte jeg at hvis det var tre streker, så skulle jeg sette den på en. Og det tenkte jeg kanskje var der.

Camilla: Åja, så du tenkte du skulle sette den på den første?

11: Ja, jeg tenkte ikke på den under.

Camilla: Da skjønner jeg, du virker usikker nå på det du har svart. Ville du satt den et annet sted?

11: Ja, for på 1A så var det 5/5 der 1 sto. Så kanskje to hopp frem?

Camilla: Ja, så smart! Er det noe mer du ønsker å si her, eller skal vi gå videre?

11: Kanskje videre.

Camilla: Okei, neste. Det er de der. Så lurer jeg litt på hvordan du har kommet frem til svaret?

11: Eh, der sto det 1 av 2. Da er det jo to sånne, også er bare halve fargelagt. Så tenkte jeg i og med at det sto seks under der så er det jo seks sånne trekanter på en måte. Så da tenkte jeg 3 av 6 fordi 3 er halvparten.

Camilla: Mhm, så bra. Hva med den?

11: Ehm, jeg tenkte vel at jeg delte opp alle sammen og da ble det jo 6 av 8.

Camilla: Ja, for da delte du hver enkelt i to?

11: Ja.

Camilla: På den da?

11: Jeg tror jeg gjorde ganske det samme, tror jeg at jeg husker jeg gjorde.

Camilla: Du delte opp den og?

11: Ja, jeg delte opp i ni for det sto ni under.

Camilla: Ja, hvis vi ser bort ifra de. (Figurene) Hadde du visst hva du skulle skrive på de ulike her da?

11: Ehm, jeg tror jeg hadde klart det på den (første) og den (andre), men jeg tror ikke hadde klart det på den (siste).

Camilla: Hva tror du at du hadde gjort på de da?

11: Jeg hadde bare tenkt på den her at det står en halv der, og da måtte jeg på en måte tenkt hva som er halvparten av seks.

Camilla: Mhm. For det du sa nå var at det var halvparten der, så da måtte det være det der og?

11: Ja.

Camilla: Her da?

11: Her hadde jeg kanskje tenkt at i og med at det er 3 av 4, også er fire halvparten av åtte. Som gjør at da må jeg på en måte, da er to sånne greier en på en måte. Da tenkte jeg at det var 6 av 8, for da er det nesten helt full på en måte.

Camilla: Så bra. Det du har sagt nå er at du har på den her, så sa du at fire er halvparten av åtte.

11: Ja.

Camilla: Hva kunne vi tenkt her da?

11: Eh. Jeg er litt usikker egentlig.

Camilla: Det er greit, vi kan jo se på det du har svart?

11: Ja.

Camilla: Fordi det du har svart er 3 av 9. Og jeg ser jo her at du har tenkt at det er halvparten, og den her var halvparten av de tallene som skulle stå der.

11: Jeg ville kanskje tenkt at i og med at, hvis man tar 3x3 så blir det ni, og når det da er en av 3, så må det liksom bare være 3 her. Så, ehe, på en måte ganget begge med tre.

Camilla: Så du tenker at du ganget med tre?

11: Mhm.

Camilla: Så smart. Er det noe mer du vil si her?

11: Nei.

Camilla: Ok, da går vi litt videre. Den oppgaven, oppgave 5. Tre jenter deler to pizzaer. Hvor mye pizza får hver jente?

11: Ehm, jeg tror jeg kanskje tenkte at hvis alle pizzaene ble delt opp i tre, på den første, så får alle hvert sitt stykke. På den andre får de det og. Så da får de to hver, så da skrev jeg 2 av 6 eller noe sånt tror jeg. Alle bitene de får er jo like store.

Camilla: Ja. Hvis det bare hadde vært en pizza, hvor mye hadde de fått da?

11: 1 av 3?

Camilla: Ja, så hvis det er to pizzaer?
11: 2 av 6.
Camilla: Blir det det samme hvis det er en pizza, men den blir delt i seks biter? Får de da like mye som når de har to pizzaer som blir delt i tre biter?
11: Nei, hvis de har 1 pizza i seks biter, så får de jo 2 av 6 fra en pizza, men bitene fra to pizzaer blir jo større. Men, jeg vet ikke, blir det 2 av 3? Nei, kanskje ikke.
Camilla: Jo, det stemmer det. Supert. Vi ser videre på oppgave 6, her er vi også nysgjerrige.
11: Ja.
Camilla: Du valgte A, B og C. Hvorfor valgte du de?
11: Fordi i og med at det skal være 3 av 4 og alle de hadde fire ruter. Og når det da skulle være de fordi den har tre fargelagt, og den har tre og den har tre. Og alle sammen har fire, sånn uten at alle hadde vært fargelagt eller alle hadde vært det, så er det fire.
Camilla: Ja. Hvis vi ser litt på det du tenkte i oppgave 5, hvor alle bitene måtte være like store.
11: Ja. De må kanskje det her og.
Camilla: Mhm.
11: Mhm, så det er vel egentlig bare de to hvis jeg tenker meg om, altså A og B, som er riktig. For alle de her er jo ikke like store, den ser litt mindre ut.
Camilla: Hva med den da? De er like store.
11: Jeg tenkte egentlig ikke, fordi det var seks som var fargelagt.
Camilla: Ja.
11: Ehm, så jeg tenkte at det ikke var det. Men det kan fort være det også hvis man tenker litt på det.
Camilla: Ja, bra. Vi ser på neste. Den her, oppgave 11. Her er jeg veldig nysgjerrig på hva du tenkte.
11: Eh, jeg tenkte at i og med at det var 6 av 8 så hvis det skulle da bli 3 av 4, så først ble jeg liksom litt sånn, jeg tenkte hva skal jeg dele opp. Men så satte jeg liksom strek sånn, to, to, to og to. Også ble det fire, istedenfor åtte, og da var det bare tre av dem som var fargelagt.
Camilla: Vet du hva, det så jeg at du hadde gjort. Det var veldig smart å dele de sånn, også så jeg at du hadde skrevet en, to og tre der, og det var de som var fargelagt. Og når du gjorde det sånn, så viste du ved å bruke rutene at 3 av 4 er det samme som 6 av 8. Veldig bra.
11: Takk.
Camilla: Nå hopper jeg litt tilbake igjen her jeg, oppgave 10. Der har du skrevet 6/6.
11: Jeg skjønte ikke den helt jeg.
Camilla: Nei, den var litt vanskelig å ha en brøk som er større enn 5/6 og samtidig er mindre enn 1.
11: Ja, jeg tenkte mer på å bare ha en brøk som er større enn den andre. Men det blir jo 1.

Camilla: Ja, hvordan kunne vi løst den på en annen måte tror du?

11: Kanskje heller, jeg er litt usikker egentlig. Kanskje tatt begge to større, som for eksempel 6 av 7 da.

Camilla: Ja, hva hadde skjedd med figuren da?

11: Da hadde den blitt større enn den, men fortsatt ikke en hel.

Camilla: Ja, det var lurt.

11: Jeg hadde kanskje delt den opp i syv biter og fargelagt seks av dem.

Camilla: Hvordan kunne vi da sett at den var større enn 5/6 da?

11: Ehem, kanskje fordi det er flere biter.

Camilla: Ja, det høres veldig smart ut.

11: Takk.

Camilla: Er det noe mer du ønsker å si til prøven?

11: Nei, egentlig ikke.

Camilla: Nei. Men så fint å få høre litt mer av hva du tenker, det er veldig spennende. Tusen takk for at vi har fått snakket med deg, og at du hadde lyst til det. Du er veldig flink.

11: Takk.

Intervju med forskningsdeltaker 17

Maiken: Hei, jeg heter Maiken og er student sammen med Camilla.

17: Mhm.

Maiken: Og det er vi som skriver oppgave sammen.

17: Okei.

Maiken: I går satt vi og så på hva du hadde svart på den prøven her, og vi synes det var så spennende. Vi har så lyst til å høre hva du har tenkt. Er det greit?

17: Ja.

Camilla: Vi kan først se på oppgave 5.

17: Åja, den.

Camilla: Husker du hva du svarte?

17: Ehh, ja. Jeg tenkte sånn at man delte pizzaen opp i, de to pizzaene opp i 3, også fikk hver av jentene 2 pizzaer hver, eller to biter hver. Og da skrev jeg i brøk at de fikk 2 av 6 hver.

Maiken: Ja, så lurt. Veldig lurt av deg å bruke de tegningene også. Hvorfor har du tenkt seksdeler?

17: Eh, 6 deler. Jeg tenkte fordi det var to pizzaer og da kunne de deles i 3 fordi det var 3 jenter og da kunne hver av de få 2.

Maiken: Okei, så du delte i 6 for da får hver jente 2?

17: Mhm.

Maiken: Mhm, og hvorfor blir det 6 deler til sammen? Hvorfor blir det ikke 8 deler for eksempel?

17: Ehm, fordi da måtte jeg delt opp i flere. Så jeg delte opp i 3 for da var det lettest bare fordi det var 3 jenter.

Maiken: Ja, ikke sant. Det var lurt. Så det blir seksdeler fordi det ble 6 deler til sammen?

17: Mhm.

Maiken: Ja, og 2 av dem. Hver jente får to av de seks delene?

17: Ja.

Maiken: Du, hvis du spiser 2 sekdeler av en pizza, hvor stor del av en pizza blir det da?

17: Ehm, eh. Pizzaen er seks deler, (Tegner opp), en, to, tre, fire, fem, seks. Og jeg spiser to, så er det jo fire igjen.

Maiken: Ja, og hvis hver jente spiser to seksdeler. Hvor mye spiser de til sammen da?

17: Eh, hele pizzaen.

Maiken: Hele pizzaen. En hel pizza?

17: Ja.

Maiken: Okei, så hvis hver jente spiser to seksdeler, så da spiser de en hel pizza. Men det var jo to pizzaer?

17: Ja, så da ble det liksom. Mhm. Så da spiste de to hele pizzaer. Hvis den, det er to pizzaer som er delt i 3.

Maiken: Så hvis det hadde vært en pizza, og de hadde spist to seksdeler. Så måtte pizzaen vært delt opp i 6?

17: Ja.

Maiken: Men med to pizzaer, så kan vi dele de i 3?

17: Mhm.

Maiken: Og da blir det to seksdeler hvis vi spiser to av de bitene?

17: Mhm.

Maiken: Men er det like mye det da? Hvis jeg spiste en seksdel av 1 pizza og 1 seksdel av to pizzaer?

17: Det blir vel like mye, for det er bare to biter på en måte.

Maiken: Er det noe mer vi lurer på da, Camilla?

Camilla: Nei, det er egentlig ikke det. Føler du at du har fått sagt det du vil?

17: Ja.

Maiken: Nå har vi fått spurt masse.

Camilla: Ja, veldig bra svar. Vi kan jo se litt på oppgave 6 da, på den her. Hva tenkte du her?

17: Ja, så jeg tenkte først å telle hvor mange deler det var. Og det var 4 på de tre første, også så jeg at 3 av de var fargelagt. Og da satt jeg ring rundt de. Også så jeg på den og der var det flere biter enn 4, og det skal jo bli 3 av 4 så da tenkte jeg at den ikke var riktig.

Camilla: Mhm, at det var feil?

17: Ja.

Maiken: Hva betyr egentlig tre firedeler?

17: Ehm, at, eh, hvis du har en boks som er delt opp i fire og tre av de er fargelagt så er tre av fire fargelagt på en måte.

Maiken: Okei, så tre av fire betyr at du har noe som er delt i fire biter og tre av de er fargelagt.

17: Mhm.

Camilla: Ja.

Maiken: Du er flink til å forklare.

Camilla: Det blir ikke så mange spørsmål, fordi du forklarer så nøye. Hvis ikke noen brenner inne med noe, så har vi en oppgave til vi vil se på. Oppgave 10.

17: 10.

Camilla: Den der, husker du hva du svarte?

17: Eh, ja jeg tror det. Ehm, jeg vet ikke for jeg skjønte den ikke helt, men jeg tror jeg vet. Så, skriv en brøk som er større enn 5 av 6, men mindre enn 1. Så da skrev jeg 6 av 6, men da vet jeg ikke om 6 av 6 blir 1. Eller om det blir, ja. Så jeg skrev 6 av 6 for det er alle da, altså man kan ikke få noen flere da.

Maiken: Mhm, og det er jo større enn 5 sekdeler.

17: For den mangler jo en for å få 6 av 6. Så da ble det jo en høyere hvis man tok 6 av 6.

Maiken: Ja, så hvis du skulle finne et tall som var høyere enn 5 seksdeler så måtte du legge på en del til?

17: Ja.

Maiken: Men så var du litt usikker sa du.

17: Ja, fordi jeg vet ikke om 6 av 6, om den blir en hel eller om det blir, ja. Fordi en hel er jo alle sammen, så da kanskje det blir en hel.

Maiken: Hvis det ble en hel, hvorfor ville det vært..

17: Fordi med 6 av 6 så er det jo alle sammen, liksom en hel kanskje.

Maiken: Og tenkte du på den at du skulle finne en som var mindre enn 1?

17: Ja.

Maiken: Og du var usikker på om?

17: Ja, om den var en eller om den var en mindre enn 1 da.

Maiken: Ja, okei. Akkurat, da skjønner jeg. Så du tenkte at hvis vi skulle finne en brøk som var større enn 5/6 så må jeg legge på 1. Så er du litt usikker på om den er mindre enn 1?

17: Eh, ja.

Maiken: Okei. Kjempefint forklart.

Camilla: Det er veldig spennende å høre på at du forklarer.

Maiken: Er det noe du har lyst til å si mer til den oppgaven?

17: Nei, egentlig ikke.

Maiken: Du forklarte det så godt at jeg har egentlig ikke noen flere spørsmål. Eller, kanskje ett spørsmål. Hvis du er usikker på at det var en hel, kunne du ha svart noe annet da?

17: Eh, kanskje jeg kunne svart 7 av 1. Eller nei, 1 av 7. Nei, det blir feil. Jeg vet ikke.

Maiken: Jeg tror du er inne på noe veldig lurt nå.

17: Ja, men 7 av 1, eller 1 av 7. Det blir jo mindre da, for den mangler jo bare en for å bli helt full da. (Peker på 5/6) Men på da 7, så mangler man jo 6 for at den skal bli hele.

Maiken: Ja, men kan man fortsette på den. Istedenfor å ta en syvdel.

17: Ja, da tar vi kanskje 6 av 7.

Camilla: Ja.

17 Ja, fordi eh den er høyere enn 5 av 6.

Maiken: Fordi da mangler det? Det var så lurt det du sa ista om at det mangler.

17: Mhm, det mangler 1 på 5 av 6 for at den skal bli helt full. Og det gjør det samme på 6 av 7, men da jo 6 og 7 høyere enn 5 og 6.

Maiken: Okei, så det som mangler på 6 av 7 er det mer eller er det mindre..

17: På 6 av 7 så blir det på en måte likt. Men at tallene er høyere enn 5 av 6.

Maiken: Kjempelurt. Så bra. Du tenker mye lurt.

Camilla: Nei, det er veldig mye lurt. Så jeg sitter ikke igjen med noen spørsmål, jeg synes du har forklart veldig bra.

Maiken: Jeg synes det er veldig fint at vi får snakke med deg. Er det noe mer du har lyst til å fortelle, sånn generelt?

17: Nei, egentlig ikke.

Maiken: Da sier vi bare tusen takk for at vi fikk snakke med deg. Veldig fint at vi får lov til å vite litt om hva du tenker.

17: Bare hyggelig.